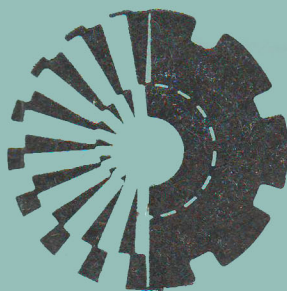


МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ISSN 0453-7998
ISSN 0233-9889

ВЕСТНИК



Харьковского
Политехнического
Института

263 '89

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 9

«Выща школа»

СОДЕРЖАНИЕ

Голоскоков Е. Г., Успенский В. Б. Экстенсивное управление разрывом твердого тела с помощью минимально избыточной системы гиридных	3
Костенко Ю. Т., Воронин А. В. Агрегированные модели дискретных систем, оптимальные по конечношаговому критерию	8
Обух А. А. Адаптивные алгоритмы идентификации непрерывных химико-технологических процессов	10
Любчик Л. М. К задаче синтеза регуляторов, компенсирующих возмущения	14
Осмоловский П. Ф., Худяев А. А., Руденко В. Е. Синтез и оценка эффективности последовательно-оптимальной двухканальной следящей системы с итерационной структурой	17
Пономарев А. С. Динамика системы управления с переменным параметром	22
Пикур Э. А., Герасимов С. Д., Северин В. П. Математические модели золотника сервомотора высокого давления	24
Белов А. И., Седов А. Н., Соляник О. В. Информационная модель инерциального измерителя угловой скорости	27
Безменов Н. И., Любчик М. А. Применение метода автоматической классификации для выделения групп сходных деталей при выборе захватных устройств промышленных роботов.	31
Годлевский М. Д. Системная оптимизация развития комплекса технических средств гражданской авиации	34
Чернышева Н. П. О возможности применения системной оптимизации для решения задачи реконструкции сети аэродромных комплексов	37
Лисицкий В. Л. Взаимная адаптация тематических планов и организационных структур разрабатывающих систем	40
Заруба В. Я., Тягунов Ф. Ф., Гурьев Е. К., Деркач В. М. Распределенная процедура планирования в активной системе	44
Выгинашко И. Н. Корректность механизмов распределения невзаимозаменяемых ресурсов	47
Гамбаров Л. А. Проблема выбора начальных условий при системной оптимизации задачи производственно-транспортного планирования	50
Голоскоков А. Е. Алгоритм формирования множества допустимых возмущений параметров некорректно поставленной задачи планирования.	53
Кононенко И. В., Умерова Н. Л. Алгоритмы имитационного моделирования на основе аппарата сетей Петри	56
Малых О. Н., Ардельян А. В., Кожин Ю. Н., Шахновский Ю. С. Этапы анализа структуры микропрограммируемого SIMD-вычислителя	59
Макаричев А. В. Оптимальная дисциплина в многолинейной системе обслуживания с управляемым входным потоком заявок	61
Незнамова Е. В. Об упрощении математической модели объектов нагрева методом теплового баланса	64
Кунянский Л. А. Модификация сплайновых алгоритмов вычислительной томографии для обращения экспоненциального преобразования Радона по схеме Третьяка — Метца	66
Вирченко Ю. П., Домнина И. Н. Построение численного решения стационарного матричного уравнения Ляпунова	70
Мазманцивили А. С. Решение неоднородного уравнения Карунена — Лозва с ядром, отвечающим нормальному марковскому процессу	72
Элис С. В., Эдельштейн Е. Я. Результаты исследований продольно-поперечных колебаний тяговых канатов пассажирской подвесной канатной дороги	74
Раскин Л. Г. Эффективность системы массового обслуживания с неоднородным входящим потоком	76
Магас С. Л., Наумов Л. Н. Покрытие полного орграфа оптимальным набором простых циклов и цепей	80
Шевченко С. В. Алгоритм решения задачи о назначениях при ограниченных ресурсах	83
Ласенко Р. Е. Идентификация параметров линейной модели турбогенератора	87

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК

**Харьковского
политехнического
института**

№ 263

**ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Основан в 1979 г.

ВЫПУСК 9

Харьков
Издательство при Харьковском
государственном университете
издательского объединения
«Выща школа»
1989

В вестнике рассмотрены вопросы идентификации сложных систем, синтеза регуляторов, моделирования измерителя угловой скорости. Предложен метод решения задачи выбора захватов промышленных роботов. Представлены алгоритмы имитационного моделирования дискретных систем, изложена методика анализа структуры вычислителя. Даны методы описания тепловых полей.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1989 г.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: д-р техн. наук проф. *Е. Г. Голоскоков* (отв. ред.), *Н. И. Безменов* (отв. секр.), д-р техн. наук проф. *В. Б. Гринев*, д-р техн. наук проф. *А. В. Дабагян*, канд. техн. наук доц. *Ю. Т. Костенко*, канд. техн. наук доц. *В. Л. Лищицкий*, канд. техн. наук доц. *Ю. А. Фролов*

Ответственный за выпуск *Н. И. Безменов*

Адрес редакционной коллегии: 310002 Харьков, ул. Фрунзе, 21, политехнический институт, инженерно-физический факультет, тел. 40-04-75, 40-00-56

Редакция научно-технической литературы
Зав. редакцией *Л. А. Гаврилова*

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 263

Техническая кибернетика
и ее приложения

Выпуск 9

Редактор *Г. А. Романец*, художественный редактор *В. А. Рьяка*,
технический редактор *Л. Т. Ена*, корректор *В. Л. Светличная*

ОИБ № 13753

Сдано в набор 21.10.88. Подписано в печать 27.03.89. БЦ 15653.
Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,5. Усл. кр.-отт. 5,75. Уч.-изд. л. 6. Тираж 500 экз. Изд. № 1720. Зак. 1616. Цена 85 к. Заказное.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Выща школа».

310003 Харьков, ул. Университетская, 16.
Харьковская городская типография № 16.
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, д-р техн. наук, В. Б. УСПЕНСКИЙ

ЭКСТЕНСИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАЗВОРОТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ МИНИМАЛЬНО ИЗЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ ГИРОДИНОВ

Задаче экстенсивного управления разворотом с помощью реактивных двигателей и инерционных маховиков в силу ее актуальности посвящено несколько работ, например [1; 2]. Использование гироскопов (ГД) в качестве исполнительных органов управления ориентацией связано с рядом особенностей, которые необходимо рассмотреть, чтобы реализовать такое управление.

Для определенности выберем компланарную схему расположения ГД (рисунок). Здесь \vec{H}_j , $j=1,4$ — вектор собственного кинетического момента j -го ГД; β_j — угол прецессии; $\dot{\beta}_j$ — скорость прецессии (положительное направление указано стрелками). Гироскопы по направлению осей прецессии образуют две коллинеарные взаимно ортогональные группы (\vec{H}_1, \vec{H}_3) и (\vec{H}_2, \vec{H}_4), жестко связанные с системой $x_1 y_1 z_1$. Последняя получена поворотом на 45° вокруг оси Oz относительно системы xyz , оси которой совпадают с главными осями инерции.

В начальный момент времени полный кинетический момент твердого тела и системы ГД считается равным нулю. В этих условиях динамика и кинематика вращения собственно твердого тела и системы ГД отвечают уравнения

$$\dot{\vec{\Lambda}} = \frac{1}{2} \Omega \vec{\Lambda} \quad (1); \quad I \vec{\omega} + \vec{H}^* = 0 \quad (2); \quad \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial t} = H \dot{\vec{\beta}} \quad (3),$$

где

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix};$$

$\vec{\Lambda}$ — вектор параметров Родрига—Гамильтона; I — диагональная матрица главных моментов инерции твердого тела вместе с ГД, участвующим в переносном вращении с угловой скоростью $\vec{\omega} = \{\omega_1 \omega_2 \omega_3\}$, которая задана проекциями на оси x, y, z ;

$$\vec{H}^* = \sum_{j=1}^4 \vec{H}_j;$$

H — модуль собственного кинетического момента одного ГД;

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta_1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta_2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta_3 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta_4 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta_2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta_3 & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta_4 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & -\cos \beta_3 & -\cos \beta_4 \end{bmatrix};$$

$\dot{\beta}$ — четырехмерный управляемый вектор относительных скоростей прецессии ГД.

Задача разворота состоит в выборе такого вектора управления $\dot{\beta}$ из множества допустимых значений ($|\dot{\beta}_j| \leq \dot{\beta}_m$, $j = \overline{1, 4}$), чтобы реализовался перевод системы (1) — (3) из точки $(\overline{\omega}_0, \overline{\Lambda}_0)$ в точку $(\overline{\omega}_k, \overline{\Lambda}_k)$, причем $\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_k = 0$, $\overline{\Lambda}_k = \{1, 0, 0, 0\}$.

Решение сформулированной задачи отыскивается в классе плоских пространственных вращений, т. е. требуемую переориентацию предлагается совершить одним поворотом на угол $\varphi_0 = = 2 \arccos \lambda_0(0)$ вокруг оси с ортом

$$\overline{e}_\varphi = \overline{e}_\varphi = \{\lambda_1(0), \lambda_2(0), \lambda_3(0)\} / \sqrt{1 - \lambda_0^2(0)}.$$

Указанная кинематика должна обеспечиваться суммарным вектором собственного кинетического момента системы ГД $\overline{H}^*(t) = = -I\overline{\omega}(t) = -I\dot{\varphi}(t) \overline{e}_\varphi$, имеющим в системе $x_1 y_1 z_1$ неизменное направление. Оно определяется вектором $\overline{h}^* = \overline{H}^*(t) / H^*(t) = \{v_1 v_2 v_3\}$, причем

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (I_1 \lambda_1(0) + I_2 \lambda_2(0)) / Q; \quad v_2 = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (I_2 \lambda_2(0) - I_1 \lambda_1(0)) / Q; \quad v_3 = -I_3 \lambda_3(0) / Q, \end{aligned}$$

где I_i — главные моменты инерции;

$$Q^2 = \sum_{i=1}^3 I_i^2 \lambda_i^2(0).$$

Анализируя допустимые области вариации кинетических моментов $\overline{H}_1, \overline{H}_3$ и $\overline{H}_2, \overline{H}_4$, получаем необходимое условие реализации вектора $\overline{H}^*(t)$ системой ГД: $\overline{H}^*(t) = \overline{H}_{13}^*(t) + \overline{H}_{24}^*(t)$ (4). Здесь $\overline{H}_{13}^*(t) = \{H^*(t) v_1, 0, d(t)\}$; $\overline{H}_{24}^*(t) = \{0, H^*(t) v_2, H^*(t) v_3, -d(t)\}$. Выполнение равенств $\overline{H}_{13}^*(t) = \overline{H}_1(t) + \overline{H}_3(t)$; $\overline{H}_{24}^*(t) = = \overline{H}_2(t) + \overline{H}_4(t)$ (5) является достаточным условием реализации вектора $\overline{H}^*(t)$ системой ГД.

В общем случае вектор \overline{H}^* допускает не единственное представление в виде (4). Следовательно, необходимо установить

порядок выбора \bar{H}_{13}^* и \bar{H}_{24}^* из условия реализации системой ГД в направлении орта \bar{h}^* максимально возможной угловой скорости, обусловленной конструктивными возможностями системы. Формально это означает решение задачи отыскания $\sup_D H^*$, где $D = \{(H^*, d) | H^{*2} \nu_1^2 + d^2 \leq 4H^2; H^{*2} \nu_2^2 + (H^* \nu_3 - d)^2 \leq 4H^2\}$. После преобразования путем введения независимых переменных $a_1 \in [0, 4H^2]$, $a_2 \in [0, 4H^2]$ неравенств в равенства указанная задача сводится к задаче нелинейного программирования: найти $\max_{a_1 a_2} H^*(a_1, a_2)$ (6) для неявно заданной функции $H^*(a_1, a_2)$:

$$(1 - 4\nu_1^2 \nu_2^2) H^{*4} + 2((1 - 2\nu_1^2) a_2 + (1 - 2\nu_2^2) a_1 - 8H^2 \nu_3^2) H^{*2} + (a_1 - a_2)^2 = 0.$$

Варианты набора компонент орта \bar{h}^*			Формулы для определения H_{\max}^{*2}	Соотношения для расчета значений переменных, доставляющих экстремум	
ν_1	ν_2	ν_3		a_1^*	a_2^*
$\nu_1^2 \geq 0,5$	—	$\nu_3 \neq 0$	$2 \frac{H^2}{\nu_1^2} (1 + 2 \nu_1 \nu_3 / \sqrt{1 - 4\nu_1^2 \nu_2^2})$	0	$2H^2 \left(2 - \frac{1}{\nu_1}\right)$
—	$\nu_2^2 \geq 0,5$	$\nu_3 \neq 0$	$2 \frac{H^2}{\nu_2^2} (1 + 2 \nu_2 \nu_3 / \sqrt{1 - 4\nu_1^2 \nu_2^2})$	$2H^2 \left(2 - \frac{1}{\nu_2}\right)$	0
$\nu_1^2 < 0,5$	$\nu_2^2 < 0,5$	—	$16H^2 \nu_3^2 / (1 - 4\nu_1^2 \nu_2^2)$	0	0
$\nu_1^2 \geq 0,5$	—	$\nu_3 = 0$	$4H^2 / \nu_1^2$	0	$4H^2 \left(1 - \frac{\nu_2^2}{\nu_1}\right)$
—	$\nu_2^2 \geq 0,5$	$\nu_3 = 0$	$4H^2 / \nu_2^2$	$4H^2 \left(1 - \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\right)$	0

Аналитическое решение задачи (6) представлено в виде таблицы вариантов набора параметров $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$. Располагая найденными значениями H_{\max}^* , a_1^* , a_2^* , несложно получить $d = ((1 - 2\nu_1^2) H_{\max}^{*2} - (a_1^* - a_2^*)) / (2H_{\max}^* \nu_3)$, а затем $\bar{H}_{13\max}^*$, $\bar{H}_{24\max}^*$ в виде (4). Отметим, что так называемое равномодульное управление [3] ($H_{13}^* = H_{24}^* = 2H$) оказалось наиболее эффективным (в принятом смысле) в области, образованной лучами с началом в точке O и направлением, которому соответствуют $\nu_1^2 < 0,5$; $\nu_2^2 < 0,5$.

Для реализации экстенсивного вращения при выбранном \bar{H}_{13}^* и \bar{H}_{24}^* необходимо выполнение в любой момент времени равенств

$$\bar{H}_1(t) + \bar{H}_3(t) = \mu(t) \bar{H}_{13\max}^*; \quad \bar{H}_2(t) + \bar{H}_4(t) = \mu(t) \bar{H}_{24\max}^*, \quad (7)$$

где $\mu(t)$ — некоторая функция, такая, что $0 \leq \mu(t) \leq \alpha \leq 1$. Равенства (7) при $t=0$ ($\mu(0)=0$) означают, что первый и третий, вто-

рой и четвертый ГД образуют сбалансированные пары, нулевые кинетические моменты которых направлены соответственно вдоль $\overline{H}_{13\text{макс}}^*$ и $\overline{H}_{24\text{макс}}^*$ (см. рисунок). Практически реализовать данное состояние системы ГД можно с помощью нуль-поворотов, которые заключаются во вращении сбалансированных пар со скоростями

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_3 = -\dot{\beta}_m \operatorname{sgn} [\operatorname{arctg} (H_{\text{макс}}^* v_1/d) + \beta_1(0)];$$

$$\dot{\beta}_2 = \dot{\beta}_4 = -\dot{\beta}_m \operatorname{sgn} [\operatorname{arctg} (H_{\text{макс}}^* v_2/(H_{\text{макс}}^* v_3 - d)) + \beta_2(0)]$$

в течение времени

$$T_1 = |\operatorname{arctg} (H_{\text{макс}}^* v_1/d) + \beta_1(0)|/\dot{\beta}_m;$$

$$T_2 = |\operatorname{arctg} (H_{\text{макс}}^* v_2/(H_{\text{макс}}^* v_3 - d)) + \beta_2(0)|/\dot{\beta}_m$$

соответственно. При этом сам объект практически остается неподвижным. По истечении времени $T' = \max\{T_1, T_2\}$ система ГД готова к реализации экстенсивного разворота по схеме (7).

В общем случае экстенсивный разворот, реализуемый системой, состоит из трех этапов: разгона, вращения с максимально возможной постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}^*$, торможения. Можно показать, что разгон до максимально возможной в данном направлении угловой скорости $\dot{\varphi}^* = -H_{\text{макс}}^*(I^{-1}\bar{h}^*, \bar{e}_{\varphi}^*)$ достигается за время $T_p^* = \pi/(2\dot{\beta}_m)$. При разгоне аппарат поворачивается вокруг выбранной оси плоского поворота на угол

$$\varphi_p^* = F(1 - \cos \dot{\beta}_m T_p^*).$$

Здесь $F = -\frac{2}{\dot{\beta}_m} H(I^{-1}\bar{h}^*, \bar{e}_{\varphi}^*) \sqrt{1 + 2A \cos \gamma + A^2}$, где $\cos \gamma = (\overline{H}_{13\text{макс}}^*, \overline{H}_{24\text{макс}}^*) / (H_{13\text{макс}}^* H_{24\text{макс}}^*)$; $A = \min \{H_{13\text{макс}}^*/H_{24\text{макс}}^*; H_{24\text{макс}}^*/H_{13\text{макс}}^*\} \leq 1$.

Следует подчеркнуть, что процесс торможения полностью симметричен процессу разгона. Это обусловлено спецификой управления вращением с помощью системы ГД.

В зависимости от конкретного значения угла требуемого поворота φ_0 выделяются два случая реализации разворота:

1. Угол $\varphi_0 \leq 2\varphi_p^*$. Участок вращения с постоянной скоростью отсутствует. Время разгона $T_p = \arccos(1 - \varphi_0/(2F))/\dot{\beta}_m \leq T_p^*$. Полное время разворота $T'' = T_p + T_T = 2T_p$. При $\varphi_0 = 2\varphi_p^*$ время $T'' = 2T_p^*$.

2. Угол $\varphi_0 > 2\varphi_p^*$. Осуществляется вращение с угловой скоростью $\dot{\varphi}^*$, продолжительностью $T_{\text{п}} = (\varphi_0 - 2\varphi_p^*)/\dot{\varphi}^*$. Время разгона $T_p = T_p^*$, полное время разворота $T'' = 2T_p^* + T_{\text{п}}$.

На участке разгона программа управления имеет вид

$$\dot{\beta}_1 = -\dot{\beta}_m \operatorname{sgn}([\overline{H}_1(0) \times \overline{H}_{13}^*]_{y_1}); \dot{\beta}_3 = -\dot{\beta}_1; \dot{\beta}_2 = A\dot{\beta}_m \cos(\dot{\beta}_m t)/$$

$$/ \sqrt{1 - A^2 \sin^2(\dot{\beta}_m t)} \operatorname{sgn}([\overline{H}_2(0) \times \overline{H}_{24}^*]_{x_1}); \dot{\beta}_4 = -\dot{\beta}_2;$$

$$A = H_{24\text{макс}}^*/H_{13\text{макс}}^*.$$

В случае, если $A = H_{13\text{макс}}^*/H_{24\text{макс}}^*$, то нестационарный множитель $A \cos(\dot{\beta}_m t)/\sqrt{1 - A^2 \sin^2(\dot{\beta}_m t)}$ входит в выражение для $\dot{\beta}_1$, а в третьем уравнении отсутствует.

На участке вращения с постоянной скоростью, если он существует, $\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_2 = \dot{\beta}_3 = \dot{\beta}_4 = 0$. На участке торможения при $A = H_{24\text{макс}}^*/H_{13\text{макс}}^*$ управление $\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_m \operatorname{sgn}([\overline{H}_1(0) \times \overline{H}_{13}^*]_{y_1}); \dot{\beta}_3 = -\dot{\beta}_1;$
 $\dot{\beta}_2 = -A\dot{\beta}_m \cos(\dot{\beta}_m(T'' - t))/\sqrt{1 - A^2 \sin^2(\dot{\beta}_m(T'' - t))} \cdot \operatorname{sgn}([\dot{H}_2(0) \times \overline{H}_{24}^*]_{x_1}); \dot{\beta}_4 = -\dot{\beta}_2.$

Надо учесть, что полное время разворота включает в себя как продолжительность собственно разворота, так и длительность нуль-поворота: $T = T' + T''$. В этих условиях данное решение нельзя считать оптимальным по быстродействию решением задачи экстенсивного разворота. Отметим, что продолжительность нуль-поворота в любом случае не превышает $T_p^* = \pi/(2\dot{\beta}_m)$.

Полученное решение может быть использовано для решения задач разворота за заданное время, а также разворота с ненулевыми начальными и конечными угловыми скоростями вращения. При известной модификации алгоритм управления может быть реализован в форме синтеза управления по информации о текущем состоянии объекта ($\overline{\omega}$, Λ) и состоянии системы ГД β_j ($j = 1, 4$).

Корректность полученного решения проверена численным моделированием процесса управления для целого ряда задач разворотов. Например, численное моделирование показало, что в полном соответствии с аналитическим решением при значениях параметров $I_1/I_3 = 0,42$, $I_2/I_3 = 0,78$, $H/I_3 = 0,07$ рад/с, $\dot{\beta}_m = 0,17$ рад/с максимально быстрый плоский разворот из положения $\overline{\lambda}_0 = \{0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$ в положение $\overline{\lambda}_k = \{1, 0, 0, 0\}$ при $\beta_j(0) = \pi/3$ рад, $j = 1, 4$; $\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_k = 0$ занял 26,83 с. Продолжительность нуль-поворота составила 8,1 с, собственно разворота — 18,73 с, из которых 0,71 с объект вращался с максимально возможной скоростью.

Список литературы: 1. Алексеев К. Б. Экстенсивное управление ориентацией космических летательных аппаратов. М., 1977. 121 с. 2. Алексеев К. Б., Злодырева О. В. Разворот космического аппарата системой двигателей-маховиков с ненулевым начальным кинетическим моментом // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 3. С. 3—7. 3. Карпачев Ю. А. Равномодульное программно-частотное управление минимально избыточной структурой двухстепенных силовых гироскопов системы ориентации космического аппарата // Там же. 1986. № 2. С. 3—10.

Поступила в редколлегию 05.11.87

АГРЕГИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО КОНЕЧНОШАГОВОМУ КРИТЕРИЮ

Первой и основной задачей, которая возникает при разработке практически реализуемых методов синтеза систем управления распределенными объектами, является понижение порядка математической модели. Обычно для ее решения используют эвристический подход, заключающийся в усечении системы уравнений математической модели в форме модального представления путем учета лишь конечного числа мод. Параметры такой модели представляют собой блоки соответствующих размеров, полученные из матриц исходной модели. Указанный подход эффективен при теоретических исследованиях алгоритмов управления распределенными объектами, когда размерность конечномерной модели может быть принята сколь угодно большой, что гарантирует близость модельных процессов управления к реальным.

Иная ситуация возникает, если необходимо ограничить размерность модели пониженного порядка достаточно малым конечным значением. Это связано с требованием реализовать алгоритмы управления в реальном масштабе времени на вычислительных средствах с ограниченными памятью и производительностью. Очевидно, что лучшего качества управления можно достичь, выбрав параметры агрегированной модели, обеспечивающие близость процессов в математической модели к процессам в реальном распределенном объекте. Такие модели называем оптимальными моделями пониженного порядка распределенных систем. Оптимальные значения параметров агрегированной модели определяются выбранными критериями близости состояний объекта и модели.

Пусть задана линейная дискретная система

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad y(k) = Cx(k), \quad x(0) = x^0. \quad (1)$$

Здесь x — n -вектор состояния объекта; u — q -вектор, принадлежащий заданному классу входных воздействий; y — p -вектор выходных переменных; A, B, C — матрицы параметров системы. Вектор y рассматривается как заданная линейная комбинация вектора состояния, относительно которой необходимо построить агрегированную модель

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k); \\ y_m(k) &= C_m x_m(k), \quad x_m(0) = x_m^0, \end{aligned} \quad (2)$$

где x_m — m -вектор состояния модели, $m < n$; y_m — p -вектор выхода, аппроксимирующий поведение выхода системы y . Параметры модели A_m, B_m, C_m и вектор начальных условий x_m^0 должны быть определены из условия минимума некоторого выпуклого

функционала $J = \dot{J}(y - y_m)$ для заданной последовательности входных сигналов $u(k)$, определенных на конечномерном интервале $[0, N]$.

Так как размерность модели меньше размерности исходной системы, примем, что траектория, описываемая вектором состояния модели x_m , расположена в некотором подпространстве размерности m пространства состояний исходной системы, а базисом этого подпространства являются столбцы некоторой матрицы L . Тогда, положив $C_m = CL$, вектор выхода агрегированной модели можно представить следующим образом: $y_m(k) = CLx_m(k)$.

Решение задачи приближенного агрегирования заключается в определении параметров модели A_m, B_m, C_m из условия минимума функционала типа

$$J(A_m, B_m, x_m^0) = \sum_{k=0}^N \|y(k) - y_m(k)\|_E^2.$$

Здесь $\|\cdot\|_E = \text{tr}(\cdot)(\cdot)^T$.

Пусть задана матрица агрегирования L . Составим уравнение для ошибки агрегирования:

$$\varepsilon(k) = y(k) - y_m(k) = C(x(k) - Lx_m(k)).$$

Далее введем величину $z(k) = x(k) - Lx_m(k)$ и получим для нее разностное уравнение. Из уравнений (1) и (2) после преобразований имеем

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Az(k) + (AL - LA_m)x_m(k) + (B - LB_m)u(k); \\ \varepsilon(k) &= Cz(k). \end{aligned}$$

Обозначим $w^T = [x_m^T, u^T]$ и запишем решение относительно $\varepsilon(k)$:

$$\varepsilon(k) = CA^k z(0) + \sum_{i=0}^k CA^{k-i-1} [AL - LA_m; B - LB_m] w(i).$$

Параметры модели пониженного порядка выберем из условия минимума критерия

$$J_1 = \max_{\|w\|_{L_1}=1} J = \max_{\|w\|_{L_1}=1} \|\varepsilon\|_{L_2}^2, \quad (3)$$

где L_1, L_2 — соответствующие пространства.

Воспользовавшись теоремой из работы Д. В. Везломцева и др. *, выражение для функционала (3) можно представить следующим образом:

$$J_1 = \sum_{k=0}^N \|CA^k [AL - LA_m; B - LB_m; x^0 - Lx_m^0]\|_E^2. \quad (4)$$

* Везломцев Д. В., Кубинцев Г. М., Цатурян К. Т. Приближенное агрегирование линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1986. № 3. С. 48—58.

Приведем выражение (4) к виду, удобному для дифференцирования по исходным матрицам модели пониженного порядка. В результате преобразований запишем

$$J_1 = \text{tr} \{ [AL - LA_M : B - LB_M : x^0 - Lx_M^0] P(N) \times \\ \times [AL - LA_M : B - LB_M : x^0 - Lx_M^0]^T. \quad (5)$$

Здесь

$$P(N) = \sum_{k=0}^N (A^T)^k C^T C A^k.$$

Непосредственно минимизируя функционал (5) по A_M , B_M , x_M^0 , получим

$$A_M = RAL; \quad B_M = RB; \quad x_M^0 = Rx^0, \quad (6)$$

где $R = (L^T P(N) L)^{-1} L^T P(N)$.

Матрица R является псевдообратной по отношению к матрице агрегирования L . Матрица $P(N)$ представляет собой решение дискретного уравнения Ляпунова

$$P(k+1) = A^T P(k) A + C^T C \quad (7)$$

с начальным условием $P(0) = C^T C$ на интервале $[0, N]$.

Таким образом, выражения (6), дополненные уравнением (7), полностью определяют алгоритм вычисления параметров и агрегированной модели. При этом минимальное значение критерия

$$J_1 = \text{tr} \{ [AL : B : x^0]^T P(N) (I - LR) [AL : B : x^0] \},$$

где I — единичная матрица соответствующего размера.

В том случае, когда матрица динамики системы A обладает устойчивым спектром, уравнение (7) при $N \rightarrow \infty$ трансформируется в стационарное уравнение Ляпунова

$$P = A^T P A + C^T C.$$

Нужно отметить, что при построении модели, описывающей динамику первых m мод распределенного объекта, матрица агрегирования имеет вид $L = (I_m : 0)^T$ и параметры оптимальной модели, как следует из (6), образуются соответствующими блоками матриц A , B , C .

Поступила в редколлегию 16.12.87

УДК 681.015

А. А. БОБУХ, канд. техн. наук

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Создание адаптивных систем управления в условиях отсутствия достаточно полной априорной информации о свойствах ис-

следуемого непрерывного химико-технологического процесса (НХТП), характеризующегося большим числом входных и выходных воздействий (а также нестационарностью характеристик оборудования и зашумленностью), о приложенных к нему возмущениях является одним из наиболее бурно развивающихся направлений теории управления. Синтез адаптивного управления невозможен без решения задачи идентификации вне контура управления (стратегическая идентификация) и в самом контуре (текущая или оперативная).

Использование в контуре управления идентификатора обусловлено соблюдением определенных требований к алгоритму его функционирования. Поэтому при выборе методов оценивания параметров необходимо выполнение ряда противоречивых (в общем случае) требований, среди которых следующие: реализуемость методов в режиме нормального НХТП или близком к нему; обеспечение возможности подстройки параметров модели ввиду нестационарности НХТП; достаточное быстроедействие, так как время наблюдения конечно; вычислительная простота и помехоустойчивость алгоритма идентификации, надежность получаемых оценок параметров модели (вычислительные ресурсы, необходимые для решения задачи идентификации, должны быть минимальными); универсальность модели, т. е. пригодность для воспроизведения свойств достаточно широкого класса НХТП; удобство модели для решения задач управления.

Большинству из перечисленных требований удовлетворяет широко используемый алгоритм Качмажа, осуществляющий итерационную коррекцию параметров. При построении очередной итерации в нем используется информация только о предыдущем шаге. Алгоритм имеет вид

$$C_n = C_{n-1} + \gamma_n (y_n - C_{n-1}^T X_n) \|X_n\|^{-2} X_n. \quad (1)$$

Здесь C_n — оценка вектора искомых коэффициентов, полученная на n -м такте; γ_n — параметр, влияющий на скорость сходимости (вводится для компенсации воздействия помех), в общем случае $\gamma_n \in (0, 2)$; y_n — уровень измеряемого выходного сигнала; X_n — m -мерный вектор управляемых в общем случае входных воздействий; $\|X_n\|^{-2}$ — евклидова норма,

$$\|X_n\|^{-2} = \sum_{i=1}^n x_{i,n}^2.$$

При отсутствии помех $\gamma_n = 1$, а при их наличии для сходимости алгоритма (1) требуется, чтобы параметр γ_n удовлетворял условиям Дворецкого:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0.$$

Если выходной сигнал измеряется с помехой ε_n , то уточнение по алгоритму (1) происходит следующим образом:

$$C_n = C_{n-1} + \gamma_n (y_n - C_{n-1}^T X_n + \varepsilon_n) \|X_n\|^{-2} X_n. \quad (2)$$

Выразим скорость сходимости Q_n алгоритмов (1) и (2) через относительные ошибки θ_n :

$$Q_n = \|\theta_{n-1}\|^2 - \|\theta_n\|^2, \quad (3)$$

где $\theta_n = C_n - C^*$; $\|\theta_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \theta_{in}^2$.

Для сходимости алгоритма (3) необходимо, чтобы соблюдалось условие $Q_n > 0$.

В общем случае из-за случайности величин, входящих в алгоритмы, качество оценки скорости сходимости процедур характеризуется величиной

$$\hat{Q}_n = M \{ \|\theta_{n-1}\|^2 - \|\theta_n\|^2 \}. \quad (4)$$

Здесь M — математическое ожидание.

