

ВЕСТНИК



Харьковского
Политехнического
Института

240'87

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 7

»ВИЦА ШКОЛА«

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК

Харьковского политехнического института

№ 240

**ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Основан в 1979 г.

ВЫПУСК 7

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1987

УДК 007

В вестнике решены задачи синтеза оптимального управления системами с распределенными параметрами, идентификации динамических систем и оптимального разворота твердого тела. Представлены результаты исследования и математического моделирования электрогидравлического преобразователя. Описан синтез управления автоматическими манипуляторами. Изложены методы моделирования процесса функционирования робототехнических систем. Предложены решения распределительных и транспортных задач.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1987 г. Для преподавателей, научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: Е. Г. Голоскоков (отв. ред), Н. И. Безменов (отв. секр.), В. Б. Гринев, А. В. Дабагян, Ю. Т. Костенко, В. Л. Лисицкий, Ю. А. Фролов

Адрес редакционной коллегии: 310002, Харьков-2, ул. Фрунзе, 21, политехнический институт, инженерно-физический факультет, тел. 40-04-75.

Редакция научно-технической литературы
Зав. редакцией Л. А. Гаврилова

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 240

Техническая кибернетика и ее приложения

Выпуск 7

Редактор Н. А. Парфенова
Художественный редактор В. Е. Петренко
Технический редактор Л. Т. Ена
Корректор А. Г. Долгова

Н/К

Сдано в набор 08.07.86. Подп. в печать 17.11.86. БЦ 08792. Формат 60×90/16. Бумага для гл. печ. Лит. гарн. Выс. печать. Печ. л. 5,5. Кр.-отт. 5,75. Уч.-изд. л. 6. Тираж 500 экз. Изд. № 1477. Зак. 6-240. Цена 85 к. Заказное.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа». 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Харьковская книжная фабрика «Коммунист», 310012, Харьков-12, ул. Энгельса, 11

Издано по заказу Харьковского политехнического института

В 1502000000-005
М226(04)-87

© Харьковский политехнический институт, 1987

АДАПТИВНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Проблема управления системами с распределенными параметрами возникает при решении разнообразных задач оптимизации теплофизических, гидродинамических и иных процессов, связанных с переносом массы или энергии. Наиболее полно разработаны методы программного оптимального управления распределенными системами [1]. Значительный интерес представляет также синтез распределенных систем управления с обратной связью, необходимый для решения задач стабилизации и слежения, особенно в практически важном случае — при отсутствии полной информации о параметрах системы. Решение задач адаптивного управления системами с сосредоточенными параметрами может быть получено на основе ранее предложенного метода скоростного градиента, обобщающего известные методы эталонной и настраиваемой модели [2]. Рассмотрим применение указанного метода для решения задачи адаптивного управления распределенной системой, в которой в качестве управляющих воздействия выступают изменяющиеся краевые условия.

Исследуем систему с распределенными параметрами, описываемую уравнениями вида

$$\frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0;$$

$$\frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0; \quad \left[\frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} + \beta Q(\xi, t) \right]_{\xi=\xi_0} = u(t). \quad (1)$$

Здесь $Q(\xi, t)$ — функция состояния распределенной системы на интервале изменения пространственной переменной $[0, \xi_0]$; $u(t)$ — внешнее управляющее воздействие; α, β — постоянные параметры системы. Пусть измерению доступно значение функции состояния в фиксированной точке ξ_M локализации измерительного устройства, т.е. $y(t) = Q(\xi_M, t)$. Предполагается, что управление системой реализовано в виде закона обратной связи по измеряемой переменной $u(t) = cy(t)$. Задача заключается в построении алгоритма настройки коэффициента обратной связи c , обеспечивающего выполнение цели управления при неизвестных параметрах α, β .

Решение поставленной задачи связано с построением конечно-мерной аппроксимации системы (1) методом конечных интеграль-

ных преобразований [2]. Используя конечное косинус-преобразование по пространственной переменной ξ

$$Q^*(\lambda_i, t) = \int_0^{\xi_0} Q(\xi, t) \cos(\lambda_i \xi) d\xi,$$

приведем уравнения (1) к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно изображений $Q^*(\lambda_i, t)$:

$$\frac{dQ^*(\lambda_i, t)}{dt} = -a\lambda_i^2 Q^*(\lambda_i, t) + b_i u(t), \quad (2)$$

где $b_i = \lambda_i (\lambda_i^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Собственные числа λ_i являются корнями трансцендентного уравнения $\lambda \operatorname{tg}(\lambda \xi_0) = \beta$.

С помощью обратного преобразования

$$Q(\xi, t) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_i \xi) Q^*(\lambda_i, t)}{\xi_0 + \frac{\beta}{\lambda_i^2 + \beta^2}}$$

представим управляющее воздействие в виде

$$u(t) = c \sum_{i=1}^{\infty} L_i Q^*(\lambda_i, t). \quad (3)$$

Здесь

$$L_i = \frac{2 \cos(\lambda_i \xi_M)}{\xi_M + \frac{\beta}{\lambda_i^2 + \beta^2}}.$$

Ограничившись конечным числом n членов разложения функции состояния системы, запишем уравнения (2), (3) в матричной форме:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + cbL^T)x(t), \quad (4)$$

где

$$x(t) = (Q^*(\lambda_1, t), Q^*(\lambda_2, t), \dots, Q^*(\lambda_n, t))^T;$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, \quad L^T = (L_1, L_2, \dots, L_n);$$

$$A = \operatorname{diag}(-a\lambda_1^2, -a\lambda_2^2, \dots, -a\lambda_n^2);$$

T — знак транспонирования.