Алгоритм (2) относительно ошибок θ_i записывается в виде

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n (\theta_{n-1}^\tau X_n) \|X_n\|^{-2} X_n + \gamma_n \varepsilon_n \|X_n\|^{-2} X_n. \quad (5)$$

Возведем обе части (5) в квадрат, подставим полученное выражение в (4) и продифференцируем \hat{Q}_n по γ_n . Тогда получим, что оптимальное значение $\gamma_n^{\text{опт}}$, обеспечивающее максимальное убывание ошибки идентификации θ_i в условиях помех, определяется выражением

$$\begin{aligned} \gamma_n^{\text{опт}} = M \{ (\theta_{n-1}^\tau X_n)^2 \|X_n\|^{-2} \} [M \{ (\theta_{n-1}^\tau X_n)^2 \|X_n\|^{-2} \} + \\ + M \{ \varepsilon_n^2 \|X_n\|^{-2} \}]^{-1} < 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (6) сформулировано исходя из того, что помеха не коррелирована с полезным сигналом. Считается, что $\gamma_n^{\text{опт}}$ зависит от статистических характеристик полезных сигналов и помех.

Рассмотрим, как изменяются свойства оценки, находимой по алгоритму (5), с увеличением дискретного времени n . Возведем обе части (5) в квадрат и усредним. С учетом статистической независимости полезных сигналов и помех запишем:

$$\begin{aligned} M \{ \|\theta_n\|^2 \} = M \{ \|\theta_{n-1}\|^2 \} - (2\gamma_n - \gamma_n^2) M \{ (\theta_{n-1}^\tau X_n)^2 \|X_n\|^{-2} \} + \\ + \gamma_n^2 M \{ \varepsilon_n^2 \|X_n\|^{-2} \}. \end{aligned} \quad (7)$$

При независимых компонентах X_i

$$M \{ (\theta_{n-1}^\tau X_n)^2 \|X_n\|^{-2} \} = M \{ \|\theta_{n-1}\|^2 \} N^{-1},$$

где N — размерность исследуемых процессов. Тогда (7) представим в виде

$$M \{ \|\theta_n\|^2 \} = [1 - (2\gamma_n - \gamma_n^2) N^{-1}] M \{ \|\theta_{n-1}\|^2 \} + \gamma_n^2 M \{ \varepsilon_n^2 \|X_n\|^{-2} \}. \quad (8)$$

Итерируя (8), получаем

$$\begin{aligned} M \{ \|\theta_n\|^2 \} = [1 - (2\gamma_n - \gamma_n^2) N^{-1}]^n M \{ \|\theta_0\|^2 \} + \\ + [1 - (1 - (2\gamma_n - \gamma_n^2) N^{-1})]^n \gamma_n (2 - \gamma_n)^{-1} N M \{ \varepsilon_n^2 \|X_n\|^{-2} \}. \end{aligned} \quad (9)$$

При выводе (9) предполагалось, что процессы X_i , ε_i стационарны и поэтому $M\{\varepsilon_n^2 \|X_n\|^{-2}$ не зависит от n . Окончательно исходя из (9) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{\|\theta_n\|^2\} = \gamma_n (2 - \gamma_n)^{-1} NM\{\varepsilon_n^2 \|X_n\|^{-2}\}. \quad (10)$$

Таким образом, даже при сколь угодно большом времени наблюдения остается некоторая ошибка идентификации, определяемая выражением (10). Она зависит от размерности исследуемого процесса N , статистических свойств сигналов и помех, а также от параметра γ_n .

Значительного сокращения времени идентификации можно добиться, применив алгоритмы более сложной структуры, так называемые многошаговые адаптивные алгоритмы, использующие при построении очередной итерации информацию не только о последнем шаге, но и о ряде предыдущих шагов. Рассмотрим двухшаговый алгоритм вида

$$C_n = C_{n-1} + \gamma_n \{(y_n - C_{n-1}^T X_n)[\|X_{n-1}\|^2 X_n - (X_n^T X_{n-1}) X_{n-1}] \times \\ \times [\|X_n\|^2 \|X_{n-1}\|^2 - (X_n^T X_{n-1})^2]^{-1} + (y_{n-1} - C_{n-1}^T X_{n-1})[\|X_n\|^2 X_{n-1} - \\ - (X_n^T X_{n-1}) X_n][\|X_n\|^2 \|X_{n-1}\|^2 - (X_n^T X_{n-1})^2]^{-1}\}. \quad (11)$$

Для сравнения скоростей сходимости алгоритмов (2) и (11) определим значения величин $Q_n^{(2)}$, $Q_n^{(11)}$. Нетрудно показать, что $Q_n^{(2)} = \gamma_n (\theta_{n-1}^T X_n)^2 \|X_n\|^{-2} (2 - \gamma_n)$; $Q_n^{(11)} = \gamma_n (2 - \gamma_n)[(\theta_{n-1}^T X_n) X_{n-1} - \\ - (\theta_{n-1}^T X_{n-1}) X_n]^2 [\|X_n\|^2 \|X_{n-1}\|^2 - (X_n^T X_{n-1})^2]^{-1}$.

Тогда

$$\Delta Q_n = Q_n^{(11)} - Q_n^{(2)} = \gamma_n (2 - \gamma_n)[(\theta_{n-1}^T X_n)(X_n^T X_{n-1}) - (\theta_{n-1}^T X_{n-1}) \times \\ \times \|\|X_n\|^2\|^2][\|X_n\|^2 \|X_{n-1}\|^2 - (X_n^T X_{n-1})^2]^{-1} > 0. \quad (12)$$

Итак, скорость сходимости двухшагового алгоритма (11) превышает скорость сходимости одношагового алгоритма (2) на величину ΔQ_n , определяемую выражением (12). Следовательно, незначительное усложнение структуры алгоритма приводит к существенному сокращению времени идентификации.

Рассмотренные выше алгоритмы идентификации были получены из условия минимума квадратичного критерия идентификации и использованы при разработке технического проекта АСУТП одного из содовых производств при его реконструкции.

Поступила в редколлегию 05.11.87

К ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ, КОМПЕНСИРУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯ

Проблема синтеза систем, инвариантных к недоступным непосредственному измерению внешним воздействиям, является одной из центральных в современной теории управления. Развитие классических структурных методов синтеза инвариантных систем привело к возникновению теории регуляторов, поглощающих возмущения волновой природы [1]. В соответствии с ней полное устранение влияния возмущений оказывается невозможным и параметры регулятора выбираются из условия минимизации степени указанного влияния. Нами предлагается новый подход к решению задачи синтеза инвариантных регуляторов — с использованием концепции обратных задач динамики [2].

Рассмотрим дискретную динамическую систему, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Dw(k); \\ y(k) &= Cx(k).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $x(k) \in R^n$ — вектор состояния системы в момент времени k ; R^n — n -мерное векторное пространство; $u(k) \in R^m$ — вектор управлений; $w(k) \in R^p$, $p \leq m$ — вектор внешних возмущающих воздействий, недоступных непосредственному измерению; $y(k) \in R^r$, $p \leq r < n$ — вектор измеряемых выходных переменных системы. Будем предполагать, что приращение внешнего возмущающего воздействия ограничено, т. е.

$$\|w(k) - w(k-1)\| \leq \Delta_w \tau,\tag{2}$$

где τ — интервал дискретизации по времени; Δ_w — некоторая константа, характеризующая скорость изменения возмущения.

Синтезируем регулятор, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y(k)\| \leq \Delta.$$

Здесь Δ — константа, определяемая параметрами объекта и скоростью изменения возмущения. Указанное условие выражает требование стабилизации выходных переменных объекта в заданной окрестности начала координат. Ниже установлены размеры этой окрестности, обеспечивающие разрешимость поставленной задачи.

Для синтеза закона управления воспользуемся понятием обратной динамической системы [3]. В дальнейшем будем предполагать, что $r = m = p$ и матрицы CB и CD невырождены. Система, обратная к (1) по каналу возмущающих воздействий, имеет вид

$$\tilde{x}_w(k+1) = \Pi_D A \tilde{x}_w(k) + \Pi_D B u(k) + D(CD)^{-1} y(k+1);$$

$$\tilde{w}(k) = (CD)^{-1} [y(k+1) - CAx_w(k) - CBu(k)], \quad (3)$$

где $\tilde{x}_w(k)$, $\tilde{w}(k)$ — соответственно векторы состояния и выхода обратной системы; $\Pi_D = I - D(CD)^{-1}C$ — матрица-проектор; I — единичная матрица.

Воспользуемся уравнениями (3) для получения оценки вектора возмущающих воздействий. Система (3) физически нереализуема, поэтому указанная оценка $\hat{w}(k)$ может быть найдена лишь с запаздыванием на один шаг по отношению к очередному вектору измерений:

$$\hat{w}(k-1) = (CD)^{-1} [y(k) - CA\tilde{x}_w(k-1) - CBu(k-1)]. \quad (4)$$

Вычислим прогнозируемое значение реакции системы (1) на возмущающее воздействие при нулевых управлениях:

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + D\hat{w}(k-1), \quad \bar{y}(k+1) = C\bar{x}(k+1). \quad (5)$$

В целях получения физически реализуемого уравнения прогноза (5) в нем использована оценка возмущения (4) на предшествующем шаге.

Управляющее воздействие, компенсирующее влияние внешних возмущений, определим как выход системы (обратной к (7) по каналу управления), на выход которой подается прогнозируемое значение выходных переменных объекта с обратным знаком:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_u(k+1) &= \Pi_B A \tilde{x}_u(k) - B(CB)^{-1} \bar{y}(k+1); \\ u^*(k) &= -(CB)^{-1} [\bar{y}(k+1) + CA \tilde{x}_u(k)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\tilde{x}_u(k)$ — вектор состояния соответствующей обратной системы;

$$\Pi_B = I - B(CB)^{-1}C.$$

Окончательно уравнения динамического регулятора, компенсирующего влияния внешних возмущений, с учетом (3)—(6) примут вид

$$\begin{aligned} u^*(k) &= u^*(k-1) - (CB)^{-1} [CA(\bar{x}(k) + \tilde{x}_u(k) - \tilde{x}_w(k-1)) + \\ &\quad + y(k)]; \\ x(k+1) &= A\bar{x}(k) + D(CD)^{-1} [y(k) - CA\tilde{x}_w(k-1) - CBu^*(k-1)]; \\ \tilde{x}_u(k+1) &= \Pi_B A \tilde{x}_u(k) - B(CB)^{-1} C\bar{x}(k+1); \\ \tilde{x}_w(k) &= \Pi_D A \tilde{x}_w(k-1) + \Pi_D B u^*(k-1) + D(CD)^{-1} y(k). \end{aligned} \quad (7)$$

Исследуем свойства системы с регулятором (7). Уравнение замкнутой системы

$$y(k+1) = CA\varepsilon(k) + CDv(k); \quad (8)$$

$$\varepsilon(k+1) = A\varepsilon(k) + Dv(k),$$

где $\varepsilon(k) = x(k) - \bar{x}(k) - \tilde{x}_u(k)$ — вектор вспомогательных переменных; $v(k) = w(k) - \hat{w}(k-1)$ — вектор ошибок оценивания внешнего возмущения. В свою очередь, из (4) следует, что

$$v(k) = \Delta w(k) - (CD)^{-1}CAe_{xw}(k-1). \quad (9)$$

Здесь $\Delta w(k) = w(k) - w(k-1)$ — приращение внешнего воздействия за интервал дискретизации по времени τ ; $e_{xw}(k) = x(k) - \tilde{x}_w(k)$ — отклонение векторов состояния прямой и обратной систем. Из (1) и (3) получим, что

$$e_{xw}(k) = (I - D(CD)^{-1}C)Ae_{xw}(k-1). \quad (10)$$

Из свойств обратных систем [3] следует, что если система (1) является устойчивой и минимально-фазовой по каналу возмущений, т. е. нули и полюса дискретной передаточной функции $W(z) = C(zI - A)^{-1}D$ лежат внутри единичного круга, то замкнутая система (8)–(10) также устойчива. При этом вектор выходных переменных в пределе ограничен:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y(k)\| \leq \Delta = \|C(I + A(I - A)^{-1})D\| \Delta_w \tau. \quad (11)$$

Таким образом, для медленноменяющихся возмущений может быть достигнута высокая точность компенсации возмущающих воздействий. В частности, для постоянных по значению возмущений согласно (11) имеет место полная компенсация, тогда как для разомкнутой системы отклонение выходных переменных пропорционально амплитуде возмущений.

Как следует из (8)–(10), динамические свойства замкнутой системы полностью определяются параметрами объекта (1). При малых значениях интервала дискретизации τ система близка к границе устойчивости, что ухудшает качество переходных процессов. Для получения заданных динамических свойств замкнутой системы введем в закон управления обратную связь по состоянию $u(k) = u^*(k) - L\hat{x}(k)$, где L — произвольная матрица коэффициентов усиления. Оценку вектора состояния сформируем с помощью наблюдателя для систем с неизмеряемым входом [4]:

$$s(k+1) = (\Pi_D A - GC)s(k) + \Pi_D AD(CD)^{-1}y(k) + \Pi_D Bu(k); \\ \hat{x}(k) = s(k) + D(CD)^{-1}y(k). \quad (12)$$

Здесь $s(k)$ — вектор состояния наблюдателя; G — произвольная матрица. Из (1) и (2) следует, что ошибка оценивания $e_x(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$e_x(k+1) = (\Pi_D A - GC)e_x(k). \quad (13)$$

Таким образом, при выполнении условий управляемости и наблюдаемости системы (1), соответствующим выбором матриц L и G можно обеспечить произвольные динамические свойства замкнутой системы при одновременной компенсации возмущений.

Список литературы: 1. Джонсон Ф. Теория регуляторов, приспособляющихся к возмущениям//Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах/Под ред. К. Т. Леондеса: Пер. с англ. М., 1980. 408 с. 2. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М., 1987. 304 с. 3. Яаксоо Ю. И. К теории дискретных обратных систем//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 5. С. 165—168. 4. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. Синтез оптимальных стохастических наблюдателей для систем с неизмеряемым входом//X Всесоюз. совещ. по пробл. упр.: Тез. докл. Алма-Ата; М., 1986. Ч. 1. С. 231—232.

Поступила в редколлегию 02.12.87

УДК 681.514

П. Ф. ОСМОЛОВСКИЙ, д-р техн. наук,
А. А. ХУДЯЕВ, В. Е. РУДЕНКО

СИНТЕЗ И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОЙ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ С ИТЕРАЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ

Применение многоканальных систем управления, функционирующих по итерационному алгоритму [1], позволяет существенно повысить качество воспроизведения полезных сигналов $x(t)$, в частности точности измерения координат движущихся объектов при наличии случайных помех в каналах. Минимизация ошибок измерения $x(t)$ итерационной системой со свободной структурой каналов приводит в этом случае к постановке задачи, характерной для статистической теории оптимальных систем, которая развита в работах А. Н. Колмогорова, Н. Винера, Р. Е. Калмана, а также В. С. Пугачева, В. В. Солодовникова [2], А. А. Фельдбаума и др.

В n -канальной итерационной системе каждый i -й канал вносит поправку в сформированное $i-1$ каналами текущее значение воспроизводимого сигнала, повышая эффективность всей системы, а сам процесс воспроизведения задающего воздействия $x(t)$ в случае использования линейных стационарных каналов может быть описан рекуррентными соотношениями вида

$$y_i(t) = y_{i-1}(t) + y_i^*(t), \quad y_0(t) = 0; \quad (1)$$

$$y_i^*(t) = \int_{t_0}^t W_i(t-\tau) [\varepsilon_{i-1}(\tau) + f_i(\tau)] d\tau; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{i-1}(t) = x(t) - y_{i-1}(t) \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $y_i(t)$ — i -е приближение к $x(t)$; $y_i^*(t)$ — поправка, вносимая на i -м этапе итерации с учетом предшествующих измерений; $W_i(t)$, $f_i(t)$ — функция веса и приведенная ко входу помеха i -го канала.

Итерационные системы обладают принципиальной возможностью достижения высокой динамической точности [1]. Из (1) — (3) для ошибки $\varepsilon_i(t) = x(t) - y_i(t)$ в установившемся режиме ($t_0 = -\infty$) получим

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_{i-1}(t) - y_i^*(t); \quad \varepsilon_0(t) = x(t) \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

откуда следует, что $\varepsilon_i(t)$ будет уменьшаться с ростом номера $i = 1, 2, \dots, n$ канала воспроизведения. Вместе с тем наличие некомпенсируемой помехи $f_n(t)$ в измерительном устройстве последнего n -го точного канала является одним из основных факторов, ограничивающих достижение высокой точности воспроизведения с помощью итерационных систем.

Оптимальные функции веса n автономных каналов $\hat{W}_i(t)$ последовательно определяются из условия минимума дисперсий ошибок ε_i^2 по каждой из выходных координат $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ $\varepsilon_i^2 = M\{[x(t) - y_i(t)]^2\} \quad \forall i = \overline{1, n}$.

При стационарных случайных внешних воздействиях из (2) — (4) имеем следующую систему интегральных уравнений Винера — Хопфа [3] относительно $\hat{W}_i(t)$:

$$\int_0^{\infty} \hat{W}_i(\theta) \Gamma_i(\tau - \theta) d\theta = Q_i(\tau), \quad \tau > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где для каждого i -го этапа синтеза корреляционные функции $\Gamma_i(\tau)$, $Q_i(\tau)$ определяются из выражений $\Gamma_i(\tau) = M\{[x(t) - y_{i-1}(t) + f_i(t)][x(t + \tau) - y_{i-1}(t + \tau) + f_i(t + \tau)]\}$; $Q_i(\tau) = M\{[x(t) - y_{i-1}(t)][x(t + \tau) - y_{i-1}(t + \tau) + f_i(t + \tau)]\}$.

Рассмотрим достаточно общий практически важный случай, когда $x(t)$ и $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ — некоррелированные между собой случайные процессы, которые, как и процесс-ошибка $\varepsilon_i(t)$, могут быть получены из белого шума единичной интенсивности с помощью рациональных передаточных функций соответствующих формирующих фильтров [3] $V_x(s)$, $V_{f_i}(s)$ и $V_{\varepsilon_i}(s)$, представимых в таком виде:

$$V_x(s) \equiv M_x(s)/N_x(s) = (a_{x_0} + a_{x_1}s)/(b_{x_0} + b_{x_1}s + b_{x_2}s^2); \quad (6)$$

$$V_{f_i}(s) = K_{f_i} = \sqrt{S_{f_{i0}}}; \quad (7)$$

$$V_{\varepsilon_i}(s) \equiv M_{\varepsilon_i}(s)/N_{\varepsilon_i}(s) \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad V_{\varepsilon_0}(s) = V_x(s). \quad (8)$$

Здесь s — переменная Лапласа; $S_{f_{i0}}$ — начальные (при $\omega = 0$) значения спектральных плотностей $S_{f_i}(\omega)$ помех; a_{x_0} , a_{x_1} , b_{x_0} , b_{x_1} , b_{x_2} — постоянные коэффициенты. При этом, учитывая свойства

спектральных плотностей ошибок $S_{\varepsilon i}(\omega)$ [2], из (2), (4), (6) — (8) найдем

$$V_{\varepsilon i}(s) V_{\varepsilon i}(-s) = E_i(s) E_i(-s) V_{\varepsilon, i-1}(s) V_{\varepsilon, i-1}(-s) + K_{f_i}^2 W_i(s) W_i(-s), \quad (9)$$

где $W_i(s) \equiv B_i(s)/C_i(s)$ — передаточная функция замкнутого i -го канала, соответствующая $W_i(t)$; $E_i(s) = 1 - W_i(s) = A_i(s)/C_i(s)$.

Решение уравнений (5) для случая (6), (7) относительно передаточных функций ошибок $E_i(s)$ дает простые рекуррентные соотношения для характеристических полиномов $A_i(s)$, $C_i(s)$ разомкнутого ($R_i(s)$) и замкнутого ($W_i(s)$) каналов последовательно-оптимальной итерационной системы:

$$\begin{aligned} A_i(s) &= K_{f_i} N_{\varepsilon, i-1}(s); \\ C_i(s) C_i(-s) &= M_{\varepsilon, i-1}(s) M_{\varepsilon, i-1}(-s) + K_{f_i}^2 N_{\varepsilon, i-1}(s) N_{\varepsilon, i-1}(-s) \\ &\quad \forall i = \overline{2, n}; \end{aligned} \quad (10)$$

при $i=1$

$$\begin{aligned} A_1(s) &= K_{f_1} N_x(s); \\ C_1(s) C_1(-s) &= M_x(s) M_x(-s) + K_{f_1}^2 N_x(s) N_x(-s). \end{aligned} \quad (11)$$

Эти соотношения с учетом (9) позволяют путем факторизации определить оптимальные передаточные функции $\hat{W}_i(s)$, $\hat{R}_i(s)$, $i = \overline{1, n}$.

Эффективность итерационных систем будем оценивать по выигрышу в точности $G_n = \varepsilon_{n-1}^2 / \varepsilon_n^2$. Последний в случае использования (6), (7) можно представить так:

$$G_n = (1 - K_{f_n}^2 J_n / \varepsilon_{n-1}^2)^{-1}. \quad (12)$$

Здесь

$$J_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} R_n(s) R_n(-s) ds \quad (13)$$

интегральная квадратичная оценка функции веса n -го разомкнутого оптимального канала. Для расчета ε_i^2 и оценки интегралов J_i воспользуемся методом рекуррентных уравнений К. Острема [4], который удобно представить в виде следующего алгоритма.

Выражение для дисперсии или квадратичной оценки (13) можно преобразовать в интеграл вида

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{B(s) B(-s)}{A(s) A(-s)} ds, \quad (14)$$

где $A(s)$, $B(s)$ — полиномы с рациональными коэффициентами:

$$A(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \dots + a_{m-1} s + a_m;$$

$$B(s) = b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m.$$

Для вычисления интеграла (14) введем в рассмотрение полиномы $A_k(s)$ и $B_k(s)$, степени которых не превышают m :

$$A_k(s) = a_0^k s^k + a_1^k s^{k-1} + a_2^k s^{k-2} + \dots + a_{k-1}^k s + a_k^k;$$

$$B_k(s) = b_1^k s^{k-1} + b_2^k s^{k-2} + \dots + b_{k-1}^k s + b_k^k,$$

а коэффициенты определяются из рекуррентных уравнений

$$A_{k-1}(s) = A_k(s) - \alpha_k s \tilde{A}_k(s); \quad (15)$$

$$B_{k-1}(s) = B_k(s) - \beta_k \tilde{A}_k(s).$$

Введем также интеграл

$$I_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{B_k(s) B_k(-s)}{A_k(s) A_k(-s)} ds. \quad (16)$$

Здесь $\alpha_k = a_0^k/a_1^k$; $\beta_k = b_1^k/a_1^k$; $a_1^k \neq 0$; $\tilde{A}_k(s) = \frac{1}{2} [A_k(s) - (-1)^k \times$

$\times A_k(-s)]$ — полином, составленный из нечетных членов $A_k(s)$; при $k = m$ имеем $A_m(s) = A(s)$; $B_m(s) = B(s)$; $I_m = I$. Условия возможности такого представления сформулированы в виде теоремы 3.1 в работе [4]. Там же доказана теорема 3.3 о том, что, если все корни полинома $A(s)$ лежат в левой полуплоскости, справедлива рекуррентная формула

$$I_k = I_{k-1} + \beta_k^2 / (2\alpha_k), \quad k = \overline{1, m}; \quad I_0 = 0. \quad (17)$$

Чтобы вычислить интеграл (16) в соответствии с (17), необходимо определить коэффициенты полиномов $A_k(s)$ и $B_k(s)$. Это можно сделать с помощью рекуррентных уравнений (15). После нахождения значений α_k и β_k интеграл I (дисперсия ошибки) вычисляется по формуле

$$I = \sum_{k=1}^m \beta_k^2 / (2\alpha_k) = \sum_{k=1}^m (b_1^k)^2 / (2a_0^k a_1^k). \quad (18)$$

Расчетные формулы (15) и (18) просты и удобны для вычислений на цифровой ЭВМ.

Для последовательно-оптимальной двухканальной ($n=2$) следящей системы из (6), (7), (10), (11) имеем:

$$\hat{W}_1(s) \equiv B_1(s)/C_1(s) = (b_{10} + b_{11}s)/(c_{10} + c_{11}s + c_{12}s^2); \quad (19)$$

$$\hat{W}_2(s) \equiv B_2(s)/C_2(s) = (b_{20} + b_{21}s)/(c_{20} + c_{21}s + c_{22}s^2), \quad (20)$$

где

$$c_{10} = \sqrt{K_{f1}^2 b_{x0}^2 + a_{x0}^2}; \quad c_{11} = \sqrt{2c_{10}c_{12} + a_{x1}^2 + K_{f1}^2 (b_{x1}^2 - 2b_{x0}b_{x2})};$$

$$c_{12} = K_{f1} b_{x2}; \quad b_{10} = c_{10} - K_{f1} b_{x0}; \quad b_{11} = c_{11} - K_{f1} b_{x1}; \quad (21)$$

$$c_{20} = \sqrt{K_{f1}^2 (a_{x0}^2 + b_{10}^2) + K_{f2}^2 c_{10}^2};$$

$$c_{21} = \sqrt{2c_{20}c_{22} + K_{f1}^2 (a_{x1}^2 + b_{11}^2) + K_{f2}^2 (c_{11}^2 - 2c_{10}c_{12})};$$

$$c_{22} = K_{f2} c_{12}; \quad b_{20} = c_{20} - K_{f2} c_{10}; \quad b_{21} = c_{21} - K_{f2} c_{11}. \quad (22)$$

Для оценки потенциальной точности и эффективности такой системы по G_2 согласно (12) в качестве примера выберем типовые для задач сопровождения модели полезного сигнала $x(t)$ и помех $f_1(t), f_2(t)$ [2; 5]. Тогда

$$S_{f1}(\omega) = S_{f10}; \quad S_{f2}(\omega) = \beta^2 S_{f10}; \quad S_x(\omega) = S_{x0} / [\omega^2 (1 + T_x^2 \omega^2)];$$

$$S_{x0} = \alpha^2 S_{f10},$$

откуда согласно (6), (7) получим: $a_{x0} = \alpha K_{f1}$; $b_{x1} = 1$; $b_{x2} = T_x$; $a_{x1} = b_{x0} = 0$; $K_{f2} = \beta K_{f1}$. Подставив коэффициенты в (19) — (22), найдем $\hat{R}_1(s)$, $\hat{R}_2(s)$ для последовательно-оптимальной двухканальной системы:

$$\hat{R}_1(s) \equiv B_1(s)/A_1(s) = \alpha (1 + \tau_1 s) / [s (1 + T_x s)]; \quad (23)$$

$$\hat{R}_2(s) = B_2(s)/A_2(s) = K_2 (1 + \tau_2 s) / [1 + (\tau_1 + \alpha^{-1}) s + (T_x / \alpha) s^2]. \quad (24)$$

Здесь $\tau_1 = \alpha^{-1} (\sqrt{1 + 2\alpha T_x} - 1)$; $K_2 = \beta^{-1} (\sqrt{2 + \beta^2} - \beta)$;

$$\tau_2 = (\alpha \beta K_2)^{-1} [\sqrt{\alpha^2 \tau_1^2 + 2\alpha \beta^2 (1 + K_2) T_x + \beta^2} - \beta (1 + \alpha \tau_1)].$$

Для численного расчета примем [5]: $S_{x0} = 0,05 \text{ рад}^2 \cdot \text{с}^{-1}$; $T_x = 10 \text{ с}$; $S_{f10} = 10^{-6} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$; $S_{f20} = 10^{-3} \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$; $\alpha = 223,6$; $\beta = 0,1$. На основании (23), (24) по формулам (12), (13), (15), (18) были вычислены дисперсии ошибок $\bar{\varepsilon}_1^2$, $\bar{\varepsilon}_2^2$ и рассчитан выигрыш в точности $G_2 = \bar{\varepsilon}_1^2 / \bar{\varepsilon}_2^2$ оптимальной двухканальной итерационной следящей системы по сравнению с одноканальной оптимальной системой. При этом среднеквадратические ошибки составляют: для одноканальной системы $\sqrt{\bar{\varepsilon}_1^2} = 9'$, для двухканальной $\sqrt{\bar{\varepsilon}_2^2} = 3'$. Зависимость G_2 от $\beta = \sqrt{S_{f20}/S_{f10}}$ имеет такой вид: $G_2|_{\beta=0,01} = 100,3$; $G_2|_{\beta=0,05} = 20,3$; $G_2|_{\beta=0,1} = 10,3$; $G_2|_{\beta=0,5} = 2,42$; $G_2|_{\beta=1,0} = 1,53$; $G_2|_{\beta=1,5} = 1,27$; $G_2|_{\beta=2,0} = 1,165$, что дает оценку эффективности оптимальных двухканальных итерационных систем.

Список литературы: 1. Осмоловский П. Ф. Итерационные многоканальные системы автоматического управления. М., 1969. 256 с. 2. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М.,

1960. 656 с. 3. *Астапов Ю. М., Медведев В. С.* Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. М., 1982. 304 с. 4. *Острем К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления: Пер. с англ. М., 1973. 322 с. 5. *Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р.* Теория следящих систем: Пер. с англ. М., 1951. 484 с.

Поступила в редколлегию 04.12.87

УДК 517.934

А. С. ПОНОМАРЕВ, канд. техн. наук

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ

Современные САУ объектами различной природы часто содержат звенья с переменными параметрами [1]. Примерами могут служить системы управления манипуляторами или системы управления и защиты ядерных энергетических установок, где выгорающий в процессе эксплуатации реактора поглотитель существенно меняет характеристики стержней регулирования. Если параметр изменяется по закону $\alpha - \beta_1 \cos \omega t$, то динамика системы описывается выражениями, сходными с уравнением Матье, но отличающимися от него константой в правой части:

$$\ddot{x} + (\alpha - \beta_1 \cos \omega t) x = \gamma. \quad (1)$$

Теория уравнения Матье хорошо изучена [2]. Энергетика систем с параметрическим возбуждением подробно рассмотрена, например, в [3]. Однако наличие правой части даже в форме постоянного возмущения затрудняет непосредственное применение известных результатов и заставляет искать новые подходы к исследованию уравнения (1).

Нами рассмотрен случай, когда $\beta_1 \ll \alpha$, т. е. амплитуда изменения параметра мала по сравнению с его номинальным значением. Это позволяет, вводя малый параметр ϵ , ($\beta_1 = \epsilon \beta$), привести уравнение (1) к квазилинейному виду $\ddot{x} + \alpha x = \gamma + \epsilon \beta x \cos \omega t$ (2). Опираясь на классический метод Боголюбова—Митропольского [4] и следуя Страбу и Флетчеру [5, с. 279], предложившим его вычислительную модификацию для решения задачи о движении искусственного спутника, представляем решение в виде асимптотического ряда

$$x = x_0(b, c) + \epsilon x_1(b, c) + \epsilon^2 x_2(b, c) + \dots, \quad (3)$$

сходимость которого определяется малостью параметра ϵ .

Нулевое приближение x_0 выбираем в форме решения порождающего уравнения (при $\epsilon = 0$):

$$x_0 = a + b \sin \lambda t + c \cos \lambda t, \quad (4)$$

где $a = \gamma/\alpha$, а $\lambda = \sqrt{\alpha}$ — характеристический показатель, совпадающий с собственной частотой порождающей системы. Коэффициенты b и c при этом будем считать не произвольными постоянными, а медленноменяющимися функциями времени, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям

$$\dot{b} = \epsilon B_1(b, c) + \epsilon^2 B_2(b, c) + \dots; \quad \dot{c} = \epsilon C_1(b, c) + \epsilon^2 C_2(b, c) + \dots \quad (5)$$

Задача теперь сводится к нахождению функций x_1 , B_1 , C_1 , x_2 , B_2 , C_2 , ... таким образом, чтобы решение (3) удовлетворяло с определенной степенью точности уравнению (2) всегда при b, c , удовлетворяющих условиям (5) с той же степенью точности, под которой будем понимать степень малого параметра ϵ .

Продифференцировав (3) дважды по времени с учетом (4) и (5), подставим значения x , \dot{x} в (2) и, приравняв выражения при одинаковых степенях ϵ в левой и правой частях полученного соотношения, сформируем совокупность

линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, определяющих последовательные приближения искомого решения.

Уравнение нулевого приближения совпадает с порождающей системой, а само приближение имеет вид (4). Для первого приближения получим

$$2\lambda (B_1 \cos \lambda t - C_1 \sin \lambda t) + \ddot{x}_1 + \alpha x_1 = \beta (a + b \sin \lambda t + c \cos \lambda t) \cos \omega t. \quad (6)$$

Перенесем первое слагаемое в правую часть и по известным формулам преобразуем произведение тригонометрических функций в суммы. Тогда возмущение в правой части выразится следующей суммой гармоник:

$$2\lambda (C_1 \sin \lambda t - B_1 \cos \lambda t) + \alpha \beta \cos \omega t + \frac{1}{2} \beta b (\sin (\lambda + \omega) t + \sin (\lambda - \omega) t) + \frac{1}{2} \beta c (\cos (\lambda + \omega) t + \cos (\lambda - \omega) t). \quad (7)$$

Решение уравнения первого приближения не должно содержать членов с $\sin \lambda t$ и $\cos \lambda t$, поскольку они уже учтены в нулевом приближении. Поэтому в силу линейности уравнения (6) общее его решение представляет собой линейную суперпозицию частных решений, соответствующих каждому слагаемому выражения (7). Здесь возможны три случая — отсутствие внутренних резонансов в системе и два различных резонанса: если $\omega = \lambda$ или $\omega = 2\lambda$.

Рассмотрим вначале случай отсутствия резонанса, при котором частота ω изменения параметра не совпадает с характеристическим числом λ и не равна его удвоенному значению. При этом условии периодичности функции x или (что то же) условием ограниченности решения уравнения (6) является выполнение равенств $B_1 = C_1 = 0$. Тогда из (5) следует, что с точностью до первого приближения величины b и c являются постоянными, т. е. постоянны амплитуда $A = \sqrt{b_0^2 + c_0^2}$ и фаза $\theta = \arctg(c_0/b_0)$ колебательного члена в x_0 . По начальным условиям $x_0(0) = x_{нач}$; $\dot{x}_0(0) = v_{нач}$ легко найти $c_0 = x_{нач} - a$; $b_0 = -v_{нач}/\lambda$. Это совпадает с результатами Блэкбера [5], полученными другим способом. С той же степенью точности решение представляет собой суперпозицию основной гармоники (4) и трех гармоник с амплитудами порядка ε :

$$x_1 = \varepsilon \beta / (2\omega) (2a\omega / (\lambda^2 - \omega^2) \cos \omega t - (b_0 \sin (\lambda + \omega) t + c_0 \cos (\lambda + \omega) t) / (2\lambda + \omega) + (b_0 \sin (\lambda - \omega) t + c_0 \cos (\lambda - \omega) t) / (2\lambda - \omega)). \quad (8)$$

В первом резонансном случае ($\omega = \lambda$), т. е. при близких значениях частоты изменения периодического коэффициента и характеристического числа λ , условием ограниченности решения является выполнение равенств $C_1 = 0$ и $-2\lambda B_1 + \alpha \beta = 0$. Подставляя найденную отсюда функцию B_1 в (5) и интегрируя уравнение $b = \alpha \beta / (2\lambda)$, получаем, что решение устойчиво при $\alpha \beta \gamma < 0$, неустойчиво при $\alpha \beta \gamma > 0$ и периодически при $\beta \gamma = 0$. Поскольку $\beta \neq 0$, справедливо утверждение, что в случае параметрического резонанса $\omega = \lambda$ наличие константы $\gamma \neq 0$ в правой части исключает возможность существования периодических решений x_1 . Система при этом может быть устойчивой, и ее выходной сигнал имеет форму x_0 с малыми колебаниями порядка ε , описываемыми вторым и третьим слагаемыми выражения (8). В этом состоит один из наиболее существенных результатов работы, принципиально отличный от ранее известных.

Во втором резонансном случае ($\omega = 2\lambda$) условие ограниченности решения сводится к выполнению равенств $4\lambda C_1 = \beta b$ и $4\lambda B_1 = \beta c$, с помощью которых уравнения (5) записываются так:

$$\dot{b} = \varepsilon \beta c / (4\lambda); \quad \dot{c} = \varepsilon \beta b / (4\lambda). \quad (9)$$

На плоскости (b, c) фазовые траектории полученной системы имеют вид равносоставленных гипербол с особой точкой типа «седло» в начале координат. Непосредственный анализ этой системы действительно показывает наличие у нее единственного, притом тривиального, стационарного решения $b_0 = c_0 = 0$. Впрочем, система (9) легко приводится к двум независимым дифференциальным уравнениям второго порядка

$$\ddot{b} = \beta^2 b / (16\lambda^2) = 0; \quad \ddot{c} = \beta^2 c / (16\lambda^2) = 0$$

с расходящимися решениями

$$b(t) = D_1 \operatorname{sh} \beta t / (4\lambda) + D_2 \operatorname{ch} \beta t / (4\lambda);$$

$$c(t) = E_1 \operatorname{sh} \beta t / (4\lambda) + E_2 \operatorname{ch} \beta t / (4\lambda).$$

Таким образом, динамика систем автоматического управления, описываемых уравнением (1), существенно зависит от характеристического числа λ , представляющего собой собственную частоту порождающей линейной системы. Особенность динамики — возможность появления одного из двух различных режимов с внутренними параметрическими резонансами. В случае $\omega = \lambda$ решение непосредственно связано с наличием константы γ в правой части, причем оно устойчиво, если $\operatorname{sgn} \beta \neq \operatorname{sgn} \gamma$. В случае же $\omega = 2\lambda$ решение неустойчиво всегда и параметрический резонанс приводит к раскачке системы.

Список литературы: 1. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами. Инженерные методы анализа и синтеза/Б. Н. Петров, Н. И. Соколов, А. В. Липатов и др. М., 1986. 256 с. 2. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972. 718 с. 3. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р. Основы теории колебаний. М., 1978. 392 с. 4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974. 503 с. 5. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем: Пер. с фр. М., 1969. 400 с.

Поступила в редколлегию 30.09.86

УДК 62-523

Э. А. ПИКУР, канд. техн. наук,

С. Д. ГЕРАСИМОВ, В. П. СЕВЕРИН, канд. техн. наук

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗОЛОТНИКА СЕРВОМОТОРА ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

В электрогидравлических системах регулирования мощных паровых турбин одним из элементов электрогидравлического сле-

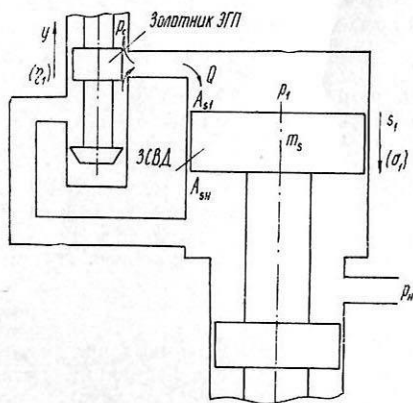


Рис. 1

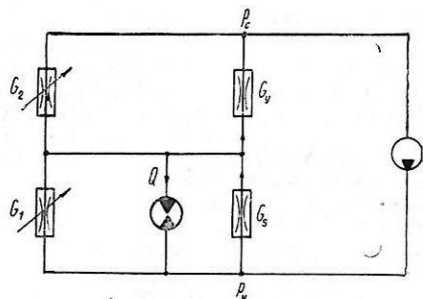


Рис. 2

дующего привода клапана высокого давления пара является золотник сервомотора высокого давления (ЗСВД), который служит для

усиления выходного сигнала электрогидравлического преобразователя (ЭГП) по мощности. Построим нелинейную и линейную математические модели ЗСВД.

Входным сигналом для ЗСВД является перемещение y золотника ЭГП, выходным сигналом — перемещение s_1 ЗСВД. Схема соединения двухдроссельного золотника ЭГП и ЗСВД показана на рис. 1. Вследствие больших сил давления жидкости, действующих на ЗСВД, силой тяжести и силами трения можно пренебречь. При этих допущениях уравнение движения ЗСВД дадим в виде $m_s s_1 = A_{s1} p_1 - A_{sн} p_n$ (1). Здесь m_s — масса ЗСВД и движущейся с ним жидкости; A_{s1} — площадь верхней поверхности дифференциального поршня, на которую действует давление жидкости p_1 (см. рис. 1); $A_{sн}$ — площадь нижней поверхности поршня, на которую действует давление p_n подаваемой насосом жидкости. Движение ЗСВД ограничено механическими упорами: $a_s < s_1 < b_s$ (2).

Гидравлическая цепь для ЗСВД представлена на рис. 2. Полагая режим течения жидкости в дросселях турбулентным, запишем уравнение расхода

$$Q = (G_1 + G_s) \sqrt{p_n - p_1} - (G_2 + G_y) \sqrt{p_1 - p_c} \quad (3)$$

где Q — расход жидкости для дифференциального поршня ЗСВД; G_1, G_2 — гидравлические проводимости управляемых золотниковых дросселей ЭГП; G_s — проводимость перетечек; G_y — проводимость утечек; p_c — давление жидкости на сливе. Гидравлические проводимости для идеальных золотниковых дросселей ЭГП без учета радиального зазора и перекрытия определяются по формулам

$$G_1 = \begin{cases} k_G y, & y \geq 0; \\ 0, & y < 0; \end{cases} \quad G_2 = \begin{cases} 0 & y \geq 0; \\ -k_G y, & y < 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$k_G = \mu_G b_{s0} \sqrt{2/\rho_{ж}} \quad (5)$$

Здесь μ_G — коэффициент расхода дросселирующего окна; b_{s0} — ширина окна; $\rho_{ж}$ — плотность жидкости. Учитывая, что $p_c = 0$; $A_{1s} = 2A_{sн}$, на основании уравнений (1), (3), (4) для положения равновесия $y = 0$; $Q = 0$; $s_1 = 0$ получаем $p_{10} = p_n/2$; $G_s = G_n$. Переходя к приращению давления $\Delta p_1 = p_1 - p_{10}$, уравнение (1) переписываем в виде $m_s s_1 = A_{s1} \Delta p_1$ (6). Ограничение давления $0 \leq p_1 \leq p_n$ влечет за собой ограничение приращения: $-p_n/2 \leq \Delta p_1 \leq p_n/2$ (7). Разложим нелинейное уравнение расхода (3) с учетом выражений (4) в ряд Тейлора по переменным y и Δp_1 вблизи положения равновесия, ограничившись при этом лишь членами первого порядка малости. После алгебраических преобразований получим линеаризованное уравнение $Q = k_{Qy} y - k_{Qp} \Delta p_1$ (8), где коэффициенты линеаризации вычислим по формулам $k_{Qy} = -k_G \sqrt{p_n/2}$; $k_{Qp} = G_s \sqrt{2/p_n}$ (9). Для построения нелинейной модели ЗСВД найдем Δp_1 из формулы (8): $\Delta p_1 = k_{py} y - k_{pQ} Q$ (10), где

$k_{py} = k_{Qy}/k_{Qp}$; $k_{pQ} = 1/k_{Qp}$ (11). Переходя к безразмерным координатам $\eta_1 = y/y_M$; $\sigma_1 = s_1/s_M$ (12), где y_M, s_M — выбранные масштабы координат, используя выражения (2), (5)–(7), (9)–(12), формируем нелинейную модель ЗСВД в алгоритмическом виде.

Нелинейная модель ЗСВД

1. Задать исходные параметры: $A_{s1}, b_{s0}, \mu_G, G_s, \rho_{ж}, m_s, y_M, s_M, p_H, a_\sigma, b_\sigma$.

2. Определить вспомогательные параметры:

$$k_{p\eta} = y_M \mu_G b_{s0} p_H / (G_s \sqrt{2\rho_{ж}}); \quad k_{pv} = s_M A_{s1} \sqrt{0,5 p_H} G_s;$$

$$b_p = 0,5 p_H; \quad a_p = -b_p; \quad k_{\sigma T} = 1/(m_s s_M).$$

3. Задать начальные условия: $\sigma_1(0) = 0$; $\dot{\sigma}_1(0) = 0$.

4. Сформировать дифференциальные уравнения:

$$a_\sigma \leq \sigma_1 \leq b_\sigma; \quad p_s = k_{p\eta} \eta_1 - k_{pv} \dot{\sigma}_1; \quad a_p \leq p_s \leq b_p; \quad \ddot{\sigma}_1 = k_{\sigma T} p_s.$$

Нелинейная модель ЗСВД учитывает ограничение давления жидкости и наличие механических упоров ЗСВД.

С учетом сжимаемости жидкости [1] $Q = A_{s1} \dot{s}_1 + \sigma_s \Delta p_1$ (13), где σ_s зависит от упругих свойств жидкости, заполняющей полости ЗСВД и смежные трубопроводы [2]. Преобразуя линейные уравнения (6), (8), (13) по Лапласу и решая их совместно, находим передаточную функцию ЗСВД:

$$W_s(s) = s_1(s)/y(s) = A_{s1} k_{Qy} / [A_{s1}^2 s + m_s s^2 (k_{Qp} + \sigma_s s)]. \quad (14)$$

Эта передаточная функция имеет третий порядок. Если сжимаемостью жидкости пренебречь, взяв $\sigma_s = 0$, то получим передаточную функцию второго порядка. Принимая гипотезу о несжимаемости жидкости, переходя к относительным координатам (12) и учитывая выражения (5), (9), (14), определяем передаточную функцию для линейной модели ЗСВД: $W_\sigma(s) = \sigma_1(s)/\eta_1(s) = 1/[T_\sigma s(1 + T_{\sigma 1} s)]$ (15), где

$$T_\sigma = s_M A_{s1} \sqrt{\rho_{ж}/p_H} / (y_M \mu_G b_{s0}); \quad T_{\sigma 1} = m_s G_s / (A_{s1}^2 \sqrt{0,5 p_H}). \quad (16)$$

С учетом выражений (15), (16) представим линейную модель ЗСВД в алгоритмическом виде.

Линейная модель ЗСВД

1. Задать исходные параметры: $A_{s1}, b_{s0}, \mu_G, G_s, \rho_{ж}, m_s, y_M, s_M, p_H$.

2. Определить вспомогательные параметры:

$$T_\sigma = s_M A_{s1} \sqrt{\rho_{ж}/p_H} / (y_M \mu_G b_{s0}); \quad T_{\sigma 1} = m_s G_s / (A_{s1}^2 \sqrt{0,5 p_H}), \quad T_{\sigma 2} = T_\sigma T_{\sigma 1}.$$

3. Сформировать передаточную функцию $W_\sigma(s) = 1/(T_\sigma s + T_{\sigma 2} s^2)$.

Итак, построены нелинейная и линейная модели ЗСВД, включающие в себя ряд конструктивных параметров.

Список литературы: 1. Гамынин Н. С. Гидравлический привод систем управления. М., 1972. 376 с. 2. Электрогидравлические следящие системы/Под ред. В. А. Хохлова. М., 1971. 432 с.

Поступила в редколлегию 01.11.87

УДК 62.501

*А. И. БЕЛОВ, канд. техн. наук,
А. Н. СЕДОВ, О. В. СОЛЯНИК*

ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ИНЕРЦИАЛЬНОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

На этапе проектирования информационно-измерительных систем летательного аппарата (ЛА), содержащих гироскопические измерители угловой скорости, осуществляются анализ динамических свойств этих систем, синтез оптимальных или субоптимальных фильтров для инерциальных измерителей, разрабатываются методы калибровки и юстировки измерителей в условиях эксплуатации на борту. Выполнение таких работ связано прежде всего с созданием математической модели гироскопического измерителя, которое само по себе является весьма ответственным этапом проектирования, определяющим точность задания динамических характеристик и эффективность алгоритмов обработки измерительной информации.

Обычно динамическая модель инерциального измерителя базируется на уравнениях Эйлера, описывающих вращение твердого тела около неподвижной точки [1]. Получаемая в результате математическая модель в общем случае довольно сложна и значительно затрудняет описание статистических характеристик, а значит, усложняет алгоритмы фильтрации, делает их недостаточно эффективными. Особенно громоздка динамическая модель гироскопического измерителя с дискретным выходом. Следует отметить, что в ряде задач, таких, как калибровка, юстировка, фильтрация, динамические характеристики практически не используются. Для указанных задач более важны именно статистические характеристики измерителя. Это свидетельствует о необходимости разработки статистической модели измерителя применительно к перечисленным задачам.

В предлагаемой модели гироскопический измеритель (ГИ) жестко связан с ЛА, движение которого рассматривается как движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Пусть мгновенное значение вектора угловой скорости движения ЛА равно ω , тогда $(\omega t) = M(t)/J = \bar{B}(t)$ (1), где \bar{M} — момент внешних сил; J — момент инерции ЛА относительно оси вращения; \bar{B} — век-

тор углового ускорения. Поскольку выходной сигнал ГИ пропорционален проекции $\bar{\omega}(t)$ на чувствительную ось, уравнение (1) целесообразно записать в проекциях на эту ось: $\omega_n(t) = b(t)$ (2). Здесь $\omega_n(t)$ — проекция $\bar{\omega}(t)$ на ось ГИ; $b(t)$ — проекция $B(t)$ на эту же ось.

В реальной ситуации $\bar{B}(t)$ представляет собой аддитивную смесь вектора программного ускорения и вектора шума внешних воздействий, что дает основание считать $b(t)$ суммой проекций этих векторов (соответственно $b_n(t)$ и $\beta(t)$): $b(t) = b_n(t) + \beta(t)$. В перечисленных выше задачах обычно $b_n(t)$ — кусочно-постоянная функция. В дальнейшем уравнение (2) рассматривается лишь на интервале постоянства $b_n(t)$, т. е. когда $b_n(t) = \text{const} = b_0$. В этом случае $\omega_n(t) = b_0 + \beta(t)$ (3).

Рассматривая ГИ с дискретным выходом, уравнение (3) целесообразно представить в конечно-разностной форме. Введем достаточно малый шаг дискретизации времени, который обозначим через T . В дальнейшем под временем t_k понимаем интервал времени kT , отсчитываемый от $t_0 = 0$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\omega_n(t_k) - \omega_n(t_{k-1}) = b_0 T + \beta(t_{k-1}) T. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что $\beta(t)$ на интервале $[t_{k-1}, t_k)$ — постоянная величина, равная $\beta(t_{k-1})$. Если ввести обозначения $\omega_i = \omega_n(t_i)$; $\beta_i = \beta(t_i)$, то (4) преобразуется: $\omega_k - \omega_{k-1} = b_0 T + \beta_{k-1} T$ (5).

Выходная информация ГИ формируется в виде импульсов, число которых n_k в k -й период дискретизации пропорционально кающемуся углу поворота вокруг оси чувствительности ГИ за период дискретизации T : $n_k = \omega_{k, \text{ср}} T / \gamma$, где $\omega_{k, \text{ср}}$ — среднее значение проекции $\bar{\omega}(t)$ на ось ГИ на интервале времени $[t_{k-1}, t_k]$; γ — цена импульса.

Пренебрегая малыми величинами, значение $\omega_{k, \text{ср}}$ можно определить как среднее арифметическое за период: $\omega_{k, \text{ср}} = (\omega_{k-1} + \omega_k) / 2$. Тогда $n_k = (\omega_{k-1} + \omega_k) T / (2\gamma)$ (6). С учетом (6) уравнение (5) запишем так: $\omega_k + \omega_{k-1} = \omega_{k-1} + b_0 T + \beta_{k-1} T + \omega_{k-2} + b_0 T + \beta_{k-2} T$, или $n_k = n_{k-1} + b_0 T^2 / \gamma + (\beta_{k-2} + \beta_{k-1}) T^2 / (2\gamma)$ (7). Введем следующие обозначения: $u_0 = b_0 T^2 / \gamma$; $w_k = (\beta_{k-1} + \beta_k) T^2 / (2\gamma)$ (8). Теперь (7) примет окончательный вид $n_k = n_{k-1} + u_0 + w_{k-1}$ (9). Корреляционная матрица входного шума w_k совпадает с его дисперсией:

$$Q_k = M [w_k^2] = \frac{T^4}{4\gamma^2} M [(\beta_k + \beta_{k-1})^2].$$

Выходной вектор ГИ y_k представляется аддитивной смесью целой части n_k и шума измерений: $y_k = \text{ent}\{n_k\} + v_k$. Корреляционная матрица измерительного шума также совпадает с его дисперсией: $R_k = M [v_k^2]$.

Для полного статистического описания ГИ помимо Q_k и R_k необходимо задать математическое ожидание ω_k и v_k , взаимную и автокорреляционные функции. В прикладных задачах параметры $M_w = M[\omega_k]$; $M_v = M[v_k]$; $M[\omega_i \omega_j]$; $M[\omega_i v_j]$ (10) обычно равны нулю. Однако автокорреляционная функция $M[v_i v_j]$ (11) для ГИ отлична от нуля, поскольку природа измерительного шума такова, что он может накапливаться только до определенного значения (т. е. существует v_{\max}) и соседние значения измерительного шума сильно коррелированы. Поэтому использование статистической модели ГИ в виде (9)—(11) затруднительно из-за осложнений в определении (11).

Более рациональную модель ГИ можно получить, интегрируя (3) на интервале постоянства $b_n(t)$. Прежде всего проинтегрируем (3) на интервале $[(k-1)T, t]$:

$$\int_{(k-1)T}^t \dot{\omega}_n(\tau) d\tau = \omega_n(t) - \omega_{k-1} = \int_{(k-1)T}^t [b_0 + \beta(\tau)] d\tau = \\ = b_0 [t - (k-1)T] + \beta(t)t - \beta_{k-1}(k-1)T.$$

В случае, когда $t \leq kT$, т. е. когда интервал интегрирования лежит в пределах периода дискретизации, функция $\beta(t)$, как уже было оговорено, постоянна и равна своему значению в начале интервала, т. е.

$$\omega_n(t) = \omega_{k-1} + b_0 [t - (k-1)T] + \beta_{k-1} [t - (k-1)T]. \quad (12)$$

Кажущийся угол поворота определяется как интеграл от проекции $\dot{\omega}(t)$ на ось ГИ: $\dot{\varphi}(t) = \dot{\omega}_n(t)$ (13). Интегрируя (13) на интервале дискретизации, с учетом (11), имеем

$$\int_{(k-1)T}^{kT} \dot{\varphi}(\tau) d\tau = \varphi_k - \varphi_{k-1} = \int_{(k-1)T}^{kT} \omega_n(\tau) d\tau = \\ = \int_{(k-1)T}^{kT} \{ \omega_{k-1} + b_0 [\tau - (k-1)T] + \beta_{k-1} [\tau - (k-1)T] \} d\tau,$$

$$\text{или} \quad \varphi_k = \varphi_{k-1} + \omega_{k-1}T + b_0 T^2/2 + \beta_{k-1} T^2/2. \quad (14)$$

Если учесть, что $\omega_{k-1}T/2 = \omega_{k-2}T/2 + b_0 T^2/2 + \beta_{k-2}/2$, как это следует из (5), то (14) можно дать в виде

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \left(\frac{\omega_{k-1} + \omega_{k-2}}{2} T + b_0 \frac{T^2}{2} + \beta_{k-2} \frac{T^2}{2} \right) + b_0 \frac{T^2}{2} + \\ + \beta_{k-1} \frac{T^2}{2}. \quad (15)$$

Разделив левую и правую части (14) на γ и используя обозначение $N_i = \varphi_i/\gamma$, получим:

$$N_k = N_{k-1} + n_{k-1} + b_0 \frac{T^2}{\gamma} + \frac{\beta_{k-1} + \beta_{k-2}}{2} \frac{T^2}{\gamma}. \quad (16)$$

С учетом (8) и (9) логично записать:

$$N_k = N_{k-1} + n_{k-1} + u_0 + w_{k-1}; \quad n_k = n_{k-1} + u_0 + w_{k-1}.$$

Нетрудно видеть, что N_k — суммарное число импульсов на выходе ГИ на интервале времени $[0, kT]$. Выходной вектор ГИ теперь имеет вид $Y_k = \text{ent}\{N_k\} + v_k$. Значит, в случае, когда измерительный шум «белый» с нулевым математическим ожиданием, автокорреляционная функция $M[v_i v_j] = 0$ ($i \neq j$), так как v_i и v_j ($i \neq j$) не коррелированы.

Окончательно информационная модель ГИ примет вид

$$N_k = N_{k-1} + n_{k-1} + u_0 + w_{k-1}; \quad n_k = n_{k-1} + u_0 + w_{k-1};$$

$$Y_k = \text{ent}\{N_k\} + v_k; \quad R_k = M[v_k^2];$$

$$Q_k = M[w_k^2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M[w_k^2] = \frac{T^4}{4\gamma^2} \{M[\beta_k^2] + 2M[\beta_k \beta_{k-1}] + M[\beta_{k-1}^2]\}.$$

Если w_k и v_k — стационарный «белый» шум с нулевым математическим ожиданием, справедливы соотношения

$$M[w_k] = 0; \quad M[v_k] = 0; \quad \overline{w_k} = [w_k w_k]^T; \quad M[v_i w_j^T] = 0;$$

$$M[w_i w_j^T] = 0; \quad M[v_i v_j] = 0 \quad (i \neq j);$$

$$M[v_k^2] = \text{const} = D_v - \text{дисперсия } v;$$

$$M[\beta_k^2] = \text{const} = D_\beta - \text{дисперсия } \beta.$$

Теперь

$$Q_k = Q = \frac{T^4 D_\beta}{2\gamma^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_k = R = D_v.$$

В этом случае стационарность матриц Q и R позволяет заранее определить коэффициент усиления оптимального фильтра [2].

Список литературы: 1. Павлов В. А. Авиационные гироскопические приборы. М., 1954. 412 с. 2. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М., 1982. 216 с.

Поступила в редколлегию 03.11.87

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АВТОМАТИЧЕСКОЙ
КЛАССИФИКАЦИИ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ГРУПП
СХОДНЫХ ДЕТАЛЕЙ ПРИ ВЫБОРЕ ЗАХВАТНЫХ
УСТРОЙСТВ ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ**

При проектировании робототехнических комплексов выбор числа и вариантов исполнения захватных устройств промышленных роботов является актуальной задачей. Ее решение до настоящего времени не формализовано и вызывает затруднения, особенно при перспективной замене объектов манипулирования в условиях гибкого производственного процесса. Указанное имеет все более существенное значение для ряда отраслей техники с многономенклатурным производством изделий, например приборо- и аппаратостроения, где характерно и большое разнообразие комплектующих деталей. Так, исполнения только одного класса отключающего автоматического выключателя насчитывают свыше 2000 деталей. Создание универсального захватного устройства невозможно ввиду существенных различий деталей в размерах, конфигурации, свойствах материала, виде последующей обработки и т. д. В то же время целесообразно проектирование захватных устройств для одной конкретной детали (или малой группы) и каждого вида обработки. Поэтому необходимо выделить классы однотипных деталей, чтобы получить информацию в целях проектирования захватных устройств для данных классов.

Пусть захватные устройства предполагается использовать для переноса m деталей, характеризующихся N признаками, и в робототехническом комплексе планируется применить K различных захватных устройств. Тогда для проектирования захватных устройств совокупность деталей должна быть представлена в виде K классов, таких, чтобы степень сходства деталей внутри классов была максимальной.

Образует множество $S = \{a_j | a_j = j, j = \overline{1, m}\}$ из всех деталей и введем показатель степени сходства $\rho(a_i, a_j)$ между деталями, обладающий следующими свойствами: $\rho(a_i, a_j) = 1$ при абсолютном сходстве деталей a_i и a_j по заданной системе признаков; $\rho(a_i, a_j) = 0$ для наименее сходных деталей из данного множества.

Обычно рассматривают три типа признаков: количественные, номинальные и порядковые [1]. Количественные признаки (масса, размер и т. п.) выражаются числовыми значениями, и их можно измерить с помощью определенных единиц измерения. Номинальные и порядковые признаки не имеют количественного выражения и различаются по содержанию. При этом значения порядковых признаков упорядочены в соответствии с некоторым правилом (например, признак «магнитные свойства материала» может иметь значения «неферромагнитный», «с ослабленными магнитными

свойствами», «ферромагнитный»), а значения номинальных признаков не упорядочены (например, «цель переноса» может содержать значения «для гибки», «для вырубки», «для зенкования»).

Пусть детали характеризуются количественными ($N_{\text{кол}}$), номинальными ($N_{\text{ном}}$) и порядковыми ($N_{\text{пор}}$) признаками, причем $N = N_{\text{кол}} + N_{\text{ном}} + N_{\text{пор}}$. В качестве показателя степени сходства деталей по количественным признакам предлагается использовать величину

$$\rho_{\text{кол}}(a_r, a_q) = 1 - d^2(a_r, a_q)/d_{\text{макс}}^2,$$

где $d^2(a_r, a_q)$ — квадрат евклидова расстояния между деталями a_r и a_q ,

$$d^2(a_r, a_q) = \sum_{i=1}^{N_{\text{кол}}} (x_{ri} - x_{qi})^2; \quad d_{\text{макс}}^2 = \max_{r, q=1, \dots, m} d^2(a_r, a_q).$$

Здесь x_{ri} , x_{qi} — значения i -го признака, зафиксированные для деталей a_r и a_q (предполагается, что все количественные признаки нормированы).

Обозначая через ν_{rq} число совпадений значений номинальных признаков у деталей a_r , a_q , приходим к следующему показателю степени сходства деталей по номинальным признакам:

$$\rho_{\text{ном}}(a_r, a_q) = \nu_{rq}/N_{\text{ном}}.$$

Для порядковых признаков построение формулы показателя степени сходства деталей $\rho_{\text{пор}}(a_r, a_q)$ может осуществляться любым из двух описанных способов либо в виде некоторой комбинации из показателей степени сходства по количественным и номинальным признакам.

В предположении одинаковой значимости всех признаков для оценки степени сходства, значимость оценок степени сходства по $N_{\text{кол}}$, $N_{\text{ном}}$ и $N_{\text{пор}}$ признакам в суммарной оценке степени сходства деталей устанавливается весовыми коэффициентами $N_{\text{кол}}/N$, $N_{\text{ном}}/N$, $N_{\text{пор}}/N$. В результате получаем показатель

$$\rho(a_r, a_q) = (N_{\text{кол}}\rho_{\text{кол}}(a_r, a_q) + N_{\text{ном}}\rho_{\text{ном}}(a_r, a_q) + N_{\text{пор}}\rho_{\text{пор}}(a_r, a_q))/N,$$

обладающий сформулированными выше свойствами.

Пусть множество деталей S представлено в виде K подмножеств S_k . Введем понятие типовой детали подмножества (класса). В качестве типовой детали $a_{l_k}^*$ подмножества S_k рассмотрим такую деталь $a_{l_k}^* \in S_k$, суммарная степень сходства которой с остальными деталями подмножества максимальна:

$$\sum_{a_j \in S_k} \rho(a_j, a_{l_k}^*) = \max_{a_l \in S_k} \sum_{a_j \in S_k} \rho(a_j, a_l).$$

Тогда задача классификации деталей формулируется следующим образом: найти разбиение $S = \{S_k | k = \overline{1, K}\}$ множества деталей $S = \{a_j | a_j = j, j = \overline{1, m}\}$ и перечень типовых деталей $C = \{a_{l_k}^* | k = \overline{1, K}\}$ подмножеств, которые обеспечивают максимум функции качества

$$F = \sum_{k=1}^K \sum_{a_j \in S_k} \rho(a_j, a_{l_k}^*).$$

Поскольку эта задача совпадает с задачей, сформулированной в работе [2], можно применить предложенный в указанной работе метод локальной оптимизации. В данном случае отыскание решения задачи сводится к уточнению разбиения по сочетаниям типовых деталей.