Пусть цель управления — обеспечение близости движения системы (4) к движению, задаваемому эталонной моделью

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = A_m x_m(t) + b_m r(t).$$

Здесь $r(t)$ — задающее воздействие; A_m , b_m — заданные матрицы соответствующих размерностей. Введем оценочную функцию, характеризующую качество процесса управления

$$V(x) = (x - x_m)^T H (x - x_m), \quad H = H^T > 0.$$

В соответствии с принципом скоростного градиента алгоритм настройки параметра c [2]

$$\frac{dc(t)}{dt} = -\gamma \frac{d}{dc} \frac{d}{dt} V(x), \quad \gamma > 0.$$

Воспользовавшись уравнением (4), получим

$$\frac{d}{dt} V(x) = (x - x_m)^T H [(A + cbL^T)x - A_m x_m - b_m r];$$

$$\frac{d}{dc} \frac{d}{dt} V(x) = (x - x_m)^T H b L^T x.$$

Поскольку в алгоритм адаптации должны входить лишь непосредственно измеряемые переменные, выберем матрицу H так, чтобы выполнялось условие $Hb = L$. Тогда окончательно алгоритм настройки параметра обратной связи c запишем в виде

$$\frac{dc}{dt} = -\gamma (y^2 - x_m^T L y), \quad \gamma > 0. \quad (5)$$

Заметим, что $u_m = x_m^T L$ можно трактовать как эталонное значение состояния системы (1) в точке измерения, слежение за которым осуществляется с помощью алгоритма управления.

Достижение цели управления

$$\|x - x_m\| \rightarrow 0, \quad c(t) \rightarrow c^* \\ t \rightarrow \infty \quad t \rightarrow \infty$$

обеспечивается при выполнении условий существования матрицы H и параметра c^* :

$$HA_c + A_c^T H < 0, \quad Hb = L, \quad A_c = A + cbL^T.$$

Условия выполняются, если коэффициенты числителя передаточной функции системы

$$W(s) = \frac{h(s)}{\delta(s)} = L^T (sI - A)^{-1} b, \quad I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$$

положительны и его корни имеют отрицательные вещественные части, т.е. система минимально-фазовая [2]. Числитель передаточной функции рассматриваемой системы

$$h(s) = \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda_i (\lambda_i^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\lambda_i \xi_M)}{\xi_0 (\lambda_i^2 + \beta^2) + \beta} \prod_{i \neq 1} (s + \alpha \lambda_i^2).$$

Таким образом, чтобы обеспечить выполнение цели управления, необходимо наложить ограничения на координату точки измерения. Последнюю нужно выбирать из условия выполнения неравенств $\cos(\lambda_i \xi_M) > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Список литературы: 1. Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами.— М.: Наука 1980.— 384 с. 2. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами.— М.: Наука, 1981.— 448 с.

Поступила в редколлегию 03.10.85.

УДК 62-50

А. И. КИРИЧЕНКО, канд. техн. наук,
Л. М. ЛЮБЧИК, канд. техн. наук

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

При испытаниях изделий на термочувствительность возникает необходимость в создании заданного температурного поля, имитирующего реальные условия, и стабилизации его на протяжении требуемого интервала времени. Программное управление нагревом, связанное с получением требуемого распределения температур в фиксированный момент времени, подробно рассмотрено ранее [1]. Особый интерес представляет задача стабилизации, заключающаяся в синтезе закона управления с обратной связью, обеспечивающего минимальное в определенном смысле отклонение температурного поля от заданного. Ее особенность — скалярный характер управлений, поскольку в качестве управляющих воздействий может выступать либо температура окружающей среды (граничное управление), либо удельная мощность источников тепла (распределенное управление). В результате оказывается невозможным получение произвольного установившегося распределения температур при постоянных значениях управления. Альтернативой является создание в системе периодического режима, обеспечивающего получение квазистационарного температурного поля, в среднем за период достаточно близкого к требуемому. Получим решение этой задачи в виде программного управления и закона управления с обратной связью.

Воспользуемся уравнениями динамики объекта управления в виде [2]:

$$x_{n+1} = Ax_n + bu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $x \in R^m$ — вектор состояния системы в момент времени n ; R^m — m -мерное векторное пространство; $u_n \in R^1$ — скалярное управление; A , b — матрица и вектор соответствующих размерностей. Для моделей рассматриваемого класса матрица A всегда устойчива. Пусть цель управления состоит в выполнении условия $x_n = x^*$ при $n \geq N \geq m$. Поскольку для системы (1) выполняются

условия управляемости [3], то существует последовательность управлений $u_0, u_1, \dots, u_{n+N-1}$, обеспечивающая равенство $x_n = x^*$. Однако для скалярных управлений выполнение требования $x_n = x^*$ для всех $n > N$ при произвольном x^* оказывается невозможным.

В целях построения закона управления, обеспечивающего минимальное отклонение от заданного состояния x^* , воспользуемся методом циклического управления [4]. В соответствии с выражением (1) $x_{n+N} = A^N x_n + G_N \bar{u}_{n, N}$ (2). Здесь

$$G_N = (A^{N-1} b \mid \dots \mid A b \mid b); \quad \bar{u}_{n, N}^T = (u_n, \dots, u_{n+N-1});$$

T — знак транспонирования. Найдем последовательность управлений, при которой $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{kN} = \bar{x}$ (3), где \bar{x} — некоторый фиксированный вектор. Из формулы (2) следует, что условие (3) выполняется при выборе периодически повторяющейся последовательности управлений $\bar{u}_N^T, \bar{u}_N^T, \dots$. Здесь

$$\bar{u}_N = H_N (I - A^N) \bar{x}, \quad H_N = G_N^T (G_N G_N^T)^{-1}. \quad (4)$$