С помощью названного метода решена задача классификации 55 деталей холодноштамповочного производства (для низковольтной аппаратуры), характеризующихся следующими признаками: цель переноса (номинальный признак с тремя значениями), масса детали (количественный признак), магнитные свойства материала (порядковый признак с тремя значениями), толщина, ширина и длина детали (количественные признаки). Разделение деталей произведено с использованием для порядкового признака формулы показателя степени сходства по номинальным признакам. В результате получены следующие классы.

Класс 1 представлен 1 деталью с большой толщиной и пониженными магнитными свойствами. Для ее переноса целесообразно использовать бронеовое захватное устройство.

Класс 2 содержит 11 наименований, или все стальные детали, цель переноса которых — гибка. Детали этого класса должны перемещаться с помощью бронеового захватного устройства.

Класс 3 образуют 18 стальных деталей с небольшой массой, переносимых для вырубki. Доставку таких деталей требуется осуществлять бронеовым захватным устройством.

Класс 4 состоит из 5 деталей с малой толщиной и пониженными магнитными свойствами. Их следует переносить захватным устройством косвенного действия.

Класс 5 сформирован из 14 деталей. В него вошли все детали с высокими ферромагнитными свойствами, цель переноса которых — зенкование, а также стальные детали с максимальной массой. В данном случае необходимо применять пинцетное захватное устройство.

Класс 6 включает в себя все 6 деталей, изготовленных из неферромагнитных материалов. Их нужно перемещать пинцетным захватным устройством.

Типовые детали, выделенные алгоритмом, обобщают характерные черты всех деталей соответствующих классов. Поэтому характеристики типовых деталей должны учитываться в первую очередь при проектировании захватных устройств для каждого класса.

Список литературы: 1. Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В. Классификация многомерных наблюдений. М., 1974. 210 с. 2. Безменов Н. И., Костенко Ю. Т., Мальх О. Н. Итерационный алгоритм построения разбиения множества параметров на основе информационного показателя степени связи//Кибернетика. 1986. № 1. С. 88—91.

Поступила в редколлегию 02.12.87

СИСТЕМНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗВИТИЯ КОМПЛЕКСА ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

При решении многих задач, связанных с моделированием развивающихся систем, становится недостаточным использование моделей математического программирования с фиксированными параметрами. Возникает проблема определения не только неизвестных переменных, но и отдельных параметров модели. Такие задачи получили название задач системной оптимизации [1]. Рассмотрим применение идеологии системной оптимизации к решению задачи развития комплекса технических средств (КТС) гражданской авиации (ГА) при плановом периоде 10...15 лет, используя терминологию работы [2].

Выделим следующие функциональные подсистемы КТС ГА, состояние которых на начало планового периода T определяет исходную область допустимых решений D_0 : парк воздушных судов (ВС); управление воздушным движением (УВД) на звеньях сети авиалиний; КТС по обслуживанию потоков пассажиров в аэропорту; КТС по обслуживанию потоков ВС в аэропорту. В рамках четвертой функциональной подсистемы отметим две самостоятельные задачи — реконструкции технических средств под новые типы парка ВС и реконструкции технических средств для обеспечения оптимальной пропускной способности аэропорта.

Исходную директивную область D_0^d определяем, используя следующие два показателя: выполнение прогнозируемого объема работ по перевозке пассажиров в целях удовлетворения общественных потребностей в данном виде транспорта; обеспечение минимальной интенсивности движения ВС на заданных звеньях сети авиалиний.

Введем ряд обозначений, применяемых в модели задачи: G'_1 , G'_2 — множества авиакорреспонденций, не подлежащих и подлежащих маршрутизации в t -м году; θ'_l — множество маршрутов, через которые может быть осуществлена маршрутизация l -й авиакорреспонденции; P'_i — прогнозируемый поток пассажиров; ξ'_{ia} — поток пассажиров с l -й маршрутизируемой авиакорреспонденции на a -м маршруте; z'_{ij} — количество ВС i -го типа, эксплуатируемых на j -м звене сети авиалиний; v'_{ij} — среднегодовая частота движения i -го типа ВС на j -м звене; L_j — протяженность j -го звена; α'_{ij} — годовая производительность i -го типа ВС на j -м звене; N^n_j — нижнее ограничение по частоте движения ВС на j -м звене; N_i — множество звеньев сети авиалиний, на которых может эксплуатироваться i -й тип ВС; n'_i — количество ВС i -го типа в t -м году; I^t — множество типов ВС, эксплуатируемых в t -м году;

I_j^t — множество типов ВС, для которых допускается эксплуатация на j -м звене; B — некоторое большое число; I_k — множество звеньев k -го узла (аэропорта); R_j^t — множество авиакорреспонденций, маршрутизация которых может быть осуществлена через j -е звено; R_l^t — множество вариантов маршрутизации l -й авиакорреспонденции, проходящих через j -е звено; $\hat{\sigma}_{ij}^t$ — максимальная часовая интенсивность движения ВС i -го типа на j -м звене; $\check{\sigma}_j^t$ — величина, определяемая произведением коэффициентов суточной и часовой неравномерности потока пассажиров на j -м звене; $\hat{\lambda}_{\max}^{kt}$, $\check{\lambda}_{\max}^{kt}$ — верхние границы по интенсивности движения ВС и потоку пассажиров в k -м аэропорту; M — множество аэропортов; $\hat{\gamma}_{\max}^{jt}$ — верхняя граница по интенсивности движения ВС на j -м звене, определяемая исходным состоянием технических средств УВД.

Если не используются дополнительные ресурсы, критерием достижения указанных целей (показателей) являются эксплуатационные расходы на обслуживание парка ВС и наземного КТС. Распределительная задача формулируется в следующем виде: найти

$$\min_{\xi, z} \sum_{t=1}^T \sum_{j \in G^t} \sum_{i \in I_j^t} C_{ij}^t z_{ij}^t (1 + E_{\text{н.п}})^{-t} \quad (1)$$

при условиях

$$D_0^d = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in \Theta_l} \xi_{la}^t = P_l^t, \quad \forall l \in G_2^t; \\ \xi, Z: \sum_{i \in I_j^t} \alpha_{ij}^t Z_{ij}^t \geq N_l^n, \quad \forall l \in G_2^t; \\ \sum_{i \in R_j^t} \sum_{a \in R_{ij}^t} L_j \xi_{la}^t = \sum_{i \in I_j^t} \alpha_{ij}^t Z_{ij}^t, \quad \forall j \in G^t; \end{array} \right. \quad (2)$$

$$D_0 = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in N_i} Z_{ij}^t \leq n_i^t, \quad \forall i \in I^t; \\ Z_{ij}^t \leq Y_{ij} \cdot Y_{ij} = \begin{cases} B \\ 0 \end{cases}, \quad \forall i \in I^t, j \in G^t; \\ \xi, Z: \sum_{i \in J_k} \sum_{i \in I_j^t} \hat{\sigma}_{ij}^t Z_{ij}^t \leq \hat{\lambda}_{\max}^{kt}, \quad \forall k \in M; \\ \sum_{i \in J_k} \sum_{i \in R_j^t} \sum_{a \in R_{ij}^t} \check{\sigma}_j^t \xi_{la}^t \leq \check{\lambda}_{\max}^{kt}, \quad \forall k \in M; \\ \sum_{i \in I^t} \hat{\sigma}_{ij}^t Z_{ij}^t \leq \hat{\gamma}_{\max}^{jt}, \quad \forall j \in G^t; \\ Z_{ij}^t \geq 0, \quad \xi_{ij}^t \geq 0, \quad \forall i, j. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь C_{ij}^t — эксплуатационные расходы на i -й тип ВС в t -м году на j -м звене, одна из составляющих которых — эксплуатационные расходы на наземные технические средства; $G^t = G_1^t \cup G_2^t$; $t = \overline{1, T}$.

В том случае, если $D_0^d \cap D_0 = \emptyset$, возникает задача развития КТС ГА, которая, исходя из условий системной оптимизации, состоит в варьировании параметров $n_i^t, Y_{ij}, \hat{\lambda}_{\max}^{kt}, \check{\lambda}_{\max}^{kt}, \gamma_{\max}^{jt}$ в пределах выделенных ресурсов с целью обеспечить совместность области допустимых решений и директивной области на основе критерия приведенных затрат. Если ресурсов недостаточно, предлагается строить лексикографическую задачу оптимизации относительно D_0^r и D_0^d . Для этого из D_0 и D_0^d формируются расширенные области D_0^r и D_0^{dr} путем введения новых переменных, определяющих варьирование правых частей ограничений. На эти переменные накладываются ограничения, обуславливаемые ресурсами и допустимыми пределами изменения параметров директивных показателей. Построение области D_1^d осуществляется на основе критериев минимизации отклонения от целей, поставленных директивно на начальном этапе.

В качестве примера рассмотрим частный случай задачи при следующих условиях: область D_0 определяется только ограничениями на парк ВС; на каждом звене сети авиалиний заданы объемы работ \hat{W}_j^t ; критерием построения области D_1^d является отклонение выполненного объема работ от заданного. Тогда лексикографическая двухкритериальная задача системной оптимизации записывается в следующем виде:

$$\text{lex min}_{\mu, z} \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{j \in G^t} (\hat{W}_j^t - \sum_{i \in I_j^t} \alpha_{ij}^t Z_{ij}^t); \right. \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i \in G_j^t} \sum_{i \in I_j^t} C_{ij}^t Z_{ij}^t + \sum_{i \in I_j^t} \Pi_i^t \mu_i^t \right) (1 + E_{n,n})^{-t}; \\ & \sum_{i \in I_j^t} v_{ii}^t Z_{ii}^t \geq N_i^n, \quad \forall i \in G_2^t; \\ & Z: \check{W}_j^t \leq \sum_{i \in I_j^t} \alpha_{ij}^t Z_{ij}^t \leq \hat{W}_j^t, \quad \forall j \in G^t; \\ & Z_{ik}^t \geq 0, \quad \forall i, k, t = \overline{1, T}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$D_0^r = \left\{ \mu, Z: \begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \sum_{i \in I^t} \Pi_i^t \mu_i^t \leq K_\tau, \quad \forall \tau = \overline{1, T}; \\ & \check{\mu}_i^t \leq \mu_i^t \leq \hat{\mu}_i^t, \quad \forall i \in I^t, t = \overline{1, T}; \\ & \sum_{i \in I^t} q_i H_i^t (n_i^t + \sum_{\tau=1}^{t-1} \mu_i^\tau + \delta_1 \mu_i^t) \leq Q^t, \quad \forall t = \overline{1, T}; \\ & \sum_{j \in N_i} Z_{ij}^t \leq n_i^t + \sum_{\tau=1}^{t-1} \mu_i^\tau + \delta_1 \mu_i^t, \quad \forall i \in I^t, t = \overline{1, T}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где \hat{W}_j^t — нижнее ограничение по объему работ на j -м звене; Π_i^t — цена i -го типа ВС; μ_i^t — поставки i -го типа ВС; $\check{\mu}_i^t, \hat{\mu}_i^t$ — нижнее и верхнее ограничения по поставкам i -го типа ВС; K_τ — ограничения на капитальные вложения; q_i — среднечасовой расход топлива i -м типом ВС; Q^t — лимит по топливу; H_i^t — среднегодовой налет i -го типа ВС; δ_1 — коэффициент приведения поставок к среднесписочному парку ВС в течение t -го года.

Задача (4) — (6) имеет блочно-диагональную структуру ограничений. Первый блок определяется переменными Z_{ij}^t , а второй — μ_i^t . Для ее решения могут быть использованы различные методы декомпозиции [3]: процедура расчленения Розена, параметрическая декомпозиция с использованием идеи релаксации ограничений.

Список литературы: 1. Глушков В. М. О системной оптимизации//Кибернетика. 1980. № 5. С. 88—90. 2. Волкович В. Л., Доленко Г. А. Системная оптимизация в многокритериальных задачах линейного программирования относительно заданной директивной области//Исследование задач многокритериальной оптимизации. К., 1984. С. 3—13. 3. Лэддон Л. С. Оптимизация больших систем: Пер. с англ. М., 1975. 432 с.

Поступила в редколлегию 17.10.87

УДК 685:519

Н. П. ЧЕРНЫШЕВА

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СИСТЕМНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ СЕТИ АЭРОДРОМНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Все более актуальными становятся вопросы моделирования развивающихся систем на основе схем системной оптимизации [1]. В работе [2] дана постановка задачи развития комплекса технических средств гражданской авиации (КТС ГА) в соответствии с идеологией системной оптимизации. Одной из подзадач развития КТС ГА является задача реконструкции сети аэродромных комплексов (АДК) под новые типы воздушных судов (ВС). Рассмотрим постановку этой задачи. В работе [2] описано построение области допустимых решений D_0 для задачи развития КТС ГА. Исследуем частный случай, соответствующий нашей постановке с учетом ограничений на структуру парка ВС в плановом периоде T . Тогда D_0 можно описать следующим образом:

$$D_0 = \left\{ \bar{Z}: \begin{array}{l} z_{ij}^t \leq Y_{ij} \cdot Y_{ij} \in (Y_{ij}) = \{B, 0\}, \forall i \in I^t, j \in G^t; \\ \sum_{j \in N_i} z_{ij}^t \leq n_i^t, \forall i \in I^t. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Здесь Z — вектор расстановки парка ВС по авиалиниям; z_{ij}^t — количество ВС i -го типа, эксплуатируемых на j -м звене авиалинии; (Y_{ij}) — матрица принимаемости АДК новых типов ВС; B — некоторое большое число; I^t — множество типов ВС, эксплуатируемых в t -м году; G^t — множество авиакорреспонденций в t -м году; N_i — множество звеньев сети авиалиний, на которых эксплуатируется i -й тип ВС; n_i^t — количество ВС i -го типа в t -м году.

Директивная область не изменяется и представляет собой область построения перспективного плана движения самолетов (ППДС) и расстановку парка ВС на сети авиалиний [2]. Возможны два варианта задачи. При $D_0 \cap D_0^d = \emptyset$ решается задача маршрутизации и расстановки парка ВС по авиалиниям в целях минимизации эксплуатационных расходов. Данная задача характерна при годовом планировании. Предположим, что $D_0 \cap D_0^d = \emptyset$; тогда необходимо изменить параметры модели для обеспечения совместимости D_0 и D_0^d . В результате возникает задача развития сети АДК под новый тип ВС. Предположим, что за счет использования выделенных капитальных вложений можно расширить область допустимых решений задачи таким образом, что $D_0^r \cap D_0^d \neq \emptyset$. Процедура расширения D_0 состоит в изменении параметров матрицы принимаемости новых типов ВС в пределах ограничений на выделенные ресурсы. Элемент ΔY_{ij} определяется квадратичной составляющей $y_i^t y_j^t B$, где $y = \{1, 0\}$ означает готовность или неготовность принятия нового типа ВС. В качестве критерия оптимизации рассматриваем приведенные затраты. Тогда задача записывается следующим образом: найти

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{j \in G^t} \sum_{i \in I^t} c_{ij}^t z_{ij}^t (1 + E_n)^{-t} + S_j y_j^t (1 + E_n)^{1-t} \right\} \quad (2)$$

при условиях

$$D_0^d = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in Q_l} \xi_{i,a}^t = P_l^t, \quad \forall l \in G_2^t; \\ \xi, \bar{Z}: \sum_{i \in I_j^t} v_{ii}^t z_{ii}^t \geq N_l^t, \quad \forall l \in G_2^t; \\ \sum_{l \in R_j^t} \sum_{a \in R_{jl}^t} L_j \xi_{la}^t = \sum_{i \in I_j^t} \alpha_{ii}^t z_{ij}^t, \quad \forall j \in G^t; \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{ij}^t \leq Y_{ij} + \Delta Y_{ij}, \quad \forall i \in I^t, j \in G^t; \\ \sum_{j \in N_i} z_{ij}^t \leq n_i^t, \quad \forall i \in I_j^t, t = \overline{1, T}; \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$D_0^r = \left\{ \bar{Z}, y: \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n S_j y_j^t \leq k^*: y_j^t = \{1, 0\}, j = \overline{1, n}, \right\} \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n S_j y_j^t \leq k_p: y_j^t = \{1, 0\}, j = \overline{1, n}; \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_j^t - y_j^{t-1} \geq 0; y_j^t = \{1, 0\}, j = \overline{1, n}, \end{array} \right\} \quad (8)$$

где C'_{ij} — эксплуатационные расходы на обслуживание i -го типа ВС на j -й авиалинии в t -м году; E_n — нормативный коэффициент приведения; S_i — необходимые капитальные вложения для реконструкции i -го АДК; ξ_{ia}^t — поток пассажиров с l -й маршрутизированной авиакорреспонденции на a -м маршруте; P_i^t — прогнозируемый поток пассажиров; G_2^t — множество авиакорреспонденций, подлежащих маршрутизации в t -м году; v_{it}^t — среднегодовая частота движения i -го типа ВС на l -м звене; L_j — протяженность j -го звена; k^* — выделенный ресурс на реконструкцию сети АДК в течение периода T ; k_p — ресурс, выделенный для условных подпериодов.

Условие (4) определяет принимаемость новых типов ВС, (5) — ограничение на структуру парка ВС. Условия (6), (7) представляют собой ограничения на капитальные вложения, условие (8) определяет необратимость процесса реконструкции АДК. Предполагается, что реконструкция j -го АДК осуществляется один раз в течение планового периода T .

Данная задача имеет блочно-диагональную структуру. Первый блок содержит ограничения (3), (5) и характеризует задачу маршрутизации и расстановки парка ВС на сети авиалиний. Во втором блоке, включаемом в себя ограничения (6) — (8), представлена задача распределения капитальных вложений в АДК под новые типы парка ВС. Ограничение (4) служит связующим между первым и вторым блоками; оно накладывается на то подмножество авиалиний, которое предполагается использовать для эксплуатации новых типов ВС. В этом ограничении одна часть варьируемых параметров ΔY_{ij} определяется булевой переменной y_i , а другая — произведением булевых переменных $y_i y_j$. Если один из АДК рассматриваемого звена не готов к принятию нового типа ВС, ΔY_{ij} вычисляется как линейная составляющая, если же оба АДК не готовы, ΔY_{ij} рассчитывается как квадратичная составляющая. Произведение $y_i y_j$ может быть заменено новой переменной x_{ij} с учетом условий $(y_i + y_j)/2 = x_{ij} + \gamma_{ij}$; $0 \leq \gamma_{ij} \leq 0,5$, где x_{ij} — булева переменная, а γ_{ij} — непрерывная. Переход от квадратичной составляющей к линейной повышает размерность исходной задачи второго блока, поскольку появляются новые переменные γ_{ij} . Однако, как показывает опыт, в практических задачах количество квадратичных составляющих невелико. Следовательно, увеличение числа переменных задачи будет незначительно. В результате формируется частично целочисленная задача линейного программирования с двумя диагональными блоками. Для ее решения в данной постановке можно применить принципы декомпозиции. При реализации принципа параметрической декомпозиции исходная задача распадается на две локальные подзадачи. Первая из них — задача линейного программирования с непрерывными переменными, вторая — частично целочисленная задача линейного программирования, для решения которой могут быть применены модификации точных методов, например локальные

методы, метод ветвей и границ, метод Бендерса. Вследствие целочисленности переменных y_i координирующая задача имеет кусочно-линейную разрывную функцию. Для ее решения некоторые авторы предлагают реализовать один из наиболее распространенных подходов, заключающийся в применении метода релаксации с использованием функции Лагранжа [3]. Основную роль здесь играет решение двойственной задачи. Такой подход позволяет эффективно решать задачи большой размерности, если разность между оптимальными значениями прямой и двойственной задач (значение разрыва двойственности) относительно мала. Оказывается, что для целочисленной задачи линейного программирования разрыв двойственности достаточно мал, если число слагаемых I^t значительно [3], причем с увеличением I^t он уменьшается. Предлагаемый подход используется при решении задачи развития сети АДК.

Список литературы: 1. Глушков В. М. О системной оптимизации//Кибернетика. 1980. № 5. С. 88—90. 2. Годлевский М. Д. Системная оптимизация развития комплекса технических средств гражданской авиации//См. статью в настоящем вестнике. 3. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа: Пер. с англ. М., 1987. 400 с.

Поступила в редколлегию 26.10.87

УДК 519.6

В. Л. ЛИСИЦКИЙ, канд. техн. наук

ВЗАИМНАЯ АДАПТАЦИЯ ТЕМАТИЧЕСКИХ ПЛАНОВ И ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СТРУКТУР РАЗРАБАТЫВАЮЩИХ СИСТЕМ

Программно-целевые методы, усиливая ориентацию проводимых прикладных исследований и разработок на удовлетворение потребностей народного хозяйства, способствуют повышению эффективности их результатов, рациональному распределению ограниченных ресурсов и использованию возможностей научно-технического потенциала, сокращению продолжительности цикла создания новой техники путем интенсификации деятельности разрабатывающих систем (РС). Интенсификация процессов создания новшеств осуществима только при использовании всех возможностей современной вычислительной техники в целях автоматизации научных экспериментов и процессов проектирования на основе интерактивных процедур. Для обеспечения исследований и разработок необходимы создание и широкое применение информационных систем, развитие форм и методов материального стимулирования коллективов исполнителей. Интенсификация, способствуя росту составляющих научно-технического потенциала (кадровой, информационной, материально-технической), создает реальную основу для сокращения цикла исследование — разработка — создание.

Автоматизация управления процессами прикладных исследований и разработок возможна при условии регулярного уточнения организационной структуры РС, структуры ее научно-технического потенциала путем взаимной адаптации их и тематических планов на интервале планирования $[0, T]$. В связи с этим рассмот-

рим РС, содержащую H научно-исследовательских конструкторских, технологических, опытно-экспериментальных, испытательных подразделений ω , а также подразделения научно-технической информации, вычислительных работ и других вспомогательных служб. Для всей перспективной тематики НИОКР системы задана структура и необходимая детализация «дерева целей» [1]. Технические комплексы (ТК) с номерами j из конечного множества N_0 ранжированы в соответствии с приоритетами α_j . Нормирование трудовых затрат по отдельным ТК ($j \in N_0$) осуществлено с учетом уровня квалификации, степени развития информационной и вычислительной базы. Мощность $R_\omega(t)$ системы определяется суммарной трудоёмкостью работ, которые в состоянии выполнить коллектив исполнителей в момент времени $t \in [0, T]$ при полном использовании имеющейся материально-технической и информационной базы. Интенсификация процессов создания новшеств обеспечивает экспоненциальный рост мощности

$$R_\omega(t) = R_\omega(0)(1 + \gamma_\omega)^t,$$

где значение γ_ω обусловлено нормативным показателем роста производительности труда по данному виду работ.

Качество планирования РС определяется максимальным отклонением $D_c = \max_{\omega} \{D_\omega, \omega = \overline{1, H}\}$ среди отклонений

$$D_\omega = \left(\sum_{i=1}^3 (r_i^\omega - 1)^2 \right)^{1/2}$$

тематических планов подразделений от «идеальных» планов. Показатель r_1^ω характеризует степень равномерности использования мощности $R_\omega(t)$. Величина r_2^ω отражает степень сбалансированности плана. Уровень r_3^ω характеризует степень ускорения процессов прикладных исследований и разработок в подразделении ω [2].

Чтобы обеспечить сбалансированность перспективного плана за счет учета возникающих дополнительных требований при сохранении общей стратегии развития РС, этот план периодически уточняется при построении текущих планов для отдельных интервалов $\Delta_p \subset [0, T]$, $p = \overline{1, N}$. Обязательными для включения в текущий план интервала Δ_p (образующими множество Π_0^p) являются выполняемые за время \overline{T}_j переходящие ТК с номерами j или ТК, создаваемые по постановлению директивных органов. Указанные ТК характеризуются суммарными трудоёмкостями работ S_j^ω . При постоянном потреблении ресурсов для создания ТК с номером j мощности подразделений

$$R_\omega^p = \frac{N}{T} \int_{(p-1)T/N}^{pT/N} R_\omega(t) dt - \sum_{j \in \Pi_0^p} S_j^\omega / \overline{T}_j, \quad \omega = \overline{1, H}.$$

Если все $R_{\omega}^p \geq 0$, то для нахождения множества N_p дополнительных ТК, включаемых в план интервала Δ_p , решают задачу определения продолжительностей их создания $\hat{T}_j^p, j \in N_p^0 - \Pi_0^p$. Эти продолжительности должны удовлетворять координирующим условиям $T_j^{\omega} = T_j, \omega = \overline{1, H}$, технологическим ограничениям $T_j^{\omega} \geq T_j$ и минимизировать критерий качества D_c [3]. Расположив ТК в порядке возрастания \hat{T}_j^p , в текущий план интервала Δ_p включают ТК с номерами j до тех пор, пока для некоторого ω не будут исчерпаны потенциальные возможности R_{ω}^p . Осуществляя нормирование весов $a_j, j \in \Pi_0^p$ и N_p так, чтобы $\sum a_j = 1, a_j \geq 0$, уточняют моменты T_j^{*p} завершения работ по j -му ТК:

$$T_j^{*p} = \begin{cases} T_j, & \hat{T}_j^{*p} \leq T_j; \\ \hat{T}_j^{*p}, & T_j \leq \hat{T}_j^{*p} \leq \bar{T}_j; \\ \bar{T}_j, & \hat{T}_j^{*p} \geq \bar{T}_j. \end{cases}$$

Здесь для $j \in N_p$ значение T_j принимается равным \hat{T}_j^p , а

$$\hat{T}_j^{*p} = \frac{1}{H_j} \sum_{j \in \Omega_j} \frac{1}{R_{\omega}^p} \sqrt{S_{j|\alpha_j}^{\omega}} \left(\sum_{p \in \Pi_{\omega}} \sqrt{\alpha_p S_{p|\alpha_p}^{\omega}} \right), j \in \Pi_0^p \cup N_p,$$

где Ω_j — множество ω , участвующих в создании j -го ТК; H_j — число элементов в Ω_j ; Π_{ω} — множество номеров ТК, в создании которых участвует подразделение ω [3].

Производя аналогичные действия для каждого интервала $\Delta_p, p = \overline{1, N}$, формируют конкретную программу научно-технической деятельности РС на интервале $[0, T]$, устанавливая сроки начала и окончания работ по созданию каждого ТК.

Для обеспечения сбалансированности тематических планов подразделений ω решают задачи

$$\max_{\varepsilon_{\omega}, \delta_{\omega}} r_1^{\omega}(\varepsilon_{\omega}, \delta_{\omega}), r_2^{\omega}(\varepsilon_{\omega}, \delta_{\omega}) = 1, R_{\omega}(t, \varepsilon_{\omega}, \delta_{\omega}) \geq 0,$$

где $R_{\omega}(t, \varepsilon_{\omega}, \delta_{\omega}) = (R_{\omega}(0) + \varepsilon_{\omega})(1 + \gamma_{\omega} + \delta_{\omega})^t$, и находят траектории $R_{\omega}^*(t, \varepsilon_{\omega}^*, \delta_{\omega}^*), \omega = \overline{1, H}$ изменения мощностей, наилучшим образом согласованные с объемами и сроками предстоящих работ. Чтобы получить программные траектории $R_{\omega}^*(t)$, нами построена оптимизационная модель планирования роста составляющих научно-технического потенциала РС за счет отчислений по временным интервалам $\Delta_p \subset [0, T]$ на повышение уровня информационного обеспечения ($i=1$), уровня научно-вычислительной базы ($i=2$), на материальное стимулирование деятельности коллективов исполнителей ($i=3$). Критерий оптимальности

$$C = \sum_{\omega=1}^H \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^3 K_i^{\omega}(p) \gamma_i^{\omega}(p) \Delta R_{\omega}^*(p) \left(1 + \sum_{p=p}^N \beta_i(p, p) \right)$$

определяет суммарный объем переменных затрат в зависимости от удельных весов $\gamma_i^\omega(p)$ приращения мощности в общем объеме программного приращения

$$\Delta R_\omega^*(p) = R_\omega^*(p) - R_\omega^*(p-1), \quad R_\omega^*(p) = \frac{N}{T} \int_{(p-1)T/N}^{pT/N} R_\omega^*(t) dt.$$

Здесь $K_i^\omega(p)$ — затраты на единичное приращение мощности; $\beta_i(\mu, p)$ — снижение на интервале $\Delta\mu$, $\mu > p$ приращения мощности, полученного на интервале Δp .

Ставится задача нахождения $\gamma_i^\omega(p)$, удовлетворяющих нормирующим условиям

$$\sum_{i=1}^3 \gamma_i^\omega(p) = 1, \quad \gamma_i^\omega(p) \geq 0, \quad \omega = \overline{1, H}, \quad p = \overline{1, N},$$

линейным ограничениям неубывающего роста составляющих научно-технического потенциала

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega=1}^H K_i^\omega(1) \gamma_i^\omega(1) \Delta R_\omega^*(1) \geq B_i(1), \quad i = 1, 2; \\ & \sum_{\omega=1}^H K_i^\omega(p+1) \gamma_i^\omega(p+1) \Delta R_\omega^*(p+1) \geq B_i(p+1) + \\ & + \sum_{\mu=1}^p \beta_i(\mu, p) K_i^\omega(p) \gamma_i^\omega(p) \Delta R_\omega^*(p), \quad i = 1, 2, \quad p = \overline{2, N-1}; \\ & K_3^\omega(1) \gamma_3^\omega(1) \Delta R_\omega^*(1) \geq 0; \end{aligned}$$

$$K_3^\omega(p+1) \gamma_3^\omega(p+1) \Delta R_\omega^*(p+1) \geq K_3^\omega(p) \gamma_3^\omega(p) \Delta R_\omega^*(p), \quad p = \overline{2, N-1},$$

где $B_i(p)$ — минимально допустимые отчисления на интервале Δp , и минимизирующих суммарные затраты C . В результате решения построенной задачи линейного программирования находятся удельные веса $\gamma_i^\omega(p)$, определяющие оптимальные траектории развития составляющих научно-технического потенциала в каждом подразделении РС.

Предложенный комплекс оптимизационных моделей позволяет осуществить на интервале $[0, T]$ взаимную адаптацию тематического плана и структуры РС, а также структур научно-технических потенциалов подразделений с объемами и сроками планируемых работ.

Список литературы: 1. Комков Н. И., Левин Б. И., Журдан Б. Е. Организация систем планирования и управления прикладными исследованиями и разработками. М., 1985. 232 с. 2. Лисицкий В. Л. Оптимизация структур двухуровневых разрабатываемых систем // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1987. № 240: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 7. С. 64—67. 3. Лисицкий В. Л., Бисноватая В. А. Об одном алгоритме приближенного решения задачи оптимального тематического планирования. Х., 1986. 7 с. Деп. в УкрНИИНТИ 18.08.86, № 1929-УК86.

Поступила в редколлегию 27.10.87

В. Я. ЗАРУБА, канд. техн. наук,
Ф. Ф. ТЯГУНОВ, канд. техн. наук,
Е. К. ГУРЬЕВ, В. М. ДЕРКАЧ

РАСПРЕДЕЛЕННАЯ ПРОЦЕДУРА ПЛАНИРОВАНИЯ В АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Для практики планирования типичны процедуры решения комплекса взаимосвязанных подзадач иерархически организованным коллективом специалистов в режиме многостороннего взаимодействия их между собой и с ЭВМ. Такие человеко-машинные процедуры, которые называются «распределенными», «рассредоточенными», исследованы мало [1]. Их основными признаками являются: во-первых, наличие разбиения общей номенклатуры продукции на взаимосвязанные части, обусловленное отсутствием средств и возможностей планирования по всей номенклатуре одним лицом; во-вторых, параллельное решение задач планирования по каждой части номенклатуры различными лицами, принимающими решения (ЛПР), и согласование решений с руководителем; в-третьих относительная автономность ЛПР при планировании по части номенклатуры.

Особенности «распределенных» процедур приводят к математическим задачам, отличающимся от общепринятых. В частности, нужно учитывать неполное совпадение целей, которые преследуют ЛПР в процессе планирования, и возникающую в этой связи возможность искажения ими информации, представляемой руководителю [1; 2].