Известно, что управление (4) обладает минимальной нормой [3]. Для произвольного момента времени $n \leq k \leq N-1$ при достаточно большом n (т. е. в установившемся режиме)

$$x_{n+k} = P_k \bar{x}, \quad P_k = A^k + G_k^0 H_N (I - A^N), \\ G_k^0 = (0 \mid \dots \mid 0 \mid A^{k-1} b \mid \dots \mid A b \mid b). \quad (5)$$

Составим функционал, характеризующий среднеквадратическое отклонение от заданного состояния на интервале $[n, n + N - 1]$ в установившемся режиме:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|x_{n+k} - x^*\|^2 = \\ = \frac{1}{N} \|\bar{x} - x^*\|^2 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \|P_k \bar{x} - x^*\|^2. \quad (6)$$

Минимизируя выражение (6) по \bar{x} , получим $\bar{x} = Q_N x^*$, где

$$Q_N = \left(I + \sum_{k=1}^{N-1} P_k^T P_k^{-1} \right) \left(I + \sum_{k=1}^{N-1} P_k^T \right).$$

Таким образом, в соответствии с выражением (4) оптимальное управление является линейной функцией требуемого состояния x^* :

$$\bar{u}_N = H_N (I - A^N) Q_N x^*. \quad (7)$$

В установившемся режиме система с периодом в N шагов возвращается в состояние \bar{x} , отклоняясь в среднем на минимальное расстояние от x^* .

При наличии ограничений c на ресурсы управления находим оптимальный период N : $J(N) \rightarrow \min$, $\varphi(N) \leq c$. Здесь

$$J(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|(P_k Q_N - I) x^*\|^2;$$

$$\varphi(N) = \|H_N (I - A^N) Q_N x^*\|^2.$$

Программное управление (7) обеспечивает получение требуемого периодического движения лишь после затухания переходных процессов в системе (1). С помощью управления вида

$$u_{n+k} = e_k^T H_N (\bar{x} - A^N x_n), \quad n \leq k \leq n + N - 1,$$

где e_k — k -й единичный орт, можно обеспечить конечную длительность переходного процесса, равную N шагам. Для получения закона управления в виде обратной связи выразим x_n через x_{n+k} . Из уравнения (5) имеем

$$x_n = A^{-k} (I - F_k A^{N-k})^{-1} (x_{n+k} - F_k \bar{x}).$$

Здесь $F_k = G_k^0 H_N$. Тогда окончательно закон управления

$$u_{n+k} = c_k^T x_{n+k} + d_k^T x^*, \quad n \leq k \leq n + N - 1, \quad (8)$$

где

$$c_k^T = -e_k^T H_N A^{N-k} (I - F_k A^{N-k})^{-1};$$

$$d_k^T = (e_k^T H_N - c_k^T F_k) Q_N.$$

Уравнения (8) задают структуру нестационарного дискретного регулятора, обеспечивающего установление и стабилизацию требуемого периодического движения. При этом параметры регулятора являются периодическими решетчатыми функциями с периодом, равным N шагам.

Список литературы: 1. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами.— М.: Наука, 1975.— 568 с. 2. Костенко Ю. Т. Адаптивная стабилизация замкнутых систем с распределенными параметрами.— См. статью в настоящем вестнике. 3. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами.— М.: Наука, 1976.— 424 с. 4. Цирлин А. М., Балакирев В. С., Дудников Е. Г. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов.— М.: Энергия, 1976.— 448 с.

Поступила в редколлегию 21.10.85.

СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

При построении замкнутых систем управления распределенными объектами возникает необходимость в оценивании их состояния по результатам локальных измерений. Эффективные алгоритмы оценивания могут быть получены на основе описания распределенной системы с помощью большого числа дифференциальных уравнений относительно переменных, называемых временными модами и являющихся коэффициентами разложения функции состояния в ряд по заданной системе ортогональных функций [1].

При этом модель распределенной системы со скалярными управлениями и измерениями имеет вид $\dot{X} = AX + BU$, $Y = C^T X$ (1). Здесь X — вектор состояния системы; U — управляющее воздействие; Y — результат измерения состояния распределенной системы в фиксированной точке; A , B , C — матрица и векторы, явный вид которых представлен ранее [1]; T — знак транспонирования. Отметим, что A — диагональная матрица.

В целях упрощения структуры регулятора управления выбирают в функции от конечного числа оцениваемых мод, что позволяет использовать в контуре управления наблюдатель пониженного порядка. Разобьем вектор состояния системы (1) на два подвектора $X^T = (X_1^T, X_2^T)$ и представим в декомпозированном виде:

$$\dot{X}_1 = A_1 X_1 + B_1 U; \quad \dot{X}_2 = A_2 X_2 + B_2 U; \quad Y = C_1^T X_1 + C_2^T X_2^T, \quad (2)$$

где A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 — соответствующие блоки матриц A , B , C . Выберем закон управления в виде $U = -K^T (\hat{X}_1 - X_1^*)$ (3).

Здесь \hat{X}_1 — оценка вектора X_1 , полученная по результатам измерений Y ; X_1^* — заданный вектор; K — вектор коэффициентов обратной связи.

Вводя вектор ошибки оценивания $\tilde{X}_1 = X_1 - \hat{X}_1$, из выражений (2), (3) получаем

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= A_0 X_1 + B_1 K^T \tilde{X}_1 + B_1 K^T X_1^*; \\ \dot{X}_2 &= A_2 X_2 - B_2 K^T [X_1 - \tilde{X}_1 - X_1^*], \end{aligned} \quad (4)$$

где $A_0 = A_1 - B_1 K^T$. Из уравнений (4) следует, что установившаяся ошибка регулирования $V_1 = X_1(\infty) - X_1^*$:

$$V_1 = -(A_0^{-1} B_1 K^T + E) X_1^* - A_0^{-1} B_1 K^T X_1(\infty). \quad (5)$$

Здесь E — единичная матрица.