В данной работе для решения распространенной на практике задачи планирования [3] предложена «распределенная» процедура, эффективность которой исследуется исходя из программно-целевого подхода и теории управления активными системами.

Введем следующие обозначения: P — общая номенклатура планируемой продукции; P_q — номенклатура, которую ведет q -й ЛПР; $Q = \{1, 2, \dots, k\}$ — множество ЛПР; i — вид продукции; (\bar{y}_i) , (\underline{y}_i) — векторы верхней и нижней границ потребности в продукции; (y_i) — вектор объемов выпуска продукции; (λ_i) — вектор приоритетов продукции. Для производства единицы продукции i -го вида расходуется объем b_i ресурса, имеющегося в системе в объеме v^0 . Существует дефицит ресурса:

$$\sum_{i \in P} \underline{y}_i b_i < v^0; \sum_{i \in P_q} \bar{y}_i b_i \geq v^0, q \in Q.$$

По объему v_q ресурса, выделяемого для обеспечения выпуска продукции номенклатуры P_q , q -й ЛПР может определить значение $\kappa_q(v_q)$ максимальной обеспеченности своей продукцией:

$$\kappa_q(v_q) = \max \chi$$

при ограничениях

$$\chi \leq \lambda_i \frac{y_i - \underline{y}_i}{\underline{y}_i - \underline{y}_i} \quad (i \in P_q^*(\chi));$$

$$P_q^*(\chi) = \left\{ i \in P_q \mid y_i^{\max} \geq \underline{y}_i + \frac{\chi(\bar{y}_i - \underline{y}_i)}{\lambda_i} \right\};$$

$$\sum_{i \in P_q^*(\chi)} y_i b_i \leq v_q - \sum_{i \in P_q \setminus P_q^*(\chi)} y_i^{\max} b_i;$$

$$\underline{y}_i \leq y_i \leq \min \{ \bar{y}_i, y_i^{\max} \}.$$

Здесь y_i^{\max} — максимальное значение y_i , для которого выполняются ограничения по трудовым ресурсам, производственным мощностям.

Из известных свойств задач линейного программирования следует, что зависимость $\kappa_q(v_q)$ на интервале $[0, v^0]$ является монотонно неубывающей, но невыпуклой функцией. Для упрощения изложения предположим, что $\kappa_q(v_q)$ — монотонно возрастающая функция ($q \in Q$).

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$D_q = \{x_q = (v_q, \mu_q) \mid v_q \in [0, v^0], 0 \leq \mu_q \leq \kappa_q(v_q)\};$$

$$B_q = \{x_q \mid v_q \in [0, v^0], \mu_q = \kappa_q(v_q)\} \quad (q \in Q),$$

где μ_q — обеспеченность ресурсом продукции номенклатуры P_q ($q \in Q$). Множество D_q определяет производственные возможности q -го ЛПР, а множество B_q — «верхнюю границу» множества D_q . В качестве основной целевой установки при программно-целевом планировании принимают максимальное удовлетворение потребности в производимой продукции [1]. В соответствии с этой установкой цели руководителя и каждого ЛПР состоят в том, чтобы разработанный ими план $x^{пл} = (x_q^{пл} = (v_q^{пл}, \mu_q^{пл}), q \in Q)$ был реализуемым:

$$x^{пл} \in X = \{x = (x_q, q \in Q) \mid x_q \in D_q, \sum_{q \in Q} v_q \leq v^0\},$$

а кроме того, максимизировал их целевые функции $\min_{q \in Q} \mu_q, \mu_q$ на множестве X .

Рассмотрим процедуру планирования как многошаговый игровой процесс, в ходе которого между руководителем и ЛПР происходит обмен информацией о предпочтительных вариантах планов. На r -м шаге процесса, $r=1, 2, \dots, R$, каждый ЛПР сообщает руководителю свою заявку $x_q^{(r)} \in D_q$. При этом $v_q^{(1)} = v^0, \mu_q^{(1)} = \kappa_q(v^0)$ ($q \in Q$). Руководитель, следуя установленному закону планирования π , по разработанному ЛПР варианту плана системы $x^{(r)} = (x_q^{(r)}, q \in Q)$ находит «ответный» вариант $\tilde{x}^{(r)} = (\tilde{x}_q^{(r)}, q \in Q) \in X$. Таким образом, $\tilde{x}^{(r)} = \pi(x^{(r)}) = (\pi_q(x^{(r)}), q \in Q)$.

Предлагаемый закон планирования определяется следующими условиями:

$$\sum_{q \in Q} \tilde{v}_q^{(r)} = v^0, \quad \tilde{\mu}_1^{(r)} = \tilde{\mu}_2^{(r)} = \dots = \tilde{\mu}_k^{(r)};$$

$$\tilde{\mu}_q^{(r)} = \begin{cases} \tilde{v}_q^{(r)} \mu_q^{(r)} / v_q^{(r)}, & \tilde{v}_q^{(r)} \in [0, v_q^{(r)}], \quad q \in Q; \\ \mu_q^{(r)}, & \tilde{v}_q^{(r)} \in [v_q^{(r)}, v^0], \quad q \in Q. \end{cases}$$

Определим множество $Z_q^{(r)} = \{x_q \mid \pi_q(x^{(r)}) = x_q, \text{ если } x_q^{(r)} = x_q\}$. Полагаем, что заявка $x_q^{(r+1)}$, сообщаемая руководителю q -м ЛПР на $(r+1)$ -м шаге, $r = 1, 2, \dots, R-1$, находится по формуле $\{x_q^{(r+1)}\} = Z_q^{(r)} \cap D_q$. При этом $\mu_q^{(r+1)} = x_q(v_q^{(r+1)})$.

Игровой процесс заканчивается на R -м шаге по достижении установившейся точки (ЛПР не изменяют свои заявки): $x^{n+1} = x^{(R)} = \tilde{x}^{(R)} = x^{(R-1)}$. Выигрыши руководителя и ЛПР обусловлены значениями их целевых функций в конце игрового процесса. Стратегией ЛПР на шаге процесса является выбор заявки. Стратегия руководителя определяется законом планирования, который задается до начала игрового процесса.

Нетрудно видеть, что рассматриваемый игровой процесс сходится, причем установившийся план $x^{(R)}$ является ситуацией равновесия.

Предположим, что существуют две ситуации равновесия $x^{N1}, x^{N2}, x^{N1} \neq x^{N2}$. Если $\mu^{N1} = (\mu_q^{N1} = x_q(v_q^{N1}), q \in Q) = \mu^{N2} = (x_q(v_q^{N2}), q \in Q)$, то $v_q^{N1} = v_q^{N2} (q \in Q)$, $x^{N1} = x^{N2}$. Поэтому $\mu^{N1} \neq \mu^{N2}$. Но тогда из свойств функций $x_q(v_q)(q \in Q)$ вытекает неравенство $\sum_{q \in Q} v_q^{N1} \neq \sum_{q \in Q} v_q^{N2}$, что противоречит закону планирования. Значит, ситуация равновесия единственная.

В соответствии с законом планирования все ЛПР получают одинаковые выигрыши. Поэтому любой «ответный» вариант плана (включая и ситуацию равновесия) удовлетворяет условию оптимальности по Эджворту.

Из доказанных утверждений следует, что сообщение достоверной информации выгодно для ЛПР в смысле достижения ситуации равновесия и оптимума по Эджворту. В этой связи предположение о стратегии поведения ЛПР в игровом процессе является обоснованным.

Очевидно, что условия $x_1(v_1^{n+1}) = x_2(v_2^{n+1}) = \dots = x_k(v_k^{n+1}), \sum_{q \in Q} v_q^{n+1} = v^0$ определяют не только ситуацию равновесия, но и план, оптимальный по критерию руководителя ЛПР.

Список литературы: 1. Поспелов Г. С., Ириков В. А., Курилов А. Е. Процедуры и алгоритмы формирования комплексных программ. М., 1985. 424 с. 2. Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных

систем. М., 1981. 383 с. 3. Гурьев Е. К., Тягунов Ф. Ф. Формализованное представление сбалансированного плана производства бытовой радиоэлектронной аппаратуры. М., 1987. 17 с. Деп. в ВИМИ 19.08.87, № ДО7373.

Поступила в редколлегию 14.10.87

УДК 656

И. Н. ВЫПИНАШКО

КОРРЕКТНОСТЬ МЕХАНИЗМОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ РЕСУРСОВ

В связи с быстрым обновлением технологии и номенклатуры выпускаемой продукции у планирующего органа (центра) часто нет полной информации о нормах расхода ресурсов на отдельные виды изделий. Распределение ресурсов в этом случае осуществляется по информации о потребностях, сообщаемых производственными элементами. Такой вариант получения центром информации назван встречным способом формирования данных [1]. Сообщаемые элементами данные могут рассматриваться как их стратегии, которые элементы выбирают так, чтобы максимизировать свои целевые функции. Должен быть разработан механизм планирования (распределения), определяющий действия центра и элементов с учетом фактора «активности» системы.

Механизм планирования назван корректным [2], если предсказуемо поведение (выбор стратегий) элементов. Степень корректности обусловлена тем принципом (принципами) оптимальности стратегий элементов, который реализуется в конкретном механизме.

Рассмотрим модель системы. Центр распределяет m видов ресурсов в количествах $R_l, l \in L = \{1, 2, \dots, m\}$ среди множества $Q = \{1, 2, \dots, n\}$ элементов, выпускающих однородную продукцию. Введем следующие обозначения: $v_l, u_i, x_i = ((v_{il}, l \in L), u_i)$ — показатели затрат l -го вида ресурсов, эффекта от использования ресурсов всех видов (например, объема выпуска продукции) и план i -го элемента; $d_i^0(v_{il}, l \in L)$ — непрерывная производственная функция элемента, характеризующая связь между количествами ресурсов всех видов и максимальным эффектом: $d_i^0(v_{il}, l \in L) = u_i$. Эта функция в случае невзаимозаменяемости ресурсов может быть представлена следующим образом: $d_i^0(v_{il}, l \in L) = u_{i1}(v_{i1}) = u_{i2}(v_{i2}) = \dots = u_i$, где $v_{ij} \in [0, R_j] (j \in L)$, а функции $u_{ij} (j \in L)$ удовлетворяют ξ -свойству [2]. Обозначим через $\Gamma(d_i^0) = \{x_i | u_i = d_i^0(v_{il}, l \in L), v_{il} \in [0, R_l]\}$ графическое изображение функции d_i^0 . Очевидно, что $\Gamma(d_i^0)$ — пространственная линия, неубывающая по всем своим координатам и однозначно параметризуемая величиной u_i . Обозначим через $X_i^0 = \{v_i = (v_{il}, l \in L) | u_i = d_i^0(v_{il}, l \in L), 0 \leq u_i \leq u_i^{\max}\}$ множество допустимых вариантов использования

ресурсов i -м элементом; здесь $u_i^{\max} = \min u_{ij}(R_j)$. Введем также следующие обозначения:

$$X_i(d_i^0) = \{x_i | v_i \in X_i^0, u_i \in [0, d_i^0(v_i)]\}; \quad X(d^0 = (d_i^0, i \in Q)) = \{x = (x_i, i \in Q) | x_i \in X_i(d_i^0) (i \in Q), \sum_{i \in Q} v_{il} \leq R_l (l \in L)\} -$$

множества допустимых планов элемента и системы; $\hat{X} = (\hat{X}_i, i \in Q)$ — окончательный вариант плана системы. При составлении плана \hat{X} центр и каждый i -й элемент стремятся максимизировать свои выигрыши, определяемые целевыми функциями Φ, ψ_i^n :

$$\Phi(\hat{X}) = \begin{cases} \sum_{i \in Q} \hat{U}_i, \hat{X} \in X(d^0); \\ \text{const} < 0, \hat{X} \notin X(d^0); \end{cases}$$

$$\psi_i^n(\hat{X}_i) = \begin{cases} \psi_i^0(\hat{X}_i), \hat{X}_i \in X_i(d_i^0); \\ \text{const} < 0, \hat{X}_i \notin X_i(d_i^0), \end{cases}$$

где

$$\psi_i^0((v_{il}, l \in L \setminus \eta), v_{i\eta} + \delta), u_i) > \psi_i^0(v_i, u_i);$$

$$\psi_i^0(v_i, u_i + \delta) > \psi_i^0(v_i, u_i); \quad \psi_i^j(v_i, u_i) \geq 0$$

для всех $v_i, u_i, \delta > 0$.

Множество функций ψ_i^0 , удовлетворяющих соотношениям, обозначим через Ψ_{0i} . Планирование в системе осуществляется по схеме с встречным способом формирования данных. Элементы под контролем центра обмениваются между собой оценками $d_i \in A_i (i \in Q)$ своих производственных функций $d_i^0 (i \in Q)$. Множества $A_i \subseteq D_i^0 (i \in Q)$, где D_i^0 — множество всех возможных реализаций производственных функций i -го элемента, устанавливает центр, определяя тем самым вид используемого механизма планирования. Механизмы, для которых $A_i = D_i^0 (i \in Q)$, будем называть механизмами планирования по производственным функциям элементов. Помимо множеств $A_i (i \in Q)$ центр до начала планирования выбирает и сообщает элементам закон планирования $\pi = (\pi_i = (\pi_i^n, \pi_i^u), i \in Q)$, представляющий собой однозначное отображение наборов $d \in \Pi A_i$ производственных функций элементов в «ответные» планы центра $\bar{X} = (\bar{X}_i = (\bar{V}_i, \bar{U}_i), i \in Q)$, $\bar{X} = \pi(d)$. При этом для каждого i -го элемента оказывается определенной зависимость его выигрыша $\psi_i^n(d) = \psi_i^n(\pi(d))$ от набора функций $d = (d_i, i \in Q)$. Ситуация, в которой элементы сообщают оценки

$d_i (i \in Q)$, описывается игрой n лиц (элементов). Стратегиями элементов являются сообщаемые оценки $d_i (i \in Q)$, а выигрыши обусловлены функциями $\psi_i^n (i \in Q)$.

При планировании по рассмотренной схеме механизм планирования определяется множествами $A_i (i \in Q)$ и законом планирования π . Кроме того, механизм планирования может регламентировать процедуру обмена информацией между элементами (например, очередность сообщения оценок).

Закон планирования π назовем квазикорректным, если он определяет МГР-оптимальную ситуацию, реализуемую абсолютно оптимальными стратегиями элементов. Закон планирования π назовем $*$ -корректным, если он определяет МГР-оптимальную ситуацию d^* , являющуюся одновременно оптимальной по Эджворту. И, наконец, закон планирования π назовем абсолютно корректным, если он определяет ситуацию d^* , являющуюся одновременно квазиоптимальной и оптимальной по Эджворту [2].

При использовании рассматриваемых невзаимозаменяемых ресурсов и механизмов планирования по производственным функциям верны следующие утверждения.

Утверждение 1. Если центр информирован об истинных целевых функциях $\psi_i^0 (i \in Q)$, то законы планирования, эффективные на множестве МГР-корректных законов, являются нормальными, достоверными [2].

Утверждение 2. Чтобы нормальный закон планирования $\pi = (\pi_i, i \in Q)$ был МГР-корректным и достоверным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой его i -й составляющей π_i и набора $d \in D^0$ производственных функций были справедливы соотношения

$$\psi_i(d_i, d_{-i}) \geq \psi_i(d'_i, d_{-i}), \text{ если } d'_i \in D_i(d_{-i}, d_i), d'_i \in D_i^0;$$

$$\pi_i^0(d'_i, d'_{-i}) \leq \pi_i^0(d_i, d'_{-i}) (l \in L), \text{ если } d'_{-i} \in D_{-i}(d_i, d_{-i}).$$

Утверждение 3. Закон планирования π с пропорциональным распределением ресурсов является квазикорректным достоверным.

Утверждение 4. Если закон π с полным распределением ресурсов определяет МГР-оптимальную ситуацию d^* , то ситуация d^* является $*$ -оптимальной, а закон τ — $*$ -корректным.

Из этих утверждений следует, что каждый закон с пропорциональным и полным распределением ресурсов является абсолютно корректным.

Список литературы: 1. Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных систем. М., 1981. 284 с. 2. Заруба В. Я. Эффективность законов пропорционального распределения ресурса // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1988. № 252: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 8. С. 58—61.

Поступила в редколлегию 03.11.87

**ПРОБЛЕМА ВЫБОРА НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ
ПРИ СИСТЕМНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАДАЧИ
ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТРАНСПОРТНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ**

Современные подходы к решению задач производственно-транспортного планирования в большинстве случаев основываются на применении экономико-математических методов. Особая роль при этом принадлежит процессу построения математических моделей. Широко распространены детерминированные модели линейного и нелинейного программирования. Их детерминированность подразумевается в том смысле, что при производственно-транспортном планировании предполагается наличие точной информации о неуправляемых параметрах моделей. Вместе с тем понятно, что такая априорная информация, как правило, неточна. Следовательно, требуется создавать модели стохастического программирования. Усложнение последних из-за учета различных случайных факторов, влияющих на объект исследования, не всегда оказывается оправданным. Например, отсутствие аналитического описания законов распределения случайных параметров задачи делает поиск ее решения весьма затруднительным, а в условиях нестабильности параметров вообще проблематичным.

Нестабильность параметров задачи производственно-транспортного планирования приводит к необходимости формировать систему моделей и организовывать процедуру системной оптимизации. В основу такого процесса положено имитационное моделирование с использованием вероятностно-автоматных принципов [1]. Однако здесь существуют трудности, поскольку функционал имитационной модели задан алгоритмически, а пространство поиска минимума является многомерным (от 10^2 до 10^4 переменных). Возникает проблема размерности и, следовательно, градиентные методы и алгоритмы случайного поиска экстремума оказываются неработоспособными. К решению этого вопроса подойдем следующим образом. Рассмотрим статическую производственно-транспортную задачу [2]: найти вектор $\tilde{h} \in H$ такой, что

$$\min \{ \Phi(h) \mid h \in H \} = \Phi(\tilde{h}).$$

Для решения последней воспользуемся алгоритмом метода неполношаговой линеаризации [3]. Очевидно, что если отыскание минимума функционала $\Phi^{(u)}(h)$ имитационной модели осуществлять на множестве H , то такой подход окажется тем более оправданным, чем меньше угол между градиентами функций $\Phi(h)$ и $\Phi^{(u)}(h)$. В целях компенсации ошибки, возникающей за счет несовпадения градиентов статической и динамической задач, минимизацию $\Phi^{(u)}(h)$ будем производить с помощью построенной специальным образом многошаговой процедуры.

Вычислительная процедура системной оптимизации включает следующие этапы. Первый из них связан с отысканием вектора $h^* \in H$, минимизирующего $\Phi^{(u)}(h)$. При этом координаты произвольной точки h из H определяются численными значениями элементов матриц $(h_{p_1 l}), \dots, (h_{p_k l})$, где $(k+1)$ — этапность исходной производственно-транспортной задачи, $p_i = 1, \dots, P_i$; $l = 1, \dots, L$; $i = 1, \dots, k$; $\dim(h_{p_i l}) = P_i L$. На каждом шаге j многошаговой процедуры реализуется итерационный спуск в направлении градиента статической задачи из надлежащим образом выбранной соответствующей начальной точки $h_{j_{k+1}}, j_{k+1} = 1, \dots, J_{k+1}$. Завершают первый этап анализ зависимости $\Phi^{(u)}(h)$ по каждой координате $s_{k+1} = 1, \dots, N_{k+1}$ вектора $h = \{h_{s_{k+1}}\}$ и определение суженного диапазона по каждой координате, $N_{k+1} = L \sum_{i=1}^k P_i$.

На втором этапе формирование координат начальных точек $h_{j_{k+1}}^{(c)}, j_{k+1}^{(c)} = 1, \dots, j_{k+1}^{(c)}$ происходит в суженном пространстве и решается многошаговая итерационная задача, аналогичная предыдущей.

На третьем этапе решается задача следующего вида: найти

$$\min \{ \Phi_{j_{k+1}}^{(u)}(h_{j_{k+1}}^{*(c)}) \mid j_{k+1}^{(c)} = 1, \dots, J_{k+1}^{(c)} \} = \Phi_{j_{k+1}}^{*(u)(c)}(h_{j_{k+1}}^{*(c)}),$$

что и завершает процедуру параметрической адаптации.

Следующие два этапа связаны со структурной адаптацией. На четвертом этапе структурные переходы осуществляются методом прямого перебора моделей планирования одинаковой этапности. Далее решается такая задача: определить

$$\min \{ \Phi_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(u)(c)}(h_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(c)}) \mid \omega_{k+1} = 1, \dots, \Omega_{k+1} \} = \Phi_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(u)(c)}(h_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(c)}),$$

где ω_{k+1} — индекс структуры модели планирования.

Пятый этап включает анализ процесса структурно-параметрической адаптации. Пусть

$$I = [\Phi_{\omega_{(k+1)+1} j_{(k+1)+1}}^{*(u)(c)}(h_{\omega_{(k+1)+1} j_{(k+1)+1}}^{*(c)}) - \Phi_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(u)(c)}(h_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(c)})].$$

Очевидно, что при $I \geq 0$ процесс структурно-параметрической адаптации можно считать завершенным. Последнее утверждение справедливо и в случае выполнения неравенства

$$\varepsilon < I / \Phi_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(u)(c)}(h_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(c)}) < 0,$$

где ε задается из физических соображений. Если же справедливо неравенство

$$I / \Phi_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(u)(c)}(h_{\omega_{k+1} j_{k+1}}^{*(c)}) < \varepsilon,$$

то системная оптимизация продолжается.

Минимизация функционала $\Phi^{(u)}(h)$ в направлении градиента статической задачи не гарантирует попадания в точку оптимума $\Phi^{(u)}(h^*)$. Решить эту проблему представляется возможным путем зондирования пространства с целью сформировать координаты начальных точек, равномерно заполняющих область поиска экстремума. Процедура формирования координат осуществляется последовательно для каждой из матриц $(h_{p_i l})$, $i=1, \dots, k$, причем на координаты начальных точек наложены ограничения [2]

$$\sum_{p_i=1}^{P_i} h_{p_i l} = \sum_{l=1}^{\Gamma} a_{il}^{(l)} = A_l^{(i)}, \quad l = 1, \dots, L; \quad i = 1, \dots, k; \quad (1)$$

$$\sum_{l=1}^L h_{p_i l} \leq d_{p_i}, \quad p_i = 1, \dots, P_i; \quad i = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Вычислительная процедура формирования начальной точки является двухэтапной по каждой координате. На первом этапе для очередной i -й матрицы $h_{p_i l}$ случайным образом определяется пара (p_i, l) , задающая строку и столбец, на пересечении которых находится вычисляемая координата. Здесь используются датчики случайных чисел, распределенных равномерно в интервалах $[1, P_i]$ и $[1, L]$ соответственно. Если координата не равна нулю (ее значение уже определено ранее), то переходим к выбору новой пары (p_i, l) . В противном случае предварительное численное значение этой координаты находится с помощью датчика случайных равномерно распределенных непрерывных величин из интервала $[0, \min(d_{p_i}, A_l^{(i)})]$. Полученное значение запоминается в матрице $(h_{p_i l})$ в соответствующем месте. Далее осуществляется коррекция правых частей ограничений (1) и (2) по формулам

$$\tilde{d}_{p_i} = d_{p_i} - h_{p_i l}; \quad \tilde{A}_l^{(i)} = A_l^{(i)} - h_{p_i l}.$$

Описанная процедура продолжается до тех пор, пока не будут выполнены ограничения (1), либо не будут определены все элементы очередной матрицы $(h_{p_i l})$. В первом случае осуществляется переход к формированию элементов следующей матрицы. Во втором случае описанная вычислительная процедура повторяется, однако при этом проверка координат на равенство нулю не реализуется.

Таким образом получается первая из совокупности начальных точек. Координаты остальных формируются аналогично.

Список литературы: 1. Бакаев А. А., Костина Н. И., Яровицкий Н. В. Имитационные модели в экономике. К., 1978. 307 с. 2. Галбаров Л. А. Оптимизация планов развития и распределения в экономико-производственных системах. К., 1987. 20 с. (Препр./АН УССР. Ин-т кибернетики). 3. Галбаров Л. А. Об одном методе декомпозиции многопродуктовой транспортной задачи с промежуточными узлами // Экономика и мат. методы. 1987. № 1. С. 165—168.

Поступила в редколлегию 19.10.87

**АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ МНОЖЕСТВА
ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ
НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ
ПЛАНИРОВАНИЯ**

У значительного числа задач планирования, математическими моделями которых являются задачи нелинейного программирования, исходная информация может быть недостаточно достоверной и полной. Это обуславливает необходимость формировать множество допустимых возмущений (ДВ) параметров модели, при которых оптимальные решения будут находиться в заранее заданных пределах. Разработаны достаточно эффективные методы формирования множества ДВ параметров исследуемой модели [1—3]. Однако для некорректно поставленных задач планирования и проектирования они оказываются неэффективными.

Нами предлагается алгоритм формирования множества ДВ параметров некорректно поставленных задач нелинейного программирования. Рассмотрим задачу отыскания таких элементов $y \in X$, что

$$\varphi(y) = \min_{x \in X} \varphi(x, a). \quad (1)$$

Здесь $X = \{x \in \Gamma: f_i(x, a) \geq 0, i = \overline{1, l}\}$; x — n -мерный вектор переменных; a — m -мерный вектор коэффициентов; $\varphi(x, a)$, $f_i(x, a)$, $i = \overline{1, l}$ — непрерывные скалярные функции.

Считаем, что параметры модели (1) a_k , $k = \overline{1, m}$ подвергаются малым возмущениям, т. е. вместо $\varphi(x, a)$, $f_i(x, a)$, $i = \overline{1, l}$ известны функции $\varphi_\delta(x, a + \Delta a)$, $f_{i\delta}(x, a + \Delta a)$, $i = \overline{1, l}$, определенные на множестве Γ :

$$\begin{aligned} \varphi_\delta(x, a + \Delta a), f_{i\delta}(x, a + \Delta a) \in P_\delta(\varphi, f_i) = \{ \varphi_\delta(x, a + \Delta a), \\ f_{i\delta}(x, a + \Delta a) : |\varphi(x, a) - \varphi_\delta(x, a + \Delta a)| \leq \delta, |f_i(x, a) - \\ - f_{i\delta}(x, a + \Delta a)| \leq \delta, x \in \Gamma, i = \overline{1, l} \}. \end{aligned}$$

Выбор функций φ_δ , $f_{i\delta}$, $i = \overline{1, l}$ из множества P_δ не зависит от исследователя. Это приводит к возмущенной задаче вида

$$\varphi_\delta(y) = \min_{x \in X_\delta} \varphi_\delta(x, a + \Delta a), \quad (2)$$

где

$$X_\delta = \{x \in \Gamma: f_{i\delta}(x, a + \Delta a) \geq 0, i = \overline{1, l}\}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} Y = \{y \in X: \varphi(y) = \min_{x \in X} \varphi(x, a)\} \neq \emptyset; \\ Y_\delta = \{y_\delta \in X: \varphi_\delta(y_\delta) = \min_{x \in X_\delta} \varphi_\delta(x, a + \Delta a)\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Таким образом, о решении y исходной задачи (1) судят по решению Y_δ возмущенной задачи (2). При этом необходимо знать максимально возможные погрешности определения параметров задачи (1).

Задача (1) ε -чувствительна по решению, если $\rho(x^*, x_\delta^*) \leq \varepsilon$ (3). Здесь $\rho(x^*, x_\delta^*)$ — метрика евклидова пространства; x^*, x_δ^* — оптимальные решения исходной и возмущенной задач; ε — параметр чувствительности, задаваемый экспертами при условии $\varepsilon > 0$. Необходимо определить множество элементов $\Delta a_k, k = \overline{1, m}$, которые удовлетворяют (3), т. е. сформировать систему ограничений, накладываемых на $\Delta a_k, k = \overline{1, m}$.

В случае некорректности задачи (1) при заданном $\delta > 0$ всегда найдутся такие пары $\varphi_\delta, f_{i\delta}, i = \overline{1, l}$ и $\tilde{\varphi}_\delta, \tilde{f}_{i\delta}, i = \overline{1, \tilde{l}}$, принадлежащие множеству P_δ , для которых решения $y_\delta, x_\delta^*, \tilde{y}_\delta, \tilde{x}_\delta^*$ задач вида (2) существенно различны и поэтому не несут достаточной информации о решении исходной задачи.

При определении множества ДВ параметров некорректно поставленной задачи применим основные положения теории регуляризации [4; 5]. Сформулируем для задачи (2) регуляризованную функцию Лагранжа и найдем ее решение \tilde{x}, \tilde{u} :

$$L_{\alpha_k}(x, u, a + \Delta a) = \varphi_\delta(x, a + \Delta a) - \sum_{i=1}^l u_i f_{i\delta}(x, a + \Delta a) + \frac{\alpha_k}{2} \Omega(x, u), \quad (4)$$

где $\Omega(x, u) = \|x\|^2 - \|u\|^2$ — стабилизатор; α_k — параметр регуляризации.

Условия существования оптимального решения задачи (4)

$$F_j = \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^l \tilde{u}_i \frac{\partial f_{i\delta}}{\partial x_j} + \frac{\alpha_k}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5)$$

$$F_{s+n} = \tilde{u}_s f_{s\delta}(\tilde{x}, a + \Delta a) = 0, \quad s = \overline{1, \tilde{l}}.$$

Продифференцируем тождества (5) по $\Delta a_k, k = \overline{1, m}$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_s}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial (\Delta a_k)} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial F_s}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial (\Delta a_k)} = - \frac{\partial F_s}{\partial (\Delta a_k)}, \quad s = \overline{1, n + \tilde{l}}. \quad (6)$$

Равенства (6) представляют собой линейную систему уравнений относительно неизвестных $\partial x_j / \partial (\Delta a_k), j = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}; \partial u_i / \partial (\Delta a_k), i = \overline{1, \tilde{l}}, k = \overline{1, m}$. Определитель системы (6) отличен от нуля в точке $\Delta a_k = 0, k = \overline{1, m}$. Это объясняется тем, что в функцию

Лагранжа введен стабилизатор, т. е. сформирована сильновыпуклая функция. Следовательно, система (6) имеет единственное решение.

Разложим функции $x(\Delta a_k)$, $k = \overline{1, m}$ в ряд Тейлора в точке $\Delta a_k = 0$, $k = \overline{1, m}$:

$$x(\Delta a_k) = x(0) + \frac{dx}{d\Delta a_k} \Delta a_k. \quad (7)$$

Учтем, что $x(0) = x^*$, и подставим (7) в (3):

$$\sqrt{\sum_{j=0}^n \left[x_j^* - x_j(0) - \frac{\partial x_j}{\partial (\Delta a_k)} \Delta a_k \right]^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left[-\frac{\partial x_j}{\partial (\Delta a_k)} \right]^2 \Delta a_k^2} \leq \varepsilon, \\ k = \overline{1, m}.$$

Отсюда получим максимальные значения погрешности определения параметров a_k , $k = \overline{1, m}$; при реализации одного из них исходная задача будет ε -чувствительной по решению:

$$\Delta a_k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left[-\partial x_j / \partial (\Delta a_k) \right]^2}}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Заданное отклонение оптимального решения имеет место при возмущениях Δa_k , $k = \overline{1, m}$, ограниченных гиперэллипсоидом $\Delta a^T W \Delta a \leq 1$, где $W = (\partial x^* / \partial a)_{\tau} (\partial x^* / \partial a) / \varepsilon^2$, причем элементы матрицы чувствительности вычисляются в оптимальной точке функции Лагранжа.

Установим взаимосвязь между точностью определения исходной информации и параметром чувствительности задачи по решению для случая, когда возмущениям подвергаются параметры целевой функции, а множество допустимых решений задачи задано точно.

Пусть множество X выпукло и замкнуто, функция $\varphi(x, a)$ выпукла и непрерывна, функции $\varphi_0(x, a + \Delta a)$ непрерывны. Запишем

$$\varphi_0(x, a + \Delta a) \in P_0(\varphi) = \{ \varphi_0(x, a + \Delta a) : |\varphi(x, a) - \varphi_0(x, a + \Delta a)| \leq \delta, \\ x \in X \}.$$

Введем регуляризующие функции для исходной и возмущенной задач

$$N_\alpha(x) = \varphi(x, a) + \alpha \Omega(x), \quad x \in X, \quad \alpha > 0; \quad (9)$$

$$N_{\alpha_0}(x) = \varphi_0(x, a + \Delta a) + \alpha \Omega(x), \quad x \in X, \quad \alpha > 0. \quad (10)$$

Здесь $\Omega(x) = \|x - x_0\|^2$. В [4] для функций (9) и (10) получена оценка $\|y_{\alpha_0} - y_\alpha\|^2 \leq \frac{4\delta}{\rho}$, где $\rho = \alpha$ — параметр сильной выпуклости.

Таким образом, условие чувствительности по решению $\|y_0 - y\| \leq \varepsilon$ справедливо для всех $\delta \in \left(0, \frac{1}{4} \alpha \varepsilon^2\right]$ или $\delta = \frac{1}{4} \alpha \varepsilon^2$ (11). Последнее выражение позволяет на основании задаваемого параметра ε установить требования к точности исходной информации.

На основании (8), (11) и результатов, приведенных в [1—3], составим алгоритм формирования множества ДВ некорректно поставленной задачи нелинейного программирования: задать параметр чувствительности по решению ε и определить требования к точности исходной информации δ ; решить задачу (1); построить регуляризованную функцию Лагранжа возмущенной задачи и найти ее оптимальное решение, сформировать для нее условия существования оптимального решения и продифференцировать их по Δa_k , $k=1, m$; решить систему линейных алгебраических уравнений (6), т. е. найти $\partial x_j / \partial (\Delta a_k)$, $j=1, n$, $k=1, m$, $\partial u_i / \partial (\Delta a_k)$, $i=1, l$, $k=1, m$; вычислить по формуле (8) максимальные допустимые погрешности в определении параметров a_k , $k=1, m$; сформировать систему ограничений, накладываемых на Δa_k , $k=1, m$, $V \Delta a \leq 1$, где V — матрица размера $2^m \times m$, строки которой образованы всеми возможными заменами компонент вектора $b_1 = \{\beta_1^{-1}, \dots, \beta_m^{-1}\}$ на компоненты вектора $b_N = \{\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1}\}$. Здесь β_k , α_k , $k=1, m$ характеризуют максимальные допустимые погрешности в определении параметров a_k , $k=1, m$ при условии, что задача (1) будет чувствительной по решению [3].

Список литературы: 1. *Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления*/В. Л. Волкович, А. Ф. Волошин, Т. М. Горлович и др. К., 1984. 216 с. 2. *Голоскоков А. Е., Нижник Е. А.* Модифицированный метод построения множества допустимых возмущений параметров задачи нелинейного программирования//Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1987. № 240: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 7. С. 73—76. 3. *Голоскоков А. Е.* Метод построения области допустимых вариаций параметров задачи проектирования при заданном уровне изменения оптимального решения//Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1988. № 252: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 8. С. 68—71. 4. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М., 1980. 256 с. 5. *Назин А. В., Позняк А. С.* Адаптивный выбор вариантов. М., 1986. 288 с.

Поступила в редколлегию 24.10.87

УДК 62-50

И. В. КОНОНЕНКО, канд. техн. наук,
Н. Л. УМЕРОВА

АЛГОРИТМЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ АППАРАТА СЕТЕЙ ПЕТРИ

Для моделирования дискретных систем, в частности гибких производственных систем и их АСУ, разработаны алгоритмы имитационного моделирования, инвариантные к объекту. Математической основой этих алгоритмов является расширение аппарата сетей Петри. Одна из особенностей принятого

расширения заключается во введении временных позиций. При создании алгоритмов* задача формулировалась так: необходимо предложить алгоритмы, воспроизводящие принятую сеть Петри, требующие малых затрат памяти ЭВМ (по сравнению с существующими), допускающие формализованный анализ сети в целях проверки ее свойств.

Для представления сети Петри введена матрица $P = (p_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, 2n$. Количество строк m равно удвоенному числу переходов. Каждый j_k -й элемент ($j_k \in I = \{j_k | j_1 = 1, k = 1, j_k = j_{k-1} + 2 \vee k = 2, 3, \dots, n\}$)-й строки может быть использован для представления состояния входной или выходной позиции (в зависимости от того, каково i — нечетное или четное) рассматриваемого перехода. Величина n — это максимальное зарезервированное количество входных или выходных позиций в одном переходе. Каждый $(j_k + 1)$ -й элемент, $j_k \in I$, предназначен для возможного хранения входной или выходной позиции (в зависимости от i). Первый из разработанных алгоритмов моделирования состоит из следующих этапов.

1. Формируется матрица $P = (p_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, 2n$. Для моделирования входных позиций переходов сети используются строки с нечетными номерами, для моделирования выходных позиций переходов применяются четные строки. Если в рассматриваемом переходе имеется s входных позиций и l выходных ($s, l \in \{1, 2, \dots, n\}$), то в нечетной строке s первым элементам с номером $j_k \in I$, а в четной строке l первым элементам с номером $j_k \in J$ присваивается значение 0. В первых s элементах с номером j_{k+1} нечетной строки указываются номера входных позиций рассматриваемого перехода. Аналогично в первых l элементах с номером j_{k+1} четной строки указываются номера выходных позиций перехода. Все остальные элементы матрицы P , которым еще не было присвоено значение, приравниваются к произвольному целому числу, не равному 1.

2. Анализируются состояние объекта моделирования и все сообщения, пришедшие из внешней среды. Проверяется, не наступили ли ожидаемые моменты времени. По результатам анализа единицы заносятся в соответствующие позиции сети Петри, представленные в виде элементов $j_k \in J$ строк матрицы P . Требуемая позиция отыскивается по номеру, указанному в $(j_k + 1)$ -х элементах строк.

3. Осуществляется анализ первой строки матрицы P . Если $\forall_{k=1, n} j_k, j_k \in J$, $p_{1j_k} \neq 0$, то все $j_k \in J$ элементы строки, равные 1, обнуляются и запоминаются соответствующие $(j_k + 1)$ -е элементы. При этом элементам второй строки с номерами $j_k \in I$, равными 0, присваивается значение 1 и для них запоминаются $(j_k + 1)$ -е элементы. Изменения делаются во всех элементах матрицы, соответствующих позициям, рассмотренным в первой и второй строках. Если среди элементов первой строки с номером $j_k \in I$ есть равные 0, то первая и вторая строки остаются без изменения. Аналогично анализируется третья строка матрицы P , т. е. реализуется второй переход, затем пятая и все остальные нечетные строки.

4. После просмотра всех переходов фиксируется изменение вектора состояния объекта моделирования и формируются сообщения во внешнюю среду. Сообщение образуется, если в элементе матрицы, который соответствует позиции сети Петри, отвечающей за формирование данного сообщения, появляется 1. Если 1 возникла в позиции, соответствующей запуску процесса, длящегося определенное время, то начинается отсчет этого времени.

5. Очередной шаг имитации окончен. Программа переводится в режим ожидания момента времени или события, когда должен быть начат следующий шаг алгоритма.

6. При наступлении ожидаемого момента времени или события осуществляется переход к п. 2 алгоритма.

Дальнейшим развитием рассмотренного алгоритма моделирования является применение событийного метода, позволяющего сократить объем вычислитель-

* Кононенко И. В. Моделирование развития и типизация разработок гибких производственных систем // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1988. № 252: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 8. С. 48—50.

ной работы, связанной с анализом переходов сети Петри. Рассмотрим алгоритм, использующий событийный метод.

1. Выполняются пп. 1, 2 предыдущего алгоритма. Формируется множество $J = \{i_r | i_1 = 1, r = 1, i_r = i_{r-1} + 2 \forall r = 2, 3, \dots, m/2\}$ — множество индексов нечетных строк матрицы P . Рассматривается первый переход сети Петри.

2. Осуществляется анализ нечетной строки. Если $\forall_{k=1, n} i_k, j_k \in J, p_{i_r, i_k} \neq 0$, то все j_k -е элементы строки, равные 1, обнуляются, соответствующие $(j_k + 1)$ -е элементы запоминаются. При этом всем элементам с номером $j_k \in J$ следующей строки (четной), равным 0, присваивается значение 1. Изменения делаются во всех элементах матрицы, соответствующих позициям, рассмотренным в нечетной и четной строках. Происходит запоминание номеров выходных позиций, в которых произведены изменения. Выявляются нечетные строки матрицы P , содержащие позиции с номерами, которые запомнились. Выявленные номера нечетных строк образуют множество J_1 , причем вновь выявленные номера добавляются к найденным при анализе предыдущих переходов.

Если среди $j_k \in J$ элементов нечетной строки есть равные 0, то нечетная и четная строки остаются без изменения, т. е. переход не сработал. Запоминается номер рассмотренной нечетной строки. Этот номер и номера, аналогично найденные ранее, образуют множество J_2 .

3. Из множества J удаляется индекс рассмотренной нечетной строки. Далее анализируется нечетная строка с номером $\min J$. Реализуется переход к п. 2;

если $J = \emptyset$, — к п. 4.

4. Фиксируется изменение вектора состояния объекта моделирования, формируются сообщения во внешнюю среду, начинается отсчет времени для временных позиций.

5. Очередной шаг имитации закончен. Программа переводится в режим ожидания момента времени (или события), когда должен быть начат следующий шаг алгоритма.

6. При наступлении ожидаемого момента времени или события анализируются состояние объекта моделирования и все поступившие сообщения. По результатам анализа единицы заносятся в соответствующие позиции сети Петри, представленные в виде элементов матрицы P . Если на данном шаге появились изменения по сравнению с предыдущим шагом, то запоминаются номера нечетных строк, в которых произошли изменения. В результате получим множество J_3 .

7. Формируется множество $J = J_1 \cap J_2 \cap J_3$. Выбирается номер строки $\min J$.

Реализуется переход к п. 2.

Предложенные алгоритмы требуют затрат памяти на хранение матрицы P в $d/(2n)$ раз меньше, чем традиционный (d — число позиций в сети). Алгоритмы реализованы на языке Фортран и использованы для моделирования гибких производственных систем.

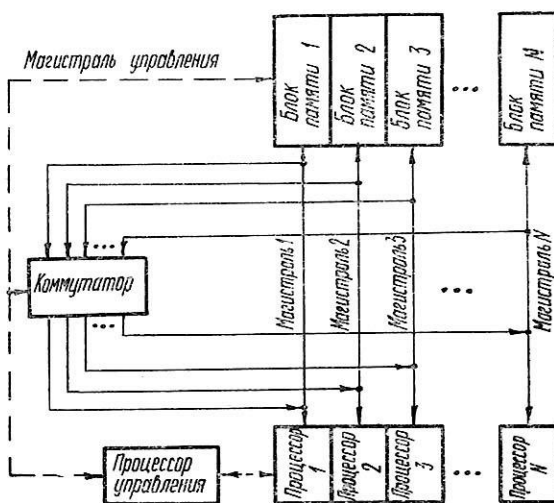
Представление сети в виде матрицы P позволяет формально проверить необходимые условия достижимости, а также другие свойства сети Петри. Алгоритмы могут быть легко изменены в случае применения цветных фишек в сети. Для этого необходимо добавить в описание функционирования каждого перехода правило срабатывания от цветных фишек во входных позициях и указать цвет фишек в выходных позициях. Случайные события вводятся в сеть с помощью входных позиций, появление фишек в которых задается датчиком случайных чисел с установленным законом распределения. Совместно с механизмом моделирования времени это позволяет моделировать случайные процессы. За счет использования дополнительных позиций на входе переходов и занесения в некоторые из таких переходов фишек удается решать задачи автоматизированного синтеза сети, удовлетворяющей заданным критерию качества и ограничениям. Для этого начальная сеть должна быть избыточной. Синтез сети осуществляется с использованием сформированных типовых фрагментов сети. Последние делятся по уровням детализации структуры объекта.

Поступила в редколлегию 17.10.87

О. Н. МАЛЫХ, канд. техн. наук,
А. В. АРДЕЛЬЯН, Ю. Н. КОЖИН,
Ю. С. ШАХНОВСКИЙ

ЭТАПЫ АНАЛИЗА СТРУКТУРЫ МИКРОПРОГРАММИРУЕМОГО SIMD-ВЫЧИСЛИТЕЛЯ

Организация SIMD-вычислителя характеризуется существованием нескольких потоков данных и одного потока управления. При этом одна команда инициирует множество действий по обработке данных. Такой вычислитель может быть реализован как на основе конвейера, так и с помощью матрицы процессоров*. На рисунке представлена структура матричного вычислителя. Каждый



процессор соединен магистралью адреса и данных с блоком памяти. Кроме прямой связи по магистрали, возможна связь через коммутатор, построенный по принципу «каждый с каждым». Посредством магистралей и коммутатора процессоры передают блокам памяти адреса ячеек и данные, а блоки — данные для обработки в процессорах. Процессор управления декодирует команды и передает управляющую информацию по магистрали управления процессорам, коммутатору и блокам памяти. Все процессоры выполняют одновременно одни и те же действия по обработке данных. Если возникает необходимость автономного управления отдельным процессором, используется переключатель, блокирующий или разблокирующий сигналы, поступающие из устройства управления на каждый из процессоров.

В ЭВМ с микропрограммным управлением совместное функционирование набора ресурсов, активируемых программно-задаваемым управляющим сигналом, называется микрооперацией. При этом код микрооперации определяет вид сигнала управления, что позволяет интерпретировать микрооперацию как управляющий сигнал и как связанный с ним набор ресурсов.

* Хокни Р., Джессхоуп К. Параллельные ЭВМ. Архитектура, программирование и алгоритмы: Пер. с англ. М., 1986. С. 145—158.

Чтобы создать операционные средства формирования микрокода для микропрограммируемого SIMD-вычислителя, необходима его программная модель, состоящая из программно-доступных ресурсов и соединяющих их линий связи. Глубина детализации программной модели зависит от требований, предъявляемых конкретной задачей. Независимо от структуры вычислителя и требуемого уровня детализации построению программной модели предшествует три этапа анализа ЭВМ.

Первым этапом является выделение типовых структурных элементов, составляющих вычислитель. Любой из его элементов принадлежит к одному из трех типов. К первому относятся ресурсы, способные запоминать информацию. Такие ресурсы имеют управляемый вход, т. е. запись в ресурсе инициируется управляющим сигналом. Выход статического ресурса может быть управляемым или неуправляемым. При неуправляемом выходе не требуется управляющий сигнал для выдачи информации. Выход открыт и информация появляется на линии связи сразу же после окончания записи в ресурс. Ко второму типу ресурсов относятся комбинационные схемы. Ресурсы этого типа производят обработку информации в соответствии со всей структурой и поступающими на них управляющими сигналами, которые могут быть программируемыми или инициироваться аппаратно. Информационные входы комбинационных схем подключаются к выходам статических ресурсов. Сигнал, вырабатываемый комбинационной схемой, может служить управляющим сигналом или использоваться как информационный и записываться в статический ресурс. К третьему типу ресурсов относятся линии связи. Они включают в себя магистрали и аппаратуру, обеспечивающую передачу информации.

Вторым этапом анализа организации вычислителя является описание способов обмена информацией. Передача информации производится по каналу обмена, который включает в себя источник информации, линию связи и приемник. Источником и приемником в таком канале служат статические ресурсы. Линия связи может включать в себя комбинационные схемы. Для передачи информации необходимо, чтобы на выход источника и на вход приемника поступали управляющие сигналы. Оба управляющих сигнала могут активироваться одной микрооперацией. После выдачи такой микрооперации передача осуществляется в соответствии с правилами функционирования канала обмена. Согласно другому варианту сигналы, управляющие источником и приемником, задаются различными микрооперациями, и тогда программисту необходимо синхронизировать моменты начала этих сигналов.

Если источник обладает открытым выходом, то для передачи информации достаточно подать сигнал на вход приемника. В этом случае к линии связи может быть подключен только источник. Если выход источника и вход приемника управляются различными микрооперациями, то для синхронизации их работы применяется квитированный обмен. Такой обмен обеспечивается наличием в линии связи специального канала, передающего управляющую информацию — квитанции выдачи и приема. При передаче информации на линию связи источник выставляет квитанцию выдачи. Получив эту квитанцию, приемник осуществляет прием информации по поступлении сигнала, открывающего вход приемника. Закончив прием информации, приемник выдает квитанцию приема, которая отключает источник от линии связи. Такой способ обмена позволяет к одной линии связи подключить много источников и приемников. Квитированный обмен является асинхронным. Синхронизация обеспечивается выдачей квитанций. В вычислителях данный обмен применяется для передачи информационных сигналов. Если источник имеет открытый выход, это обуславливает синхронный обмен, не требующий дополнительных сигналов синхронизации. Квитированный обмен обычно используется для передачи управляющих сигналов.

Третий этап анализа — разбиение всех микроопераций на пять групп: микрооперации управления записью в статические ресурсы, управления чтением статических ресурсов, управления комбинационными схемами, активизации локальных задающих автоматов и микрооперации, влияющие на режим работы задающего автомата управления.

Поступила в редколлегию 24.10.87

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИСЦИПЛИНА В МНОГОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ С УПРАВЛЯЕМЫМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ ЗАЯВОК

Все более широкое распространение получают гибкие автоматизированные системы. При этом основными проблемами являются обеспечение их максимальной загрузки и оптимизация характеристик работы таких систем. Рассмотрим многолинейную систему, которая состоит из m обслуживающих приборов. Входящий поток требований в систему представляет собой суперпозицию двух потоков. Первый поток не зависит от процесса обслуживания в системе. Пусть t_i — момент прихода в систему i -го требования первого потока, а x_i — его длина, $i=1, 2, \dots$ (требования нумеруются в порядке поступления). Второй поток управляется процессом обслуживания (последний моделируется на ЭВМ) в однолинейной системе с неограниченным числом мест, куда поступает поток, идентичный первому входящему потоку, с длиной требований в m раз меньше. В этой системе требования обслуживаются согласно дисциплине d_0 : со скоростью единица обслуживается требование с наименьшей остаточной длиной до обслуживания среди всех требований, находящихся в данный момент в системе. Обозначим через $\xi(t, d_0)$ число требований в системе в момент t . Помимо основного потока требований в эту систему попадает еще один поток, который формируется следующим образом: в момент перехода процесса $\xi(t, d_0)$ из состояния $\{m\}$ в состояние $\{m-1\}$ в систему поступает требование нового потока. Таким образом, моменты поступления дополнительного потока — это моменты перехода процесса $\xi(t, d_0)$ из состояния $\{m\}$ в состояние $\{m-1\}$ в однолинейной системе с учетом ранее пришедших дополнительных требований. Обозначим через τ_1, τ_2, \dots моменты прихода требований дополнительного потока:

$$\tau_1 = \inf \{t > t_1 : \xi(t-0, d_0) = m, \xi(t+0, d_0) = m-1\};$$

$$\tau_k = \inf \{t > \tau_{k-1} : \xi(t-0, d_0) = m, \xi(t+0, d_0) = m-1\};$$

.....

Моменты прихода второго потока требований в многолинейную систему — $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$. Суммарный входящий поток в многолинейную систему не зависит от процесса обслуживания в данной системе.

Обозначим через $D = \{d\}$ класс дисциплин обслуживания в многолинейной системе, каждая из которых представляет собой набор скоростей $\{c_{ls}\}$, где c_{ls} — скорость обслуживания s -го по счету из l находящихся в системе требований. Скорости зависят от выработанных и остаточных длин требований, находящихся

в системе. На скорости обслуживания накладываются следующие ограничения: $c_{1s} \leq 1$ и $\sum_{s=1}^l c_{1s} \leq m$. Обозначим через d_0^m дисциплину обслуживания в многолинейной системе, согласно которой со скоростью единица обслуживаются в системе m требований с наименьшей остаточной длиной дообслуживания, если число $v(t, d_0^m)$ требований в системе больше m . В противном случае все требования обслуживаются со скоростью единица. Под элементарным событием процесса обслуживания в системе будем понимать набор $\omega = \{t_1 < t_2 < \dots; x_1, x_2, \dots; a_1, a_2, \dots\}$, где t_i — момент прихода в систему i -го требования первого потока длины x_i , а a_i — длина i -го требования второго потока. Пусть $S(t, d)$ — количество обслуженных до момента t требований в многолинейной системе при дисциплине $d \in D$. Из построения второго потока требований в многолинейную систему следует, что $v(t, d) \geq \xi(t, d_0) \geq m$, т. е. обеспечена максимальная нагрузка всех приборов системы. Кроме того, справедлива следующая теорема.

Теорема. Для любой дисциплины $d \in D$ и для любого ω

$$S(t, d_0^m(\omega)) \geq S(t, d(\omega))$$

при всех $t > t_1$.

Доказательство. Определим состояние системы в момент времени t :

$$\zeta(t) = (S(t), v(t), x_+(t), x_-(t)).$$

Здесь $S(t)$ — количество обслуженных к моменту t требований; $v(t)$ — число требований в системе в этот момент; $x_+(t)$, $x_-(t)$ — соответственно векторы остаточных и выработанных длин требований в системе в момент t . Каждому состоянию системы $\zeta = (S, v, x_+, x_-)$ поставим в соответствие набор $Y = (y_1, \dots, y_k)$,

$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k$, такой что $k = S + v$; $y_1 = y_2 = \dots = y_S = 0^+$

$$y_{S+1} = x_1^+, y_{S+2} = x_2^+, \dots, y_k = x_v^+.$$

В множестве $\{\zeta\}$ всевозможных состояний системы введем отношение частичной упорядоченности. Положим $\zeta < \zeta'$, если соответствующие им наборы чисел Y и Y' связаны отношением $Y < Y'$, а оно выполнено, когда $k = k'$ и

$$y_1 \leq y'_1, y_2 \leq y'_2, \dots, y_m \leq y'_m,$$

$$y_1 + y_{m+1} \leq y'_1 + y'_{m+1}, \dots, y_m + y_{2m} \leq y'_m + y'_{2m},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_1 + y_{m+1} + \dots + y_{rm+1} \leq y'_1 + y'_{m+1} + \dots + y'_{rm+1}, \dots,$$

$$y_b + y_{b+m} + \dots + y_{b+rm} \leq y'_b + y'_{b+m} + \dots + y'_{b+rm},$$

где $k = b + rm$; $0 \leq b < m$. Пусть $\zeta(\theta_0) = \zeta_0$, $\theta_0 < t_1$. Обозначим через $\zeta[t, d](\zeta_0, \omega)$ состояние системы в момент $t > \theta_0$ при ди-

дисциплине $d \in D$. Пусть $\theta_1, \theta_2, \dots$ — моменты прихода в систему суммарного потока требований.

Рассмотрим две многолинейные системы при дисциплине обслуживания d_0^m . В момент θ_0 начальное состояние первой системы ζ_0 , а второй — ζ'_0 и $\zeta_0 < \zeta'_0$. Для любого ω и для всех $t \geq \theta_0$

$$\zeta[t, d_0^m](\zeta_0, \omega) < \zeta[t, d_0^m](\zeta'_0, \omega). \quad (1)$$

Докажем это индукцией по номеру интервала $[\theta_{i-1}, \theta_i)$, в котором лежит t . При $t \in [\theta_0, \theta_1)$ это соотношение справедливо для всех $\zeta^0 < \zeta'_0$ и любого ω , что вытекает из определения отношения $<$. Пусть оно выполнено при любом $t \in [\theta_{n-1}, \theta_n)$, для любых начальных состояний $\zeta_0 < \zeta'_0$. Докажем, что оно выполнено и при $t \in [\theta_n, \theta_{n+1})$. Из предположения индукции и из того, что добавление к наборам Y и Y' , связанных отношением $Y < Y'$, одного и того же числа сохраняет это отношение, следует:

$$\zeta[\theta_n, d_0^m](\zeta_0, \omega) < \zeta[\theta_n, d_0^m](\zeta'_0, \omega).$$

Отсюда вытекает:

$$\zeta[t, d_0^m](\zeta_0, \omega) < \zeta[t, d_0^m](\zeta'_0, \omega), \quad t \in [\theta_n, \theta_{n+1}).$$

По принципу математической индукции утверждение доказано для всех $t \geq \theta_0$. Дисциплина d_0^m является оптимальной в том смысле, что для любой дисциплины $d \in D$, любого ζ_0 и для всех ω при $t \geq \theta_0$

$$\zeta[t, d_0^m](\zeta_0, \omega) < \zeta[t, d](\zeta_0, \omega).$$

При $t \in [\theta_0, \theta_1)$ это отношение выполнено, что следует из определения дисциплины d_0^m и соотношения $<$. Оно также выполнено и в момент θ_1 . Предположим, что оно справедливо для $t \in [\theta_0, \theta_n)$ и для всех ζ_0 и ω . Пусть

$$\zeta_1 = \zeta[\theta_1, d_0^m](\zeta_0, \omega) < \zeta[\theta_1, d](\zeta_0, \omega) = \zeta'_1.$$

Из первого доказанного утверждения (1) следует:

$$\zeta[t, d_0^m](\zeta_1, \omega) < \zeta[t, d_0^m](\zeta'_1, \omega)$$

для всех $t > \theta_1$ и, в частности, для $t \in [\theta_n, \theta_{n+1})$. Из предположения индукции вытекает:

$$\zeta[t, d_0^m](\zeta'_1, \omega) < \zeta[t, d](\zeta'_1, \omega)$$

для $t \in [\theta_1, \theta_{n+1})$. Из последних двух соотношений следует:

$$\zeta[t, d_0^m](\zeta_0, \omega) = \zeta[t, d_0^m](\zeta_1, \omega) < \zeta[t, d](\zeta'_1, \omega) = \zeta[t, d](\zeta_0, \omega)$$

для $t \in [\theta_0, \theta_0, \theta_{n+1})$. Согласно принципу математической индукции

$$\zeta[t, d_0^m](\zeta_0, \omega) < \zeta[t, d](\zeta_0, \omega) \quad (2)$$

для всех $t \geq t_0$, любых ζ_0 , ω и $d \in D$. Из этого соотношения и определения состояния ζ вытекает, что при дисциплине d_0^m в многолинейной системе из m приборов число обслуженных требований на конечном отрезке времени будет максимально в классе дисциплин D , т. е. для любой $d \in D$ имеем $S(t, d_0^m)(\omega) \geq S(t, d)(\omega)$ для любого ω и при всех $t > t_1$. Теорема доказана.

Таким образом, для многолинейной системы из m приборов с неограниченным числом мест и входным потоком, не зависящим от процесса обслуживания в системе, построен дополнительный поток, дающий максимальную загрузку приборов; в этом случае найдена оптимальная дисциплина обслуживания, при которой число обслуженных требований максимально, а очередь минимальна.

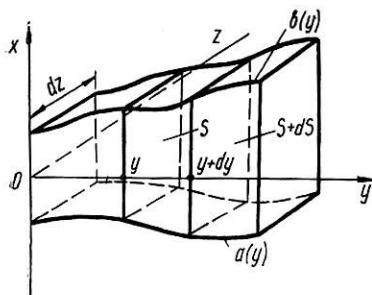
Поступила в редколлегию 11.07.87

УДК 526.2

Е. В. НЕЗНАМОВА

ОБ УПРОЩЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ НАГРЕВА МЕТОДОМ ТЕПЛООВОГО БАЛАНСА

При моделировании алгоритмов управления нестационарными тепловыми процессами возникает необходимость в расчете температурного поля для двумерной области сложной конфигурации. Например, нередко требуется установить распределение температуры



по площади сечения нагреваемой детали. В работе [1] определено изменение по времени средней температуры объекта нагрева. Представляет интерес применение метода усреднения для области, температурное поле которой вдоль одной из координатных линий имеет малый градиент. Такое предположение допустимо для сечений пластин, тонких оболочек и т. п.

Нами получено упрощенное одномерное уравнение теплопроводности, описывающее процесс нагрева двумерной области с учетом влияния профиля сечения в направлении ненулевого градиента температуры и наличия теплоотдачи с боковой поверхности нагреваемого объекта. Для вывода уравнения воспользуемся методом теплового баланса [2].

Рассмотрим двумерную область, ограниченную двумя непрерывно дифференцируемыми кривыми $x_1 = a(y)$; $x_2 = b(y)$; $0 < a(y) < b(y)$, $0 \leq y \leq d$. Предположим, что область представляет собой сечение бесконечного цилиндра (рисунок), температура θ которого

в начальный момент времени выше температуры среды θ_c . Теплоотдача с боковой поверхности цилиндра в окружающую среду происходит по закону Ньютона:

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_S = \alpha (\theta|_S - \theta_c). \quad (1)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности; α — коэффициент теплоотдачи. Боковая поверхность цилиндра обозначена через S .

Рассмотрим уравнение теплового баланса для объема dV , ограниченного сечениями цилиндра в точках y и $y+dy$. Количество теплоты, которое идет на нагрев объема dV за промежутки времени dt , выражается формулой

$$dQ_{\text{обм}} = C\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} dt dV,$$

где C — удельная теплоемкость материала; γ — плотность материала; $\theta = \theta(y, t)$ — средняя температура сечения цилиндра в точке y . Не нарушив общности, положим $dz = 1$. Определив dS_{xy} как площадь трапеции высотой dy , без учета дифференциалов второго порядка получим:

$$dV = dS_{xy} dz = (b(y) - a(y)) dy,$$

откуда

$$dQ_{\text{обм}} = C\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} (b(y) - a(y)) dy dt. \quad (2)$$

Количество теплоты, проходящее за время dt через сечение в точке y , устанавливается из соотношения

$$dQ' = -\lambda S_{\text{сеч}} \frac{\partial \theta}{\partial y} dt.$$

Здесь $S_{\text{сеч}} = (b(y) - a(y)) dy$.

Количество теплоты, передаваемое за время dt через сечение в точке $y+dy$, находится по формуле

$$dQ'' = -\lambda (S_{\text{сеч}} + dS) \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \right) dt,$$

где $dS = (b'(y) - a'(y)) dy$.

Тогда количество теплоты, оставшееся в объеме dV , определяется следующим образом:

$$dQ_{\text{сеч}} = \lambda \left[(b(y) - a(y)) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + (b'(y) - a'(y)) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] dy dt. \quad (3)$$

Через боковую поверхность объема dV согласно (1) проходит за время dt количество теплоты

$$dQ_{\text{бок}} = \alpha (\theta - \theta_c) (dS_1 + dS_2). \quad (4)$$

Здесь $dS_1 = dx_1 dz = \sqrt{1 + a^{12}(y)} dy$; $dS_2 = dx_2 dz = \sqrt{1 + b^{12}(y)} dy$.

Уравнение теплового баланса для рассматриваемого объема имеет вид

$$dQ_{\text{общ}} = dQ_{\text{сеч}} - dQ_{\text{бок}} + dQ_{\text{ист}}, \quad (5)$$

где $dQ_{\text{ист}}$ — количество теплоты, выделяемое за время dt внутренними источниками теплоты в объеме dV .

Пусть $f_{\text{ист}}(y, t)$ — средняя по координате x объемная плотность теплового потока. Тогда

$$dQ_{\text{ист}} = f_{\text{ист}}(y, t)(b(y) - a(y)) dy dt. \quad (6)$$

При подстановке в уравнение (5) выражений (2), (3), (4), (6) после соответствующих преобразований получим уравнение

$$C_T \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{b'(y) - a'(y)}{b(y) - a(y)} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \alpha(\theta - \theta_c) \frac{\sqrt{1 + a^2(y)} + \sqrt{1 + b^2(y)}}{b(y) - a(y)} + f_{\text{ист}}(y, t) \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha(\theta - \theta_c), \quad y = 0; \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha(\theta - \theta_c), \quad y = d$$

и начальным условием $\theta(0, y) = \theta_0(y)$.