Покажем, что существует конструкция регулятора пониженного порядка, обеспечивающая выполнение условия $\tilde{X}_1(\infty) = 0$. Выберем уравнение наблюдателя в виде

$$\dot{\hat{X}}_1 = A_0 \hat{X}_1 + L [Y - C_1^T \hat{X}_1], \quad (6)$$

где L — вектор коэффициентов усиления наблюдателя, подлежащий определению.

Из выражений (2), (3), (6) получим уравнение ошибки оценивания

$$\dot{\tilde{X}}_1 = D \tilde{X}_1 - L C_2^T X_2 + B_1 K^T X_1^*. \quad (7)$$

Здесь $D = A_0 + B_1 K^T - L C_1^T = A_1 - L C_1^T$. Из уравнений (4), (7) следует, что выражение установившегося значения ошибки оценивания удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} D \tilde{X}_1(\infty) &= L C_2^T X_2(\infty) - B_1 K^T X_1^*; \\ A_2 X_2(\infty) &= B_2 K^T [X_1(\infty) - \tilde{X}_1(\infty) - X_1^*]; \\ A_0 X_1(\infty) &= -B_1 K^T [X_1(\infty) + X_1^*]. \end{aligned} \quad (8)$$

Воспользовавшись известным тождеством матричной алгебры [2]

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - (1 + V^T A^{-1} U)^{-1} A^{-1} U V^T A^{-1},$$

преобразуем систему уравнений (8). В результате получим

$$(D + \gamma L K^T) \tilde{X}_1(\infty) = -(\gamma L + B_1) K^T X_1^*; \quad (9)$$

где

$$\gamma = (1 + K^T A_0^{-1} B_1) C_2 A_2^{-1} B_2 = (1 - K^T A_1^{-1} B_1) C_2 A_2^{-1} B_2.$$

Из соотношения (9) следует, что выбор вектора коэффициентов усиления наблюдателя (6) в соответствии с условием $L = -\gamma^{-1} B_1$ обеспечивает нулевую установившуюся ошибку оценивания при произвольном значении вектора установки регулирования X_1^* . Очевидно, такой выбор вектора L обеспечивает устойчивость динамического наблюдателя (6).

Согласно уравнению (7) вектор X_1^* влияет на динамику ошибки оценивания \tilde{X}_1 непосредственно и косвенно через зависящий от него вектор X_2 . Таким образом, предложенная конструкция наблюдателя реализует известный принцип двухканальности [3],

что позволяет обеспечить инвариантность ошибки оценивания в установившемся режиме.

Таким образом, при выборе параметров модели (1), отвечающих физической сущности рассматриваемой задачи, множитель $C_2^T A_2^{-1} B_2$ стремится к постоянному значению с возрастанием размерности системы, т. е. при увеличении числа учитываемых мод. Это дает возможность вычисления параметров наблюдателя с требуемой точностью.

Список литературы: 1. Костенко Ю. Т. Адаптивная стабилизация замкнутых систем с распределенными параметрами.— См. статью в настоящем вестнике. 2. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1969.—368 с. 3. Петров Б. Н. Избранные труды: В 2-х т. Т. 1. Теория автоматического управления. М.: Наука, 1984.— 432 с.

Поступила в редколлегию 16.11.85.

УДК 62-50

О. Ю. ХАРЧЕНКО

АНАЛИЗ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Возможность синтеза управляющих устройств, обеспечивающих оптимальное в определенном смысле управление заданным объектом, обусловлена выполнением условий управляемости. Анализ достаточных условий управляемости объектов с ограничениями на управляющие воздействия рассмотрен ранее [1]. Возможные значения заданного начального и требуемого конечного состояний объекта здесь аппроксимированы многомерными эллипсоидами. Получены необходимые и достаточные условия существования управления из заданного множества, обеспечивающие возможность приведения системы в начало координат [2]. Исследуем возможность перехода объекта из некоторого фиксированного начального состояния в заданное конечное (отличное от начала координат) под действием управляющих воздействий, ограниченных несимметричными управлениями. Такая задача возникает, в частности, при исследовании управляемых процессов индукционного нагрева, где управляющее воздействие всегда неотрицательно.

Рассмотрим дискретное уравнение состояния стационарного линейного управляемого объекта

$$x_{k+1} = Ax_k + Cu_k, \quad (1)$$

где $x_k \in R^n$ — вектор состояния объекта; A, C — постоянные мат-

рицы размера $n \times n$, $n \times 1$ соответственно; u_k — скалярное управляющее воздействие.

Пусть на управление наложены ограничения вида $0 \leq u_k \leq r$, $k = \overline{0, N-1}$, где r — середина области ограничения.

Заданы также начальное состояние объекта x_0 и требуемое конечное состояние x^* . Определим возможность перехода объекта из x_0 в x^* за конечное число шагов N , найдем последовательность управлений u_0, u_1, \dots, u_{N-1} , осуществляющих этот переход.

Заранее установим, что количество шагов больше размерности системы $N > n$.

Последовательность состояний объекта запишем в следующем виде:

$$x_1 = Ax_0 + Cu_0, \quad x_2 = A^2x_0 + ACu_0 + Cu_1, \quad \dots, \\ x_N = A^Nx_0 + Gu,$$

где

$$G = (A^{N-1}C | A^{N-2}C | \dots | C); \quad u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})^T.$$

Очевидно, вектор управлений u заключен в гиперкуб

$$\Pi = \{u | 0 \leq u_i \leq 2r, i = \overline{0, N-1}\}.$$

Аппроксимируем его гипершаром по методике [3]

$$E = \{u | (u - u_0)^T R^{-1} (u - u_0) \leq 1\}, \quad (2)$$

где R — диагональная матрица размера $N \times N$ с одинаковыми элементами r^2 ; u_0 — центр гипершара, $u_0^1 = u_0^2 = \dots = u_0^N = r$.

Объект управляем на интервале $[0, N-1]$, если для заданных x_0, x^* найдется последовательность допустимых управлений, при которой выполняется равенство

$$x^* = x_N = A^Nx_0 + Gu. \quad (3)$$

Другими словами, достаточным условием управляемости объекта (1) является включение $u \subset E$, причем u должно удовлетворять уравнению (3).

Производя замену $v = u - u_0$ в выражении (2), (3) и полагая $x^* - A^Nx_0 - Gu_0 = z^*$, приходим к следующей системе линейных уравнений в матричной форме: $z^* = Gv$ (4). Так как заранее было сделано предположение $N > n$, нормальное псевдорешение (4), минимизирующее квадратичную форму $v^T R^{-1} v$ [4]:

$$v = RG^T (GRG^T)^{-1} z^*. \quad (5)$$

Вводя обозначения $H = G^T (GG^T)^{-1}$, $x^{**} = x^* - A^Nx_0$ и учитывая, что $R = r^2 I$, запишем формулу (5) в виде

$$v = H (x^{**} - Gu_0). \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в условие управляемости $v^T R^{-1} v \leq 1$, получаем $ar^2 + br + c \leq 0$ (7), где $a = (Ge)^T (GG^T)^{-1} Ge - 1$;

$b = -2(Ge)^T(GG^T)^{-1}x^{**}$; $c = (x^{**})^T(GG^T)^{-1}x^{**}$; e — единичный вектор $N \times 1$.

Так как коэффициенты a , b , c меняются с изменением количества шагов N , неравенство (7) выражает зависимость между количеством шагов и значением ограничения на управление r .

Вычисляя дискриминант выражения (7) при определенном N , можно установить, управляем ли объект вообще, а также (найдя значения r , при которых выражение (7) превращается в равенство) управляем ли он при заданном ограничении r . Одновременно решается и обратная задача — подбор ограничений на управления исходя из ограничений на время перехода, т. е. на количество шагов N .

Окончательно, искомый вектор управления находим из формулы (5):

$$u^* = H(x^* - A^N x_0) + (I - HG)u_0.$$

Рассмотрим частный случай, когда число шагов управления равно размерности системы $N = n$, $x_0 = 0$. При этом $a = N - 1 > 0$ и в зависимости от конечного состояния объекта объект может быть неуправляем при любом значении r или управляемость обеспечивается на интервале значений r , $r_1 \leq r \leq r_2$.

Таким образом, при расширении области допустимых управлений возможно нарушение условий управляемости объекта, что является следствием несимметричности управлений.

Список литературы: 1. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. Критерии управляемости многосвязных систем с ограниченными управлениями. — В кн.: Управление многосвязными системами. М.: Наука, 1984, с. 84—85. 2. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. — М.: Наука, 1974. — 368 с. 3. Гулинский О. В. О численном решении некоторых некорректных задач теории управления. — Автоматика и телемеханика, 1976, № 10, с. 66—80. 4. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983. — 336 с.

Поступила в редколлегия 14.11.85.

УДК 681.5

А. Г. НИКУЛЬЧЕНКО

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

Рассмотрим задачу идентификации текущего значения постоянной составляющей переходного процесса в линейной динамической системе, подверженной в случайные моменты

времени ступенчатым и гармоническим воздействиям. Решение этой задачи позволит прогнозировать конечное состояние системы и ускорить подготовку исходных данных для управления системой после окончания переходных процессов. Ввиду нестационарности переходного процесса алгоритм идентификации должен быть адаптивным.

Воздействия описываются выражениями

$$x_n(t) = q_n(t - t_n) \left\{ P_n + \sum_{i=1}^{t_n} A_{in} e^{-h_{in}(t-t_n)} \sin [\omega_{in}(t - t_n)] \right\},$$

где t_n — момент появления воздействия;

$$q_n(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0; \end{cases}$$

$P_n, A_{in}, h_{in}, \omega_{in}$ — случайные величины, принимающие любые неотрицательные значения (в том числе и нулевые).

Переходный процесс в системе может быть описан функцией

$$y(t) = \sum_{n=1}^N q_n(t - t_n) \left\{ R_n + \sum_{s=1}^{m_n} A_{sn} e^{-h_{sn}(t-t_n)} \times \right. \\ \left. \times \sin [\omega_{sn}(t - t_n) + \psi_{sn}] \right\}. \quad (1)$$

Допустим, что моменты t_n появления новых составляющих в выражении (1) упорядочены по значению $t_n < t_{n+1}$. Рассмотрим некоторый момент t^* , причем $t_{N'} < t^* < t_{N'+1}$; $t^* - t_{N'} = L\delta t$. Здесь δt — шаг съема информации по времени. На интервале $[t_{N'}, t^*]$ функция (1) может быть представлена в виде

$$y(t) = R + \sum_{m=1}^{N'} A'_m e^{-h_m t} \sin (\omega_m t + \psi'_m), \quad (2)$$

где $R = \sum_{n=1}^{N'} R_n$; $M' = \sum_{n=1}^{N'} m_n$.