Решение этой задачи характеризует распределение средней температуры θ по координате y в области заданной конфигурации. В случае, когда сечение области представляет собой прямоугольник, уравнение (7) аналогично рассмотренному в работе [2].

Список литературы: 1. Лыков А. В. Теплообмен. М., 1978. 480 с. 2. Любчик М. А. К расчету нагрева экранирующего витка магнитных систем переменного тока // Тр. Харьк. политех. ин-та. 1958. № 20: Электромашиностроение. Вып. 1. С. 53—64.

Поступила в редколлегию 03.11.86

УДК 681.31:53

Л. А. КУНЯНСКИЙ

**МОДИФИКАЦИЯ СПЛАЙНОВЫХ АЛГОРИТМОВ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА
ПО СХЕМЕ ТРЕТЬЯКА — МЕТЦА**

Для обработки результатов газодинамических и плазменных экспериментов все чаще используются алгоритмы вычислительной томографии. В частности, применяются алгоритмы численного обращения преобразования Радона [1]

$$f(p, \varphi) = \iint g(\bar{r}) \times \delta(p - \bar{r} \cdot \bar{n}) d^2 r$$

на основе сглаживающих сплайнов, оказавшихся эффективными при решении задач малоракурсной томографии [2; 3].

Обобщим эти алгоритмы для случая обращения экспоненциального преобразования Радона [1]

$$f(p, \varphi) = \iint g(\vec{r}) \exp(-\mu L) \times \delta(p - \vec{r} \cdot \vec{n}) d^2r$$

с постоянным коэффициентом экстинкции μ на основе сверточной схемы Третьяка — Метца [4], в которой предусмотрена фильтрация проекций сверткой с обобщенной функцией $1/(4\pi^2) \times \times d/dp \{v.p. [\cos(\mu p)/p]\}$, где *v.p.* — символ главного значения в смысле Коши.

Кратко опишем постановку задачи. Коэффициент экстинкции μ отличен от нуля на ограниченном выпуклом носителе. Измеряемые детектором D (см. рисунок) значения пропорциональны интегралу по прямой от заданной на вещественной плоскости неотрицательной финитной функции $g(\vec{r})$ с весовой функцией $\exp(-\mu(L_1 + L_2))$:

$$f(p, \varphi) = \iint g(\vec{r}) \exp[-\mu(L_1 + L_2)] \delta(p - \vec{r} \cdot \vec{n}) d^2r. \quad (1)$$

Таким образом, функция $f(p, \varphi)$ является результатом экспоненциального преобразования Радона функции $g(\vec{r})$. Для каждого фиксированного φ осуществляется сканирование по p .

Как показано в работе [1], формула обращения преобразования (1) может быть записана в виде

$$g(\vec{r}) = 1/(4\pi^2) \int_0^{2\pi} \exp(\mu \vec{r} \cdot \vec{n}') \{f_{\mu}(p, \varphi) * d/dp v.p. \times \\ \times [\cos(\mu p)/p]\}_{p=\vec{r} \cdot \vec{n}} d\varphi. \quad (2)$$

Здесь * — символ операции свертки, а модифицированные проекции определяются следующим образом: $f_{\mu}(p, \varphi) = f(p, \varphi) \exp(\mu L_2)$. Формулу (2) можно переписать так:

$$g(\vec{r}) = -1/(4\pi^2) \int_0^{2\pi} \exp(\mu \vec{r} \cdot \vec{n}') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_{\mu}(p, \varphi)}{\partial p} \times \\ \times \cos(\mu(p - p_0))/(p - p_0) dp d\varphi, \quad (3)$$

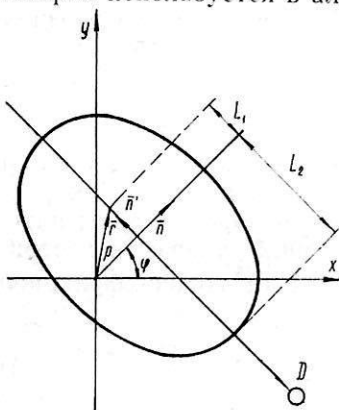
где $p_0 = \vec{r} \cdot \vec{n} = y \cos \varphi - x \sin \varphi$. Заменой переменных (3) приводится к виду

$$g(\vec{r}) = -1/(4\pi^2) \int_0^{2\pi} \exp(\mu \vec{r} \cdot \vec{n}') \int_0^{+\infty} \cos(\mu t)/t \times \\ \times [\partial f_{\mu}(p_0 + t, \varphi)/\partial p - \partial f_{\mu}(p_0 - t, \varphi)/\partial p] dt d\varphi. \quad (4)$$

При $\mu=0$ выражение (4) принимает вид известной формулы обращения преобразования Радона

$$g(\bar{r}) = -1/(4\pi^2) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial f(p_0 + t, \varphi)}{\partial p} - \frac{\partial f(p_0 - t, \varphi)}{\partial p} \right] dt d\varphi,$$

которая используется в алгоритме *RICSS 2* [2]. Алгоритм *RICSS 2*, основанный на этой формуле, после внесения минимальных изменений может использоваться для обращения экспоненциального преобразования Радона согласно (4).



Модификация алгоритма, предложенного Ю. Е. Воскобойниковым [3], осуществляется несколько сложнее. Формула обращения преобразования Радона, лежащая в основе указанного алгоритма, записывается так:

$$g(\bar{r}) = -1/(4\pi^2) \int_0^{2\pi} \int \frac{\partial f(p, \varphi)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{(p - p_0)} d\varphi. \quad (5)$$

Поскольку исходные данные $f(p, \varphi)$ в алгоритме [3] аппроксимируются сглаживающим сплайном, внутренний интеграл в (5) вычисляется аналитически, что повышает скорость и точность вычислений. Однако нельзя воспользоваться результатом работы [3] для обращения экспоненциального преобразования, поскольку внутренний интеграл в выражении (3) имеет несколько иной вид. Найти значение внутреннего интеграла в (3) можно следующим образом. Так как искомая функция $g(r)$ финитна, в (3) пределы интегрирования становятся конечными. Аппроксимируем модифицированные проекции f_p сглаживающим сплайном при каждом фиксированном φ (см., например, (5)):

$$S(p) = \begin{cases} S_i(u) = a_i + b_i u + c_i u^2 + d_i u^3, & u = p - p_i, \quad p \in [p_i, p_{i+1}], \\ & i = 1, N; \\ 0, & p \in]-\infty, p_1[\cup]p_N, +\infty[. \end{cases}$$

Тогда внутренний интеграл в (3) переписется в виде

$$I(p_0) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\cos(p(p - p_0))}{(p - p_0)} dp = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{\partial}{\partial p} (a_i + b_i(p - p_i) + c_i(p - p_i)^2 + d_i(p - p_i)^3) \frac{\cos(p(p - p_0))}{(p - p_0)} dp =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{p_i-p_0}^{p_{i+1}-p_0} (b_i + 2c_i(t + p_0 - p_i) + 3d_i(t + p_0 - p_i)^2) \times \\
&\times \frac{\cos \mu t}{t} dt = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{p_i-p_0}^{p_{i+1}-p_0} [(b_i + 2c_i(p_0 - p_i) + 3d_i(p_0 - p_i)^2 + \\
&+ (2c_i + 6d_i(p_0 - p_i)t + 3d_it^2) \frac{\cos \mu t}{t}] dt. \tag{6}
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
R_{1,i} &= b_i + 2c_i(p_0 - p_i) + 3d_i(p_0 - p_i)^2; \quad R_{2,i} = 2c_i + 6d_i(p_0 - p_i); \\
R_{3,i} &= 3d_i.
\end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned}
I(p_0) &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{p_i-p_0}^{p_{i+1}-p_0} \left(R_{1,i} \frac{\cos \mu t}{t} + R_{2,i} \cos \mu t + R_{3,i} t \times \right. \\
&\times \left. \cos \mu t \right) dt = \sum_{i=1}^{N-2} [(R_{1,i} - R_{1,i+1}) \text{Ci}(\mu(p_{i+1} - p_0)) + \\
&+ (R_{2,i} - R_{2,i+1}) \frac{1}{\mu} \sin(\mu(p_{i+1} - p_0)) + (R_{3,i} - R_{3,i+1}) \times \\
&\times \left(\frac{1}{\mu} (p_{i+1} - p_0) \sin(\mu(p_{i+1} - p_0)) - \frac{2}{\mu^2} \sin^2(\mu(p_{i+1} - p_0)/2) \right)] + \\
&+ R_{1,N-1} (\text{Ci}(\mu(p_N - p_0)) + R_{2,N-1} \frac{1}{\mu} (\sin(\mu(p_N - p_0))) + \\
&+ R_{3,N-1} \frac{1}{\mu} (p_N - p_0) \sin(\mu(p_N - p_0)) - \frac{2}{\mu^2} \sin^2(\mu(p_N - p_0)/2)) - \\
&- [R_{1,1} \text{Ci}(\mu(p_1 - p_0)) + R_{2,1} \frac{1}{\mu} \sin(\mu(p_1 - p_0)) + \\
&+ R_{3,1} \left(\frac{1}{\mu} (p_1 - p_0) \sin(\mu(p_1 - p_0)) - \right. \\
&\left. - \frac{2}{\mu^2} \sin^2(\mu(p_1 - p_0)/2) \right)], \tag{7}
\end{aligned}$$

где $\text{Ci}(x)$ — интегральный косинус. Заметим, что

$$\lim_{p_0 \rightarrow p_j} (R_{1,j-1} - R_{1,j}) \text{Ci}(\mu(p_j - p_0)) = 0$$

вследствие непрерывности первой производной от сплайна. Это необходимо учитывать при численной реализации алгоритма, так как $C_i(0) = -\infty$. В остальном порядок вычислений остается тем же, что и в исходном алгоритме [3].

Описанные выше модификации алгоритмов [2; 3] были реализованы на ЭВМ. Численные эксперименты по восстановлению модельных функций проводились по 12 проекциям в диапазоне от 0 до 2π и по 21 отсчету в каждой проекции. При этом предполагалось, что коэффициент экстинкции μ отличен от нуля на единичном круге. В качестве тестового объекта использовались шесть одинаковых гауссиан, расположенных через равные интервалы на окружности радиуса 0,5. Оценка погрешности восстановления Δ вычислялась по формуле

$$\Delta^2 = \iint (g(\bar{r}) - g_{\text{восст}}(\bar{r}))^2 d^2r \iint g^2(\bar{r}) d^2r,$$

где $g_{\text{восст}}(\bar{r})$ — восстановленная функция. Расчеты показали рост неустойчивости задачи при увеличении μ . Если μ меньше единицы, погрешность восстановления лежит в диапазоне от 15 до 20 %; если μ принимает значения от 1 до 2, погрешность достигает 40 %. Дальнейший рост μ вызывает резкое возрастание дальних лепестков функции рассеяния точки у обоих описанных алгоритмов. Это приводит к необходимости увеличивать число отсчетов при аппроксимации оператора обратного проецирования, а значит, время счета и занимаемую задачей оперативную память ЭВМ.

Таким образом, использование описанных выше алгоритмов оправданно для задач с характерными оптическими толщинами, не превосходящими 1 ... 1,5 (предельная толщина зависит от требуемой точности восстановления).

Список литературы: 1. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск, 1987. 230 с. 2. Мельникова Т. С., Пикалов В. В. Инверсия Радона в эмиссионной томографии нестационарной плазмы. Новосибирск, 1982. 52 с. 3. Воскобойников Ю. Е. Численный алгоритм обращения преобразования Радона на основе сглаживающих сплайнов // Вопросы реконструктивной томографии. Новосибирск, 1985. С. 36—44. 4. Tretiak O. J., Metz C. The exponential Radon transform // Soc. for Industr. and Appl. Mathematics (SIAM) I. on Appl. Mathematics. 1980. 39. P. 341—354. 5. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М., 1980. 352 с.

Поступила в редколлегию 05.10.87

УДК 681.5

Ю. П. ВИРЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, И. Н. ДОМНИНА

ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Необходимость решения линейных матричных уравнений связана с рассмотрением задач теории устойчивости физических систем в окрестности положения равновесия [1] и, в частности,

с проверкой на устойчивость произвольных матриц. Существуют различные алгоритмы для решения уравнения Ляпунова [2; 3], однако, как показала практика, их применение для произвольных матриц большого размера эффективно только для диагональной матрицы A ; кроме того, они пригодны лишь для частного случая $AX - XA^T = S$. Предлагаемый алгоритм определяет решение уравнения более общего вида $AX - XB = S$, где A , B и S — произвольные квадратные матрицы. Суть данного алгоритма состоит в следующем. Решение линейного матричного уравнения

$$AX - XB = S \quad (1)$$

можно формально записать так:

$$X = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (\alpha_i - \beta_k)^{-1} P_i S Q_k. \quad (2)$$

Здесь $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_k\}$ — набор собственных чисел матриц A и B соответственно; N — размер матриц; P_i , Q_k — собственные косые проекторы матриц A и B [4]. После преобразования решение уравнения можно дать в виде

$$X = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i^n P_i}{R(\alpha_i; B)} \right) S D_{N-1-n}, \quad (3)$$

где $R(\alpha_i; B)$ — характеристический полином матрицы B ; $\{D_k\}$ — последовательность вспомогательных матриц, используемых для нахождения матричных инвариантов матрицы B .

В силу разложения матрицы A по собственным косым проекторам справедливо выражение

$$\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i^n P_i}{R(\alpha_i; B)} = (R(A; B))^{-1} A^n \equiv G^{-1} A^n, \quad (4)$$

поэтому искомая матрица X может быть явно выражена в терминах матричных элементов матриц A и B без нахождения их собственных чисел. Коэффициенты характеристического полинома p_k матрицы B будем определять по методу Левеерье—Фаддеева [2] для всех $k = \overline{1, N}$:

$$p_k = \frac{1}{k} \text{Sp}(B D_{k-1}); \quad D_k = B D_{k-1} - p_k I, \quad D_0 = I. \quad (5)$$

По найденным значениям p_k и D_k вычислим матрицы

$$C = \sum_{n=0}^{N-1} A^n S D_{N-1-n}; \quad G = A^N - \sum_{n=0}^{N-1} p_{N-n} A^n; \quad X = G^{-1} C. \quad (6)$$

Для упрощения процесса вычисления приведем формулы (6) к такому виду:

$$D = \sum_{i=0}^{N-1} (A^{-1})^i S D_i; \quad F = \sum_{m=1}^N (A^{-1})^m p_m; \quad G^{-1} = (E - F)^{-1} A^{-N}. \quad (7)$$

Тогда решение уравнения (1) будет следующим:

$$X = (E - F)^{-1} A^{-1} D. \quad (8)$$

Ограничением предлагаемого метода является условие однозначной разрешимости $\alpha_i - \beta_k \neq 0$ (где $i, k = \overline{1, N}$), которое вытекает из (2). Формулы (5), (7), (8) задают искомый алгоритм решения уравнения (1).

Разработанный алгоритм дает возможность получать решение линейного матричного уравнения (1) для квадратных матриц A, B и S различного размера с точностью порядка 10^{-8} . Одним из частных случаев данного линейного уравнения является уравнение Ляпунова, когда $B = A^T$. Алгоритм достаточно прост и не требует больших затрат машинного времени. Его работоспособность проверена на матрицах размером до $N=6$ включительно.

Список литературы: 1. Беллман Р. Введение в теорию матриц: Пер. с англ. М., 1969. 367 с. 2. Фишман В. М. О решении матричного уравнения Ляпунова// Автоматика и телемеханика. 1981. № 1. С. 190—191. 3. Андреев Ю. И. Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976. 314 с. 4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967. 280 с.

Поступила в редколлегию 05.08.87

УДК 621.391

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, канд. физ.-мат. наук

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КАРУНЕНА—ЛОЭВА С ЯДРОМ, ОТВЕЧАЮЩИМ НОРМАЛЬНОМУ МАРКОВСКОМУ ПРОЦЕССУ

Задача об оптимальном обнаружении стохастических сигналов включает рассмотрение интегрального уравнения для резольвенты. В работе [1] даны результаты изучения однородного уравнения Карунена—Лоэва (УКЛ), а также неоднородного УКЛ, правая часть которого совпадает с подынтегральным ядром. Нами получено решение неоднородного УКЛ с произвольной правой частью, ядро которого является корреляционной функцией нормального марковского процесса (НМП).

Пусть $x(\tau)$ — НМП, $\dot{x} + \nu x = \xi(\tau)$, где ν — декремент; $\xi(\tau)$ — порождающий процесс, обладающий свойствами белого шума,

$\langle \xi(\tau) \xi(\tau') \rangle = \sigma \delta(\tau - \tau')$. Корреляционная функция НМП имеет вид [2]

$$K(\tau, \tau') = \frac{\sigma}{2\nu} \exp(-\nu |\tau - \tau'|). \quad (1)$$

Для произвольной заданной функции $f(\tau)$ резольвентное УКЛ на отрезке $[0, t]$ относительно искомой функции $\varphi(\tau)$ записывается так:

$$\varphi(\tau) + \lambda \int_0^t d\tau' K(\tau, \tau') \varphi(\tau') = f(\tau). \quad (2)$$

Здесь λ — параметр.

Решение уравнения (2) с ядром (1) можно найти, вводя вспомогательные функции

$$p(\tau) = -\frac{\sigma}{2\nu} \int_0^{\tau} d\tau' \exp(-\nu\tau + \nu\tau') \varphi(\tau');$$

$$g(\tau) = \frac{\sigma}{2\nu} \int_{\tau}^t d\tau' \exp(-\nu\tau' + \nu\tau) \varphi(\tau'),$$

для которых можно построить из (2) систему линейных уравнений и граничные условия. В результате имеем ($r = \sqrt{\nu^2 + \lambda\sigma}$):

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & f(\tau) + \frac{\lambda\sigma}{r} \int_0^{\tau} d\tau' f(\tau') \operatorname{sh} r(\tau - \tau') - \frac{2\lambda\sigma}{r} \times \\ & \times \frac{\nu \operatorname{ch} r\tau - r \operatorname{sh} r\tau}{D(\lambda, t)} \int_0^{\tau} d\tau' f(\tau') (\nu \operatorname{ch} r(t - \tau') - r \operatorname{sh} r(t - \tau')), \end{aligned} \quad (3)$$

где $D(\lambda, t)$ — детерминант Фредгольма [1],

$$D(\lambda, t) = 2\lambda\sigma \operatorname{ch} rt + 4r\nu \operatorname{sh} rt.$$

Из (3), в частности, следует, что математическое ожидание вида (см. [3], с. 494)

$$Q(\lambda) = M \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau (x(\tau) + f(\tau))^2 \right\},$$

составляет ($r_{\pm} = r \pm \nu$)

$$\begin{aligned} Q(\lambda) = & \frac{1}{\sqrt{D(\lambda, t)}} \exp \left\{ -\lambda \int_0^t d\tau f^2(\tau) + \frac{2\lambda\sigma/r}{D(\lambda, t)} \times \right. \\ & \left. \times \int_0^t d\tau \int_{\tau}^t d\tau' f(\tau) f(\tau') (r_+ e^{r\tau} + r_- e^{-r\tau})(r_+ e^{r(t-\tau')} + r_- e^{-r(t-\tau')}) \right\}. \end{aligned}$$

Полученное выражение не требует нахождения собственных функций ядра $K(\tau, \tau')$ и отвечающих им собственных чисел. Случай многокомпонентного марковского процесса может быть рассмотрен аналогично.

Список литературы: 1. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ. М., 1963. 430 с. 2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М., 1977. 488 с. 3. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1962. 752 с.

Поступила в редколлегию 08.12.87

УДК 62-83 : 621.313

С. В. ЭЛЛИС, канд. техн. наук, Е. Я. ЭДЕЛЬШТЕИН

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЯГОВЫХ КАНАТОВ ПАССАЖИРСКОЙ ПОДВЕСНОЙ КАНАТНОЙ ДОРОГИ

При проектировании подвесных канатных дорог возникает проблема предотвращения перехлестывания тягового и несущего канатов. Перехлестывание канатов в значительной степени зависит от интенсивности режимов разгона и торможения [2]. Обычно эти режимы подразделяют на рабочие и аварийные и характеризуют максимально допустимыми ускорениями 0,5 и 3,0 м/с². Выбор условий в первом случае определяется комфортом пассажиров, во втором — допустимой длиной пути, проходимого вагоном в аварийной ситуации.

Исследование динамики тягового каната ранее проводилось при следующих допущениях: влияние продольных колебаний на поперечные отсутствует, форма каната при колебаниях остается неизменной — параболической [2; 3]. Первое допущение не позволяет изучить динамику тяговых усилий, хотя ее важно знать при проектировании САУ приводом канатной дороги, второе не позволяет оценивать возможность перехлеста в произвольной точке каната.

Рассмотрим результаты исследований нестационарных совместных продольно-поперечных колебаний, возбуждаемых приводным двигателем при разгоне и торможении. Процесс взаимосвязанных колебаний тяговых канатов наиболее точно описывается уравнениями колебаний в частных производных с учетом начальных и граничных условий [1]. При данном виде возбуждения существенными являются колебания участков тягового каната по обе стороны вагона, колебаниями же несущего каната можно пренебречь [2]. Исходя из этого колебания вагона рассматриваются только в продольном направлении, а тягового каната — в продольном и поперечном. Таким образом, расчетная модель механической системы может быть представлена в виде сосредоточенной массы, которая перемещается по упругой нити, закрепленной в двух концах. Граничные условия учитывают кинематические особенности передачи, а начальные условия отражают статическое положение каната в момент начала переходных режимов.

Задача рассматривается в нелинейной постановке. Продольно-поперечные колебания принятой расчетной модели описываются системой двух взаимосвязанных нелинейных дифференциальных уравнений. Продольные усилия слабо зависят от поперечных колебаний [1]. Это позволяет линеаризировать уравнение продольных колебаний и отдельно решать краевую задачу продольных колебаний. Тогда она формулируется следующим образом:

$$\frac{q}{g} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 U_g}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (1)$$

Здесь q — линейная плотность каната; g — ускорение свободного падения; EF — жесткость каната; $f(x, t)$ — инерционная нагрузка на единицу длины.

Граничные условия

$$U_{\Delta}(l, t) = 0; EF \frac{\partial U_{\Delta}}{\partial x}(l_0 + l, t) = 0. \quad (2)$$

Начальные условия

$$U_{\Delta}(x, 0) = 0; \frac{\partial U_{\Delta}}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Полное продольное усилие определяется как сумма статического и динамического усилий:

$$T(x, t) = T_{ст}(x) + T_{\Delta}(x, t), \quad (4)$$

где $T_{ст}(x)$ — полные продольные усилия. Здесь $T_{\Delta}(x, t) = EF \frac{\partial U_{\Delta}(x, t)}{\partial x}$ (5),

где $U_{\Delta}(x, t)$ — динамическая составляющая продольных перемещений в точке x в момент времени t ; $T_{\Delta}(x, t)$ — динамическая составляющая продольных усилий.

Нелинейная краевая задача поперечных колебаний представляется в виде

$$\frac{q}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x, t) \frac{\partial W}{\partial x} \right] = P. \quad (6)$$

Граничные условия:

$$W(l_1, t) = 0, W(l_2, t) = 0. \quad (7)$$

Начальные условия:

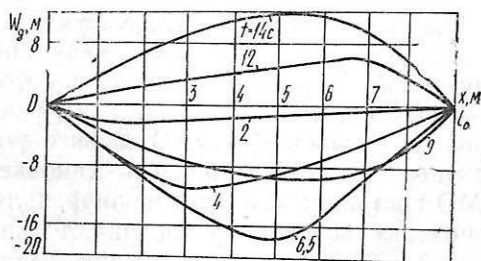
$$W(x, 0) = W_{ст}(x), \frac{\partial W(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Здесь $W_{ст}(x)$ — статический провес каната; P — весовая нагрузка на единицу длины. При расчете фиксировались динамические прогибы каната $W(x, t)$ в точке x в момент времени t . Тяговый канат разделяется на два участка вагоном с пассажирами. Динамические прогибы $W(x, t)$ могут быть найдены на любом участке.

Таким образом, методика определения продольных усилий и амплитуд поперечных колебаний следующая. Решая краевую задачу (1)–(3), рассчитываем динамические продольные перемещения в канате $U_{\Delta}(x, t)$, а затем по формулам (5), (4) — искомые продольные усилия $T(x, t)$. Формулируя краевую задачу (6)–(8) последовательно для первого и второго участков, вычисляем динамические прогибы каната в любой момент времени. Поставленная задача решена методом Галеркина с предварительным разложением искомых функций по собственным формам. При этом дифференциальные уравнения в частных производных были сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Последние решены численным методом Рунге—Кутты на ЭВМ БЭСМ-6.

Разработанный численный алгоритм позволяет устанавливать динамические продольные усилия и амплитуды поперечных колебаний тягового каната в любой точке во время разгона и торможения. По данной методике проведен анализ динамического поведения тягового каната пассажирской подвесной канатной дороги на пролете длиной 1925 м. Рассмотрено одно из самых неблагоприятных (по условиям развития колебаний) положений пассажирского вагона, когда он находится на нижней отметке рассматриваемого пролета. Для данного случая получены графики изменения динамических продольных усилий и поперечных прогибов по всей длине каната при различных режимах разгона и торможения.

Наиболее опасным режимом работы канатной дороги является аварийное торможение.



Этот процесс имитировался при внезапном приложении постоянного тормозного усилия. Расчетная длительность его действия равна 3,3 с исходя из допустимого тормозного пути и ускорения. Наибольшие тяговые усилия возникают в первый момент времени, и их уровень не превышает допустимого. Однако в силу периодического характера изменения тяговых усилий, оказывающих параметрическое воздействие на поперечные колебания, амплитуды последних могут быть весьма значительными. На рисунке даны кривые динамических прогибов тягового каната $W_d(x, t)$ в различные моменты времени при аварийном торможении. Амплитуда поперечных колебаний достигает 18 м, что соответствует коэффициенту динамичности 19 %. Таким образом, уровень поперечных колебаний при аварийном торможении существенно превышает допустимый 10 %-й уровень, принимаемый при проектировании канатных дорог.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что для данной задачи представление динамических прогибов каната параболической зависимостью правомерно только в случае максимальных прогибов (на рисунке при $t=6,5$ с). Форма динамических прогибов в остальные моменты времени существенно отличается от параболической, и максимум прогиба, как гребень волны, перемещается по длине каната, меняя свою амплитуду. Исследования показали, что при рабочих режимах разгона и торможения рассматриваемой канатной дороги амплитуды поперечных колебаний не являются опасными. Коэффициент динамичности составляет 6...7 %, что не превышает допустимого уровня 10 %.

Таким образом, разработанная методика дает возможность получить полную картину развития колебаний тяговых канатов на этапе проектирования, оценить тяговые усилия и поперечные прогибы во всех точках по длине канатной дороги в различные моменты времени. Это позволяет разрабатывать рекомендации по исключению захлестывания канатов и формулировать требования, предъявляемые к профилю канатной дороги.

Список литературы: 1. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной массы. К., 1971. 224 с. 2. *Колебания несущих и тяговых тросов в подвесных канатных дорогах/Торг.-пром. палата УССР. № 15621. X., 05.06.79.* 33 с. Пер. ст. Chitagi E. из журн.: Seilbahnbuch, 1975. 10, N 8. S. 21—54. 3. *Mukherjee S. N.* A contribution to the theory relating to the vertical swinging of ropes//Intern. Ropeway Rev. 1968. 10, N 4. P. 462—468. 4. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М., 1968. 828 с.

Поступила в редколлегию 07.12.87

УДК 519.152

Л. Г. РАСКИН, канд. техн. наук

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОДНОРОДНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

Математической моделью функционирования многих реальных объектов служит многоканальная система массового обслуживания (СМО) с отказами, на вход которой поступает неоднородный поток требований. Анализ таких систем проведен лишь для самых простых случаев [1—3]. В связи с этим рассмотрим задачу в следующей достаточно общей постановке. Пусть на вход n -канальной СМО поступает поток требований, являющийся суперпозицией пуассоновских потоков требований k типов с интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Распределение случайной продолжительности времени об-

служивания требования каждым из каналов системы будем считать экспоненциальным, а интенсивность — зависящей от типа требования и равной соответственно $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$. Характер рассуждений и структура математических выкладок совершенно аналогичны для любых $k > 1$. Поэтому, в целях наглядности, рассмотрим методику решения задачи анализа таких систем для случая, когда $k=2$.