Ставится задача определения текущего положения динамического равновесия системы R по имеющимся измерениям $y(t)$ в равноотстоящие моменты времени t_l ($l = 0, 1, 2, \dots, L$), где $t_0 = t_{N'}$; $t_L = t^*$.

Для решения задачи применяется адаптивная модификация конечношаговых методов идентификации [1, 2]. Порядок модели (2) определяется выражением $M = N' + m_1$. Здесь m_1 — число слагаемых в формуле (2), для которых $h_m \neq 0$, $\omega_m \neq 0$. Так как структура реального процесса заранее неизвестна, то в исходный момент времени $t_0 = 0$ задается некоторый произвольный начальный порядок модели M .

Из имеющихся измерений $y(t)$ составляются суммы и разности

$$\begin{aligned} \delta_{kj} &= y(t'_{k-1, j}) + y(t'_{-k+1, j}); \\ \rho_{kj} &= y(t'_{kj}) - y(t'_{-kj}) \quad (k = \overline{1, M+1}; j = \overline{1, P}), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} t'_{0j} &= t_j + (M+1)\Delta t; \quad t'_{-rj} = t'_{0j} - r\Delta t; \\ t'_{rj} &= t'_{0j} + r\Delta t \quad (r = \overline{1, M+1}); \quad t_{i+1} = t_i + \delta t; \end{aligned}$$

$\Delta t = S\delta t$; S — целое число; $P = L + (2M+2)S + 1$.

Подставим в правые части равенств (3) принятое выражение для модели переходного процесса (2). После ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta_{kj} &= 2R + \sum_{m=1}^{m_1} \left\{ B'_{mj} \cos[(k-1)\Delta x'_m] + B''_{mj} \cos[(k-1)\Delta x''_m] + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=m_1+1}^{m_1+m_2} B_{mj} \cos[(k-1)\Delta x_m] + \sum_{m=m_1+m_2+1}^{N'} B_{mj} \cos[(k-1)\Delta x_m] \right\}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_{kj} &= \sum_{m=1}^{m_1} [E'_{mj} \sin(k\Delta x'_m) + E''_{mj} \sin(k\Delta x''_m)] + \\ &+ \sum_{m=m_1+1}^{m_1+m_2} E_{mj} \sin(k\Delta x_m) + \sum_{m=m_1+m_2+1}^{N'} E_{mj} \sin(k\Delta x_m), \end{aligned} \quad (5)$$

$(j = \overline{1, P}; k = \overline{1, M+1}).$

Здесь $(m_2 - m_1)$ — число слагаемых в формуле (2), для которых $h_m = 0$; $(N' - m_1 - m_2)$ — число слагаемых, для которых $\omega_m = 0$; величины B'_{mj} , B''_{mj} , B_{mj} , E'_{mj} , E''_{mj} , E_{mj} зависят от A_m , ψ_m , h_m , ω_m , t_{0j} ; Δx_m — от ω_m , h_m , Δt [1]. Если равенства (4), (5) рассматривать как системы из $M+1$ линейных алгебраических уравнений относительно M неизвестных B'_{mj} , B''_{mj} , B_{mj} и E'_{mj} , E''_{mj} , E_{mj} , то значение искомого параметра R может быть найдено путем решения системы уравнений [1, 2]:

$$\sum_{k=1}^M z_k \eta_{kj} = -\eta_{M+1, j}; \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^M z_k (\delta_{kj} - 2R) = 2R - \delta_{M+1, j} \quad (j = \overline{1, P}), \quad (7)$$

где z_k — вспомогательные неизвестные; $\eta_{kj} = \rho_{kj} - \rho_{k-2, j}$ ($k = \overline{3, M+1}$); $\eta_{2j} = \rho_{2j}$; $\eta_{1j} = 2\rho_{1j}$.

Для нахождения оценок z_{kp} параметров z_k применяется модифицированный проективный метод решения избыточных систем линейных алгебраических уравнений. При получении P -го уравнения вида (6) для вычисления новой оценки z_p (z_{1p} , z_{2p} , ..., z_{Mp}) осуществляем движение в M -мерном пространстве от оценки z_{p-1} по направлению, обратному направлению нормали к гиперплос-

кости, определяемой P -м уравнением. Длина шага равна расстоянию до гиперплоскости, деленному на число использованных уравнений. В результате получаем рекуррентную формулу

$$z_{sp} = z_{s,p-1} - \frac{\gamma_{isp}}{P \sum_{k=1}^M \gamma_{ikp}^2} \left(\sum_{k=1}^M \gamma_{ikp} z_{kp-1} + \gamma_{M+1,p} \right), \quad (s = \overline{1, M}).$$

Для нахождения оценки R_p параметра R используется рекуррентная формула

$$R_p = R_{p-1} + \frac{1}{2P \left(1 + \sum_{k=1}^M z_{kp} \right)} \times \\ \times \left[\sum_{k=1}^M (\delta_{kp} - 2R_{p-1}) z_{kp} + \delta_{M+1,p} - 2R_{p-1} \right]$$

или более экономичная по количеству вычислений

$$R_p = \frac{p-1}{p} R_{p-1} + \frac{\sum_{k=1}^M \delta_{kp} z_{kp} + \delta_{M+1,p}}{2P \left(1 + \sum_{k=1}^M z_{kp} \right)}.$$

Начальные значения z_{sM} определяем, решая M первых уравнений (6), затем находим R_M как среднее значение по M уравнениям (7).

На основании полученных оценок z_{kp} осуществляем прогноз значения $y(t_{L+1})$, где $t_{L+1} = t_L + \delta t$, по формуле

$$\hat{y}(t_{L+1}) = y(t_{L-1}) + y(t_{L-2M-1}) - y(t_{L-2M+1}) - \\ - \sum_{k=1}^M z_{kp} \gamma_{kp+1}.$$

При выполнении условия

$$|\hat{y}(t_{L+1}) - y(t_{L+1})| > \Delta \hat{y}, \quad (8)$$

где $\Delta \hat{y}$ — заданная априорно требуемая точность прогноза, порядок модели (алгоритма) M увеличивается на некоторое априорно заданное значение ΔM . Так как проверка условия (8) осуществляется на каждом шаге, алгоритм оперативно определяет моменты качественного изменения исследуемого процесса и соответственно подстраивает модель. Во избежание вырождения формул алгоритма в случае отсутствия воздействий предусмотрен также автоматический переход в режим простого отслеживания.

Результаты моделирования процесса идентификации на ЭВМ БЭСМ-6 показали быструю сходимость оценок R к истинному значению.

Список литературы: 1. *Конечношаговые* методы идентификации равновесного положения САР / Е. Г. Голоскоков, А. Г. Никульченко, Ю. А. Фролов и др.— В кн.: Некоторые методы оптимизации, идентификации и распределения ресурсов в сложных системах. К., 1980, с. 23—44 (Препринт / АН УССР, Ин-т кибернетики; 80-9). 2. *О регуляризации* при решении одной идентификационной задачи / Е. Г. Голоскоков, А. Г. Никульченко, Ю. А. Фролов и др.— В кн.: Математические методы кибернетики. К.: Б. н., 1979, с. 3—7.

Поступила в редколлегию 02.11.85.

УДК 62.505

Г. А. ВОЛИКОВ, Н. Г. КИРЕЕВ, канд. техн. наук

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ
ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Во многих случаях модель, принятая при проектировании, существенно отличается от реального объекта, что значительно уменьшает или сводит на нет эффективность разработанной системы управления. В связи с этим возникает задача, связанная с построением модели на основании наблюдений, получаемых в условиях функционирования объекта по его входным и выходным переменным. Это направление известно как идентификация систем [1—3].

Рассмотрим некоторые способы идентификации стационарных динамических систем, основанные на использовании метода наименьших квадратов.

Исследуем линейный стационарный динамический объект вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + f_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Требуется идентифицировать динамические параметры объекта a_{ij} по известным входным $f_i(t_k)$ и выходным $x_j(t_k)$ переменным на интервале времени наблюдения $[0 \leq t_k \leq T]$, где $k = \overline{0, N}$; $N \gg n$. Используя метод наименьших квадратов, найдем оценки \hat{a}_{ij} вектора параметров a_{ij} из условия минимума скалярного критерия J :

$$\min J = \min \sum_{k=0}^N \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + f_i - \dot{x}_i \right)^2. \quad (2)$$

Необходимым условием минимума J по \hat{a}_{ij} является $\frac{\partial J}{\partial \hat{a}_{ij}} = 0$, представляющее собой n систем линейных алгебраических урав-

нений $(n \times n)$ -го порядка для определения оценок \hat{a}_{ij} $(n \times n)$ -мерного вектора a_{ij} , использующих всю информацию о параметрах f_i , x_j выборки $[0 \leq t_k \leq T]$ при $k = \overline{0, N}$, где $N \gg n$, вида

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial J}{\partial a_{ij}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + f_i - \dot{x}_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

которую часто называют системой нормальных уравнений. Если определить в выражении (3) недостающую информацию об \dot{x}_i (например, численным дифференцированием или предварительно аппроксимировав x_i какой-то функцией $\varphi(t_k)$), то, решая уравнение (3), можно найти оценки \hat{a}_{ij} динамических параметров a_{ij} модели (1).

Известно, что оператор дифференцирования по своей физической природе усиливает шумы измерений, и чем выше частота шумов, тем больше погрешности. Поэтому, чтобы не определять в выражении (3) недостающую информацию об \dot{x}_i , можно сначала взять интеграл от обеих частей выражения (1), например, в скользящих интервалах и таким образом избавиться от предварительного нахождения производных \dot{x}_i :

$$x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x_j dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i dt. \quad (4)$$

Применяя в выражении (4) процедуру, аналогичную применяемой в формулах (2), (3), получим для этого случая систему нормальных уравнений:

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial J}{\partial \hat{a}_{ij}} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x_j dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i dt - [x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)] \right\} = 0. \quad (5)$$

В инженерной практике при проектировании новых или модернизации существующих систем можно считать, что динамические параметры a_{ij} новой системы определены, т.е. их можно представить в виде $a_{ij}^{(0)} + \Delta \hat{a}_{ij}$, где $a_{ij}^{(0)}$ известны приближенно. Более того, решая системы нормальных уравнений (3), (5), можно положить найденные значения a_{ij} равными $a_{ij}^{(0)}$, а затем, имея в виду ошибки округлений и другие помехи, уточнить эти параметры, определяя добавки Δa_{ij} , т.е. построить рекуррентную процедуру или итерационный процесс, или метод последовательных приближений для нахождения этих добавок $\Delta \hat{a}_{ij}$, пока они не станут равными нулю ($\Delta a_{ij} \rightarrow 0$). В этом случае алгоритмы идентификации (3), (5) соответственно примут вид

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial J}{\partial \Delta a_{ij}} \left(\sum_{j=1}^n \Delta a_{ij}^{(r)} x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(r)} x_j + f_i - \dot{x}_i \right) = 0; \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{a}_{ij}} \left\{ \sum_{j=1}^n \Delta a_{ij}^{(r)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x_j dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i dt - [x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)] + \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(r)} x_j \right\} = 0, \quad (7)$$

где r — число итераций (последовательных приближений), $r = \overline{1, l}$; $l < n$; $l < N$. На каждом r -м шаге уточняется $a_{ij}^{(r)}$ в результате нахождения $\Delta \hat{a}_{ij}^{(r)}$, пока $\Delta \hat{a}_{ij}^{(r)}$ не станут равными нулю.