Введем множество возможных состояний системы. Каждому состоянию поставим в соответствие пару чисел (i_1, i_2) , где i_1 — количество каналов, занятых обслуживанием требований первого типа, а i_2 — количество каналов, обслуживающих требования второго типа, причем $0 \leq i_1 \leq n, 0 \leq i_2 \leq n, i_1 + i_2 \leq n$. Распределение вероятностей $P_{i_1, i_2}(t)$ состояний системы в любой момент времени t удовлетворяет прямой системе уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned}
 p'_{0,0}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2) p_{0,0}(t) + \mu_1 p_{1,0}(t) + \mu_2 p_{0,1}(t); \\
 p'_{1,0}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) p_{1,0}(t) + \lambda_1 p_{0,0}(t) + \mu_2 p_{1,1}(t) + 2\mu_1 p_{2,0}(t); \\
 p'_{2,0}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1) p_{2,0}(t) + \lambda_1 p_{1,0}(t) + \mu_2 p_{2,1}(t) + 3\mu_1 p_{3,0}(t); \\
 &\dots \\
 p'_{n,0}(t) &= -n\mu_1 p_{n,0}(t) + \lambda_1 p_{n-1,0}(t); \\
 &\dots \\
 p'_{i_1, i_2}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + i_1\mu_1 + i_2\mu_2) p_{i_1, i_2}(t) + \lambda_1 p_{i_1-1, i_2}(t) + \\
 &+ \lambda_2 p_{i_1, i_2-1}(t) + (i_1 + 1)\mu_1 p_{i_1+1, i_2}(t) + (i_2 + 1)\mu_2 p_{i_1, i_2+1}(t), \\
 &\dots \\
 p'_{0,n}(t) &= -n\mu_2 p_{0,n}(t) + \lambda_2 p_{0,n-1}(t).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Для получения стационарного распределения положим $p_{i_1, i_2}(t) = p_{i_1, i_2}, 0 \leq i_1 \leq n, 0 \leq i_2 \leq n$. Тогда, вводя новые переменные

$$z_{i_1, i_2}^{(1)} = \lambda_1 p_{i_1-1, i_2} - i_1 \mu_1 p_{i_1, i_2}; \quad z_{i_1, i_2}^{(2)} = \lambda_2 p_{i_1, i_2-1} - i_2 \mu_2 p_{i_1, i_2},$$

преобразуем систему дифференциальных уравнений (1) в следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 z_{1,0}^{(1)} + z_{0,1}^{(2)} &= 0; \\
 z_{1,0}^{(1)} - z_{2,0}^{(1)} - z_{1,1}^{(2)} &= 0; \\
 z_{2,0}^{(1)} - z_{3,0}^{(1)} - z_{2,1}^{(2)} &= 0; \\
 &\dots \\
 z_{n,0}^{(1)} &= 0; \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$z_{i_1, i_2}^{(1)} - z_{i_1+1, i_2}^{(1)} + z_{i_1, i_2}^{(2)} - z_{i_1, i_2+1}^{(2)} = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_{0, n}^{(2)} = 0.$$

Система (2) имеет очевидное решение

$$z_{i_1, i_2}^{(1)} = 0, \quad 1 \leq i_1 \leq n, \quad 0 \leq i_2 \leq n; \quad z_{i_1, i_2}^{(2)} = 0, \quad 0 \leq i_1 \leq n, \quad 1 \leq i_2 \leq n,$$

откуда следует

$$p_{i_1, i_2} = \frac{\lambda_1}{i_1! \mu_1} p_{i_1-1, i_2}; \quad p_{i_1, i_2} = \frac{\lambda_2}{i_2! \mu_2} p_{i_1, i_2-1}.$$

Тогда

$$p_{1, i_2} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} p_{0, i_2}; \quad p_{i_1, 1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} p_{i_1, 0};$$

$$p_{2, i_2} = \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} p_{0, i_2}; \quad p_{i_1, 2} = \frac{\lambda_2^2}{2\mu_2^2} p_{i_1, 0};$$

.....

$$p_{k, i_2} = \frac{\lambda_1^k}{k! \mu_1^k} p_{0, i_2}; \quad p_{i_1, l} = \frac{\lambda_2^l}{l! \mu_2^l} p_{i_1, 0};$$

$$k = 1, 2, \dots, n - i_2; \quad l = 1, 2, \dots, n - i_1;$$

$$i_2 = 0, 1, 2, \dots, n - 1; \quad i_1 = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Из условия нормировки получаем

$$\sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{n-i_1} p_{i_1, i_2} = \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{\lambda_1^{i_1}}{i_1! \mu_1^{i_1}} p_{0, i_2} = \sum_{i_1=0}^n \frac{\lambda_1^{i_1}}{i_1! \mu_1^{i_1}} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{\lambda_2^{i_2}}{i_2! \mu_2^{i_2}} p_{0, 0} = 1;$$

$$p_{0, 0} = 1 / \sum_{i_1=0}^n \frac{\lambda_1^{i_1}}{i_1! \mu_1^{i_1}} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{\lambda_2^{i_2}}{i_2! \mu_2^{i_2}} = a.$$

При этом

$$p_{i_1, i_2} = \frac{\lambda_1^{i_1}}{i_1! \mu_1^{i_1}} \frac{\lambda_2^{i_2}}{i_2! \mu_2^{i_2}}; \quad p_{0, 0} = \frac{\alpha_1^{i_1}}{i_1!} \frac{\alpha_2^{i_2}}{i_2!} \left/ \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{\alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2}}{i_1! i_2!} \right.; \quad (3)$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}; \quad i_1 = 0, 1, \dots, n; \quad i_2 = 0, 1, \dots, n; \quad i_1 + i_2 \leq n.$$

Используя (3), рассчитываем вероятность отказа $p_{\text{отк}}$ и среднее число занятых каналов \bar{n}_3 . Имеем

$$\begin{aligned}
 p_{\text{отк}} &= \sum_{l=0}^n p_{l,n-l} = a \sum_{l=0}^n \frac{\alpha_1^l}{e!} \frac{\alpha_2^{n-l}}{(n-e)!} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^n}{n!} \frac{1}{\sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{\alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2}}{i_1! i_2!}}; \quad (4) \\
 \bar{n}_3 &= \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{n-i_1} (i_1 + i_2) p_{i_1, i_2} = a \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{n-i_1} (i_1 + i_2) \frac{\alpha_1^{i_1}}{i_1!} \frac{\alpha_2^{i_2}}{i_2!} = \\
 &= a \left[\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{n-i_1} (i_1 + i_2) \frac{\alpha_1^{i_1}}{i_1!} \frac{\alpha_2^{i_2}}{i_2!} + (i_1 + i_2) \left(\sum_{i_1=1}^n \frac{\alpha_1^{i_1}}{i_1!} + \sum_{i_2=1}^n \frac{\alpha_2^{i_2}}{i_2!} \right) \right] = \\
 &= a \left[\alpha_1 \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{n-i_1} \frac{\alpha_1^{i_1-1}}{(i_1-1)!} \frac{\alpha_2^{i_2}}{i_2!} + \alpha_1 \sum_{i_1=1}^n \frac{\alpha_1^{i_1-1}}{(i_1-1)!} + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha_2 \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=1}^{n-i_2} \frac{\alpha_2^{i_2-1}}{(i_2-1)!} \frac{\alpha_1^{i_1}}{i_1!} + \alpha_2 \sum_{i_2=1}^n \frac{\alpha_2^{i_2-1}}{(i_2-1)!} \right] = \\
 &= a \left[\alpha_1 \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{\alpha_1^{i_1-1}}{(i_1-1)!} \frac{\alpha_2^{i_2}}{i_2!} + \alpha_2 \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=0}^{n-i_2} \frac{\alpha_2^{i_2-1}}{(i_2-1)!} \frac{\alpha_1^{i_1}}{i_1!} \right] = \\
 &= \frac{a}{s=i_2-1} \left[\alpha_1 \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{n-r-1} \frac{\alpha_1^r}{r!} \frac{\alpha_2^{i_2}}{i_2!} + \alpha_2 \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{i_1=0}^{n-s-1} \frac{\alpha_2^s}{s!} \frac{\alpha_1^{i_1}}{i_1!} \right] = \\
 &= a \left[(\alpha_1 + \alpha_2) \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{n-i_1-1} \frac{\alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2}}{i_1! i_2!} \right] = a (\alpha_1 + \alpha_2) \left[\sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{\alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2}}{i_1! i_2!} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=0}^n \frac{\alpha_1^l \alpha_2^{n-l}}{l! (n-l)!} \right] = (\alpha_1 + \alpha_2) \left(1 - a \sum_{l=0}^n \frac{\alpha_1^l \alpha_2^{(n-l)}}{l! (n-l)!} \right) = \\
 &= (\alpha_1 + \alpha_2) (1 - p_{\text{отк}}). \quad (5)
 \end{aligned}$$

Рассуждая совершенно аналогично, легко получить соответствующие (3)–(5) соотношения для произвольного $k > 2$. В целях компактной их записи введем множество $J_{n,k}$ наборов (i_1, i_2, \dots, i_k) , отображающих возможные состояния системы,

$$J_{n,k} = \{(i_1, i_2, \dots, i_k): 0 \leq i_l \leq n, l = 1, 2, \dots, k, \sum_{l=1}^k i_l \leq n\}.$$

При этом вероятность того, что в произвольный момент времени в установившемся режиме работы системы обслуживанием требований l -го типа занято ровно i_l каналов, $l=1, 2, \dots, k$, определяется выражением

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \prod_{l=1}^k \frac{\alpha_l^{i_l}}{i_l!} \left(\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in J_{n,k}} \prod_{l=1}^k \frac{\alpha_l^{i_l}}{i_l!} \right)^{-1},$$

а вероятность отказа и среднее число занятых каналов вычисляются по формулам

$$p_{\text{отк}} = \frac{\left(\sum_{l=1}^k \alpha_l \right)^n}{n!} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in J_{n,k}} \prod_{l=1}^k \frac{\alpha_l^{i_l}}{i_l!};$$

$$\bar{n}_3 = (1 - p_{\text{отк}}) \sum_{l=1}^k \alpha_l.$$

Список литературы: 1. Саати Т. П. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения: Пер. с англ. М., 1971. 520 с. 2. Новиков О. А., Петухов С. И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. М., 1969. 289 с. 3. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М., 1969. 324 с.

Поступила в редколлегию 07.12.87

УДК 519

С. Л. МАГАС, канд. физ.-мат. наук, Л. Н. НАУМОВ

ПОКРЫТИЕ ПОЛНОГО ОРГРАФА ОПТИМАЛЬНЫМ НАБОРОМ ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ И ЦЕПЕЙ

При выборе оптимальных структур ряда распределенных систем, а также при организации оперативного управления в таких системах часто используют аппарат теории графов, позволяющий наглядно описать состояния системы, связи между ними и, что наиболее существенно, построить математическую модель оптимизационной задачи. Наиболее распространены маршрутные задачи на графах. Они связаны с выбором оптимальных маршрутов, соединяющих определенное число вершин графа. Задачи эти возникают, например, в случае синтеза и управления распределенными системами обработки данных, создания систем тестирования и диагностики многофункциональных объектов, оптимизации процесса материально-технического снабжения. Если систему можно представить полным оргграфом без потерь с заданным весом c_{ij} любого ребра (i, j) (в общем случае $c_{ij} \neq c_{ji}$), то под оптимальным маршрутом понимают, как правило, маршрут минимального или максимального суммарного веса, который обладает определенными свойствами. В частности, маршрут может быть остовным деревом [1] или гамильтоновым циклом (задача коммивояжера) [1; 2]. Алгоритмы решения таких задач для полного оргграфа базируются на методе ветвей и границ [2]. Однако уже при сравнительно небольшом числе вершин эти алгоритмы пригодны лишь для получения приближенных решений.

Рассмотренные ниже методы предложены для решения особой маршрутной задачи, состоящей в поиске минимального по весу покрытия вершин графа простыми циклами или простыми цепями и циклами. Надо заметить, что если полученное оптимальное покрытие представлено одним простым циклом, то им

является минимальный по весу гамильтонов цикл. Сущность нового подхода состоит в построении математической модели задачи в виде известной модели транспортной задачи с булевыми переменными [3]. Это позволяет воспользоваться известными методами решения, что даст возможность отыскать оптимум за относительно малое время при размерностях задачи значительно больших, чем допустимые при применении отмеченных выше переборных методов.

Рассмотрим постановку задачи о минимальном покрытии всех n вершин полного орграфа простыми циклами. Введем переменные величины

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } (i, j), \text{ где } i \neq j, \text{ входит в покрытие;} \\ 0, & \text{если ребро не входит в покрытие или } i = j, \end{cases} \quad (1)$$

$\forall i, j \in N = \{1, \dots, n\}$. Тогда всякая вершина i , входя в один и только один простой цикл, является началом одного и только одного ребра из этого цикла. Данное требование выражено ограничениями следования

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N. \quad (2)$$

Аналогично, каждая вершина j имеет одно и только одно входящее ребро из простого цикла, т. е. должны соблюдаться ограничения предшествования

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N. \quad (3)$$

Необходимость поиска минимального по весу покрытия выражена функцией цели

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min. \quad (4)$$

Решение транспортной задачи (2)–(4) всегда целочисленно [2]. Нетрудно показать, что его компоненты всегда имеют вид (1).

Аналогичным образом строятся математические модели задач о минимальных покрытиях графа простыми цепями и циклами. Так, простая цепь имеет: начало, из которого выходит одно и только одно ребро, но куда не входит ни единого; конец, куда входит одно и только одно ребро, но откуда не выходит ни единого; промежуточные вершины с одним входящим и одним выходящим ребрами. При постановке описанных задач известен набор вершин, которые могут быть только начальными, либо набор конечных вершин, либо оба таких непересекающихся набора. В любом из этих трех случаев требуется построить такие простые цепи, а не вошедшие в цепи вершины объединить такими простыми циклами, чтобы суммарный вес использованных в покрытии ребер был минимален.

Рассмотрим задачу, когда задан набор из p вершин $J = \{j_1, \dots, j_p\}$, которые могут быть только начальными. Они не имеют входящих ребер, а значит, $x_{ij} = 0, \forall j \in J, i \in N$ и из ограничений предшествования надо исключить p строк с номерами из множества J . При этом будет получена система

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N/J. \quad (5)$$

Присущие данной задаче ограничения следования строятся в предположении о том, что у некоторых p вершин нет выходящих ребер (у всякой простой цепи есть один конец). Данные ограничения представлены системой

$$\sum_{j \in N/J} x_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in N. \quad (6)$$

Целевая функция имеет вид (4), а значит, сформулирована транспортная задача открытого типа. Она решается, как известно, сведением к задаче закры-

того типа посредством ввода в систему (6) переменных недостатка $x_i \geq 0$, $\forall i \in N$ [3]. Указанные переменные дополняют неравенства (6) до уравнений и отвечают равенству

$$\sum_{i=1}^n x_i = p.$$

Чтобы значения переменных недостатка не влияли на поведение функции цели задачи, положим здесь и в дальнейшем, что они входят в функцию цели с нулевыми коэффициентами.

Аналогичным образом строится модель задачи при заданном множестве из q вершин $I = \{i_1, \dots, i_q\}$, которые могут быть только конечными. Эти вершины не имеют входящих ребер, а значит, $x_{ij} = 0$, $\forall i \in I, j \in N$ и из ограничений следования надо исключить q строк. В результате образуется система

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i \in N \setminus I. \quad (7)$$

Ограничения предшествования здесь выражают тот факт, что q вершин не имеют входящего ребра (у всякой простой цепи есть одно начало). Это описано системой неравенств

$$\sum_{i \in N \setminus I} x_{ij} \leq 1, \forall j \in N. \quad (8)$$

Задача (4), (7), (8) также сводится к закрытой модели транспортной задачи, но уже с помощью переменных недостатка $y_j \geq 0$, $\forall j \in N$, добавляемых в неравенства системы (8) для получения уравнений и отвечающих свойству

$$\sum_{j=1}^n y_j = q.$$

Обобщением рассмотренного служит вариант постановки, когда заданы множества $J \neq \emptyset$, $I \neq \emptyset$ и $J \cap I = \emptyset$. Здесь $x_{ij} = 0$, $\forall j \in J, i \in N$ и $x_{ij} = 0$, $\forall i \in I, j \in N$. А ограничения следования и предшествования примут вид (соответственно)

$$\sum_{j \in N \setminus J} x_{ij} \leq 1, \forall i \in N \setminus I \quad (9); \quad \sum_{i \in N \setminus I} x_{ij} \leq 1, \forall j \in N \setminus J \quad (10).$$

Для приведения задачи (4), (9), (10) к транспортной задаче закрытого типа в неравенства системы (9) добавляются переменные недостатка $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n - q$, а в неравенства системы (10) — переменные $y_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n - p$, которые должны отвечать условиям

$$\sum_{i=1}^{n-q} x_i = p; \quad \sum_{j=1}^{n-p} y_j = q.$$

Таким образом, задачи об оптимальном покрытии вершин графа простыми циклами и цепями в рассмотренной постановке могут быть поставлены как транспортные задачи линейного программирования с булевыми переменными. Это позволяет отыскивать точное решение в задачах большой размерности, причем за реально допустимое время. Кроме того, имеется возможность простой проверки оптимальности любого решения, найденного приближенным методом.

Список литературы: 1. Харари Ф. Теория графов: Пер. с англ. М., 1973. 300 с. 2. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. М., 1969. 368 с. 3. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2 кн.: Пер. с англ. М., 1985. Кн. 1. 479 с.

Поступила в редколлегию 07.12.87

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСАХ

Рассмотрим линейную распределительную задачу в дискретной постановке (задача о назначениях) при ограничениях на требуемые ресурсы. В общем случае математическая модель задачи может быть представлена в следующей форме. Найти

$$F(\xi^*) = \max \sum_{i,j} u_{ij} \xi_{ij} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} \omega_i \xi_{ij} \leq \sum_{p \in P_j} B_{pj} \eta_{pj}, \quad j \in J; \quad (2)$$

$$\sum_{i,p} A_{pj} \eta_{pj} \leq R \quad (3); \quad \sum_{j \in J} \xi_{ij} = 1, \quad i \in I \quad (4);$$

$$\sum_{p \in P_j} \eta_{pj} \leq 1, \quad j \in J; \quad (5)$$

$$\xi_{ij}, \eta_{pj} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad p \in P_j. \quad (6)$$

Задача (1)–(6) может быть интерпретирована как задача оптимизации назначения элементов множества I (заявок) с весовыми коэффициентами ω_i , $i \in I$ элементам множества J (обслуживаемым центрам). Для последних известны множества вариантов развития P_j , $j \in J$, задающие прирост мощности B_{pj} и требуемые ресурсы (капитальные вложения) A_{pj} при ограничениях на суммарный объем ресурса. Переменные ξ_{ij} определяют назначение заявок, а переменные η_{pj} связывают назначение с выбором вариантов развития [1]. Данная задача является NP -полной [2]. Поэтому представляет особый интерес разработка эффективных алгоритмов быстрого получения субоптимальных решений.

Нами предлагается подход к решению рассматриваемой проблемы, основанный на преобразовании исходной задачи с помощью модифицированной функции Лагранжа. Сформируем функцию Лагранжа для усеченной задачи (1)–(3):

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i,j} u_{ij} \xi_{ij} + \sum_j \lambda_j \left(\sum_p B_{pj} \eta_{pj} - \sum_i \omega_i \xi_{ij} \right) + \lambda_0 \left(R - \sum_{j,p} A_{pj} \eta_{pj} \right) = \\ &= \sum_{i,j} (u_{ij} - \lambda_j \omega_i) \xi_{ij} + \sum_{i,p} (\lambda_j B_{pj} - \lambda_0 A_{pj}) \eta_{pj} + \lambda_0 R. \end{aligned}$$

Ограничения (4)–(6) задают область определения функции.

Анализ полученного выражения показывает, что, если известны оптимальные значения множителей $\{(\lambda_j, \lambda_0)\}$, вследствие действия ограничений (4)–(6) значения переменных, равные единице, в оптимальном решении задачи обусловлены максимальными коэффици-

циентами при неизвестных ξ_{ij} для каждого $i \in I$. Аналогичный вывод имеет место для переменных η_{pj} , если соблюдается дополнительное требование положительности этих коэффициентов из-за наличия условия (5). Однако использование функций Лагранжа в дискретном программировании не гарантирует нахождения оптимального решения задачи по причине разрыва двойственности. Поэтому предлагается вместо поиска оптимальных множителей Лагранжа последовательно осуществлять назначения по указанному выше способу, начиная с назначения, сформированного при $\lambda_j = 0, j \in J, \lambda_0 = 0$, что соответствует релаксации ограничений (2), (3). Каждое последующее назначение должно отличаться от предыдущего значением одной компоненты, минимальным изменением целевой функции и более близким расположением к допустимой области. Для этого заменим в приведенной форме функции Лагранжа множители λ_j множителями λ_{ij} . Отличие последних от исходных состоит в том, что их варьирование обуславливает изменение одноименных компонент назначения, полученного согласно приведенным положениям, в случае нарушения одного из ограничений (2) или (3).

Приведем процедуру выбора значений основных переменных задачи. Найдем

$$j^* = \operatorname{argmax}_j \{u_{ij}/\omega_i - \lambda_{ij}\}. \quad (7)$$

Тогда

$$\xi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j^*; \\ 0 & \forall j \in J, j \neq j^*. \end{cases} \quad (8)$$

Положим $\lambda_j = \max_i \lambda_{ij}, j \in J.$ (9)

Определим $p^* = \operatorname{argmax}_p \{\lambda_j B_{pj} - \lambda_0 A_{pj}\}, j \in J.$ (10)

Если $\lambda_j B_{p^*j} - \lambda_0 A_{p^*j} \leq 0$, то $\forall p \in P_j: \eta_{pj} = 0,$ (11)

иначе

$$\eta_{pj} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = p^*; \\ 0 & \forall p \in P_j, p \neq p^*. \end{cases} \quad (12)$$

Для реализации предложенной схемы необходимо на каждой r -й итерации формировать вектор поиска $\varphi^r = \{(\varphi_{ij}^r), \varphi_0^r\}$, задающий координаты назначения, которые могут быть подвергнуты изменению. Компоненты вектора φ^r зададим следующим образом:

$$\varphi_{ij}^r = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} < 0 \text{ и } \xi_{ij}^r = 1; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad \varphi_0^r = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} < 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Получим новые значения компонент λ^{r+1} для следующей итерации, соответствующие назначению, которое удовлетворяет перечисленным ранее требованиям. Для этого определим скалярную

величину $\rho^* = \min_{\rho > 0} \rho$ при условии, что $\lambda^{r+1} = \lambda^r + \varphi^r \rho$ обеспечивает допустимое изменение назначения одной заявки по выражениям (7) — (12). Тогда ρ^* соответствует минимальному изменению целевой функции при переходе к новому назначению.

Выполнение данной процедуры позволяет за конечное число шагов найти субоптимальное решение задачи (1) — (6) в силу минимальных изменений оптимизируемого функционала в процессе приближения к допустимой области.

Отметим, что полученные с помощью данного подхода компоненты λ_{ij} несут информацию об условных потерях для целевой функции в ходе изменения назначения относительно начального значения.

Чтобы установить значения λ_{ij} для компонент распределения, оставшихся неизменными в ходе получения допустимого решения, итерационный процесс следует продолжить до тех пор, пока неизменной останется лишь одна компонента назначения. В результате придем к обратной задаче «рюкзачного» типа: максимизировать сумму возмещаемых условных потерь путем восстановления компонент назначения с учетом ограничений на производственные мощности центров обслуживания. Формально обратная задача может быть описана следующей математической моделью. Найти

$$\mu(\xi^*) = \max \sum_{j \in J'} \sum_{i \in I} \omega_i \lambda_{ij} \xi_{ij} \quad (13)$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} \omega_i \xi_{ij} \leq B_{kj}, \quad j \in J' \quad (14); \quad \sum_{j \in J'} \xi_{ij} \leq 1, \quad i \in I \quad (15);$$

$$\xi_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J'. \quad (16)$$

Выражения (13) — (16) представляют собой задачу линейного целочисленного программирования с булевыми переменными существенно меньшей размерности по сравнению с исходной. Действительно, если допустимое множество задачи (1) — (6) непустое, то $|J'| < |J|$, так как $J' = \{j \in J : \lambda_{ij} > 0\}$ и $|J'|$ определяется количеством нарушенных ограничений в процессе формирования распределений. Кроме этого, в задаче (13) — (16) отсутствуют переменные выбора варианта развития η_{pj} , значения которых найдены на этапе получения допустимого распределения (B_{kj} — соответствующие им мощности).

Предлагаемые преобразования позволяют не только сократить размерность, но и построить простой алгоритм получения приближенного решения обратной задачи. В сочетании с методом ветвей и границ он дает возможность оценить отклонение промежуточного решения от оптимума и за конечное число шагов получить оптимальное решение.

Рассмотрим содержание этого алгоритма. Среднее значение условных потерь для j -го центра находится по формуле

$$\lambda_{срj} = \sum_{i \in I'_j} \lambda_{ij} \omega_i / \sum_{i \in I'_j} \omega_i,$$

где $I'_j = \{i \in I: \lambda_{ij} > 0\}$, $j \in J'$.

Разделим $\forall j \in J'$ множество I'_j на два непересекающиеся подмножества:

$$I'_j = I'_{1j} \cup I'_{2j}; I'_{1j} = \{i \in I'_j: \lambda_{ij} > \lambda_{срj}\}; I'_{2j} = I'_j \setminus I'_{1j}.$$

Элементы множеств I'_{1j} , $j \in J'$ по сравнению с элементами множеств I'_{2j} , $j \in J'$ характеризуются более эффективным использованием единицы производственной мощности. Поэтому сначала проверяется возможность назначения элементов $i \in UI'_{1j}$. Критерием назначения является максимум значения λ_{ij} , а условием — выполнение соответствующего ограничения (14). Затем, если не все ограничения (14) активны, аналогично проверяется возможность назначения элементов $i \in UI'_{2j}$. Здесь критерием является максимум значения произведения $\lambda_{ij} \omega_i$. Найденное решение может использоваться в качестве нижней оценки (рекорда) в схеме метода ветвей и границ.

Для получения верхней оценки необходимо решить задачу (13)—(15) линейного программирования (ЛП) с условием неотрицательности переменных. Учитывая наличие ограничений «рюкзачного» типа (15), можно предложить более простой алгоритм, чем алгоритмы ЛП. Его суть заключается в последовательном назначении элементов $i \in UI'_j$ согласно критерию максимума λ_{ij} при условии выполнения ограничений (14). Если во время очередного назначения некоторое ограничение (14) нарушается, назначается допустимая часть заявки, а остаток определяет ее новый вес, и процесс продолжается.

Для оценки эффективности предлагаемых действий был проведен ограниченный численный эксперимент. В качестве сравниваемых вариантов взяты пакет прикладных программ (ППП) ЛП АСУ, алгоритм метода ветвей и границ прямого решения исходной задачи, использующий симплекс-метод для получения оценки, и файл прямого доступа для хранения базисной матрицы, а также представленные здесь алгоритмы. В результате решена серия из 10 задач фиксированной размерности $|I|=12$, $|J|=11$, $\forall j: |P_j|=2$ с изменениями коэффициентов u_{ij} , B_{pj} при относительной погрешности 10 % в среде подсистемы диалоговой обработки системы виртуальных машин (ПДО СВМ) ЕС-1061 и в среде ОС ЕС-1022. Решение задач на ЕС-1022 показало, что ППП ЛП АСУ требует от 57 до 81 мин процессорного времени на задачу, алгоритм метода ветвей и границ прямого решения — от 23 до 28 мин. Решение задач с помощью последнего алгоритма на ЭВМ ЕС-1061 занимало от 3,4 до 4,5 мин. Предлагаемые алгоритмы

мы на решение задач серии в тех же условиях затрачивали от 4,1 до 5,5 с, причем искомое решение получалось в результате первого применения алгоритма вычисления нижней оценки с относительной погрешностью не более 3 %.

Список литературы: 1. Шевченко С. В. О декомпозиции задачи развития и размещения систем технического обслуживания // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1985. № 220: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 5. С. 35—38. 2. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. К., 1985. 384 с.

Поступила в редколлегию 27.11.87

УДК 681.51

Р. Е. ЛАСЕНКО

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТУРБОГЕНЕРАТОРА

Большая единичная мощность энергоблока электростанции определяет высокие требования к системе регулирования [1]. Следовательно, при создании этой системы необходима адекватная модель объекта. Уравнение линейной модели турбогенератора в операторной форме записывается следующим образом:

$$N(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + s^3} M(s). \quad (1)$$

Здесь $N(s)$ — изображение функции мощности турбогенератора; s — оператор Лапласа; $a_i, b_i (i=0, 2)$ — параметры модели турбогенератора; $M(s)$ — изображение функции входной координаты — относительного положения заслонки главного клапана. Порядки числителя и знаменателя передаточной функции модели выбраны в соответствии с рекомендациями работы [2].

Наиболее точным и достоверным способом нахождения коэффициентов передаточной функции является идентификация по частотным характеристикам объекта [3]. Однако получение таких характеристик на действующем турбогенераторе физически невозможно. Поэтому приходится использовать результаты испытаний на электростанциях, когда известны функция перемещения главного клапана $\mu(t)$ и функция мощности турбогенератора $v(t)$.

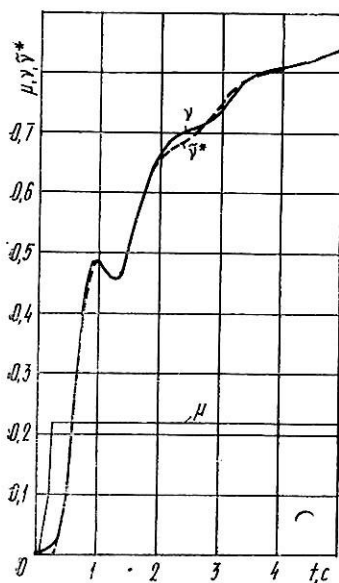
Определение векторов \bar{a}, \bar{b} может быть сведено к минимизации функционала

$$I_0(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^{25} |\tilde{v}(\bar{a}, \bar{b}, t_i) - v(t_i)|, \quad (2)$$

где $v(\bar{a}, \bar{b}, t_i)$ — значения оригинала изображения функции входной координаты модели в моменты времени t_i . Вычисление $\tilde{v}(\bar{a}, \bar{b}, t_i)$ производится для каждого варианта \bar{a}, \bar{b} интегрированием системы дифференциальных уравнений, соответствующей

Время t, c	Координата сер- вомотора μ	Относительная мощность турбо- генератора γ	Выходная коор- дината модели γ^*
0,06	0,006	0,01360	-0,0001
0,11	0,033	0,00362	-0,0014
0,17	0,089	0,00362	-0,0040
0,22	0,141	0,00452	-0,0061
0,28	0,217	0,00904	-0,0032
0,32	0,217	0,01810	0,0065
0,37	0,217	0,03070	0,0307
0,42	0,217	0,06010	0,0665
0,52	0,217	0,128	0,163
0,62	0,217	0,272	0,272
0,7	0,217	0,363	0,352
0,8	0,217	0,442	0,428
1,0	0,217	0,485	0,485
1,1	0,217	0,476	0,478
1,3	0,217	0,461	0,461
1,5	0,217	0,497	0,494
1,8	0,217	0,608	0,608
2,1	0,217	0,681	0,667
2,4	0,217	0,702	0,676
2,8	0,217	0,720	0,726
3,1	0,217	0,755	0,762
3,5	0,217	0,794	0,779
4,0	0,217	0,808	0,809
5,0	0,217	0,841	0,841

передаточной функции (1). При этом используется непрерывная функция $\mu(t)$, заданная в виде таблицы значений в фиксированные моменты времени t_i . Значения функции находятся с помощью параболической интерполяции.



Минимизацию функционала (2) можно реализовать каким-либо численным методом нелинейного программирования. Если функция выходной координаты не имеет колебательной составляющей, минимизация известными методами дает хорошие результаты, обеспечивая практически полное совпадение теоретической и экспериментальной функций выходной координаты. В случае, когда выходная реакция объекта содержит колебательную составляющую, поиск оптимальных векторов \bar{a} и \bar{b} затрудняется: при удовлетворении критерию останова в процедуре минимизации выходная функция реакции модели остается монотонной. От такого недо-

статка можно избавиться, используя функционал, зависящий от производных функций выходной координаты:

$$I_1(a, b) = \sum_{i=1}^{25} \left| \frac{d}{dt} \tilde{v}(a, b, t_i) - \frac{d}{dt} v(t_i) \right|.$$

Целевую функцию для процедуры минимизации можно поставить как линейную комбинацию функционалов $I_0(\bar{a}, \bar{b})$, $I_1(\bar{a}, \bar{b})$: $I(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha_0 I_0(a, b) + \alpha_1 I_1(\bar{a}, \bar{b})$, где α_0 , α_1 — эмпирические коэффициенты. Однако выбор коэффициентов α_0 , α_1 вызывает затруднения. Поэтому представляет интерес поиск минимума $I_0(\bar{a}, \bar{b})$ в подобласти параметров \bar{a} , \bar{b} , соответствующей условию $I_1(\bar{a}, \bar{b}) < \beta$. Предложенный подход существенно облегчает задачу, поскольку выбор коэффициента β несложен. Его значение рекомендуется брать в диапазоне $\beta = (0,01 \dots 0,05) \sum_{i=1}^{25} \left| \frac{d}{dt} v(t_i) \right|$. При больших значениях не обеспечивается начальное приближение колебательных составляющих, при меньших — замедляется поиск требуемой области.

При решении такого рода задач эффективна процедура многокритериальной иерархической оптимизации [4]. Для ее работы необходимо сформировать иерархическую последовательность критериев:

$$f_1(\bar{a}, \bar{b}) = I_0(a, b); f_2(a, b) = \max\{0, I_1(a, \bar{b}) - \beta\}.$$

Поиск минимума функционала $I_0(a, b)$ осуществляется в подобласти параметров a , b , удовлетворяющей неравенству $I_1(a, \bar{b}) < \beta$. Если векторы неизвестных параметров не удовлетворяют последнему неравенству, происходит минимизация функционала $I_1(\bar{a}, \bar{b})$.

Получены следующие значения параметров турбогенератора: $b_0 = 85,912$; $b_1 = 18,295$; $b_2 = -1,934$; $a_0 = 21,204$; $a_1 = 35,211$; $a_2 = 2,813$.

Соответствующая функция выходной координаты $\tilde{v}^*(t)$, представленная в таблице и на рисунке, отражает колебательный характер экспоненциальной функции $v(t)$. Эти функции практически совпадают.

Математическая модель турбогенератора в форме (1) с полученными значениями параметров необходима при анализе устойчивости системы регулирования турбины по мощности, при оптимальном выборе структуры и коэффициентов обратных связей системы регулирования.

Список литературы: 1. Ковалев Ю. Ф. Совершенствование паровых и газовых турбин и объединение электростанций. 1987. № 6. С. 4—10. 2. Стернинсон Л. Д. Переходные процессы при регулировании частоты и мощности в энергосистемах. М., 1978. 216 с. 3. Грон Э. Методы идентификации систем: Пер. с англ. М., 1979. 302 с. 4. Голубков И. Г., Сиверин В. П. Модификация метода деформируемого многогранника для оптимизации иерархической последовательности критериев // Вестн. Урал. политех. ин-та. 1986. № 229: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 6. С. 27—30.

Поступила в редакцию 10.12.87