В этом алгоритме левая часть уравнения неизменна, а меняется лишь правая часть, что позволяет построить простой итерационный процесс, удобный для счета на ЭВМ. Выражения (6), (7) запишем так:

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{a}_{ij}} \left(\sum_{j=1}^n \Delta a_{ij}^{(r)} x_j + A_{ij} \right) = 0; \quad (8)$$

$$\sum_{k=0}^N \frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{a}_{ij}} \left(\sum_{j=1}^n \Delta a_{ij}^{(r)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x_j dt + B_{ij} \right) = 0. \quad (9)$$

Здесь A_{ij} , B_{ij} — известные величины,

$$A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(r)} x_j + f_i - \dot{x}_i;$$

$$B_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(r)} x_j + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i dt - [x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)].$$

Анализ алгоритмов идентификации (3), (5), (8), (9) был проведен на модели объекта четвертого порядка.

Эксперименты показали, что наилучшие результаты идентификации дает использование методов, в которых производные не вычислялись, т.е. алгоритмы (5), (9). Алгоритм (9) наиболее предпочтителен. Кроме того, он дает возможность при сравнительно небольшом числе итераций (не более десяти) получить наибольшую точность идентификации.

При решении систем линейных алгебраических уравнений (нормальных уравнений) (3), (5), (8), (9) использовали методы Крамера, Гаусса и итерационные процедуры Зейделя и Некрасова в целях выяснения точности решения этими способами и затратами машинного времени. Оказалось, что методы Гаусса и Некрасова дают большую точность и меньшие затраты машинного времени. Поскольку системы нормальных уравнений, полученные на основе скалярного критерия качества метода наименьших квадратов, имеют симметричную

положительно-определенную матрицу, то нет необходимости доказательства сходимости решения этих уравнений при применении итерационных методов, так как в этом случае процесс всегда будет сходящимся. Что касается затрат машинного времени, то по методу Крамера эти затраты в несколько раз выше (особенно когда порядок системы выше третьего), чем при пользовании другими методами (например, Гаусса).

Список литературы: 1. Сейдж Э. П., Мелса Д. Л. Идентификация систем управления.— М.: Наука, 1979.— 297 с. 2. Гроп Д. Методы идентификации систем.— М.: Мир, 1979.— 434 с. 3. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.— 683 с.

Поступила в редколлегию 19.11.85.

УДК 519.21

А. В. МАКАРИЧЕВ, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОЙ МНОГОФАЗОВОЙ СИСТЕМЕ С ИДЕНТИЧНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

В связи с бурным развитием вычислительной техники и средств связи в современную эпоху стали изучать ЭВМ и сети ЭВМ как системы массового обслуживания. Информационные сети ЭВМ, имеющие последовательную структуру, описываются следующей моделью теории очередей. Рассмотрим многофазовую систему, состоящую из $k + 1$ последовательных фаз обслуживания. Поступающее в систему требование, закончив обслуживание на первой фазе, немедленно переходит на вторую фазу и т. д. После окончания обслуживания на $(k + 1)$ -й фазе требование уходит из системы.

Каждая фаза, кроме первой, представляет собой однолинейную систему обслуживания с ожиданием. На первой фазе работает один обслуживающий прибор, а мест для ожидания нет. Требования на фазах обслуживаются в порядке поступления. Каждое приходящее в систему требование несет с собой случайный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k+1})$, где η_i — время обслуживания требования на i -й фазе, $i = 1, 2, \dots, k + 1$. Предполагается, что $\eta_1 \equiv \eta_2 \equiv \dots \equiv \eta_{k+1}$, и считаем, что для различных требований векторы длин взаимно независимы. Входящий поток требований зависит от состояния процесса обслуживания в системе. Очередное требование поступает на первую фазу через постоянное время a после окончания обслуживания на ней предыдущего требования. Эта система служит удобной моделью для описания работы систем обработки и передачи информации, когда в одну цепочку последовательно соединены несколько устройств одинаковой производительности.

Назовем длиной требования время его обслуживания на первой фазе. Длина требования является положительной случайной величиной с функцией распределения $G(x)$. Обозначим через $V(n)$ время пребывания n -го требования на первой фазе. Пусть $V_k(n)$ время пребывания n -го требования на остальных k фазах; $W_n(x, y)$ — совместное распределение пары случайных величин $V(n)$, $V_k(n)$; $F_n(x) = G(x/k)G((x+a)/k) \dots G([x+(n-1)a]/k)$.

Теорема 1. Совместное распределение времени пребывания $(n+1)$ -го требования на первой фазе и времени пребывания на оставшихся k фазах имеет следующий вид

$$W_{n+1}(x, y) = \begin{cases} G(x)F_n(y+a) & \text{при } kx \leq y; \\ G(y/k)F_n(y+a) & \text{при } kx > y. \end{cases}$$

Доказательство. Для времени пребывания $(n+1)$ -го требования на k последних фазах соблюдается рекуррентное соотношение

$$V_k(n+1) = \max [kV(n), V_k(n) - a].$$

При его доказательстве, аналогичном доказательству теоремы 1, используется тот факт, что на первой фазе нет очереди [1]. Отметим, что суммарное время пребывания на k последних фазах n -го требования не зависит от длины $(n+1)$ -го требования. К тому же время пребывания на первой фазе равно длине требования. Поэтому из последнего рекуррентного соотношения следует, что маргинальное распределение времени пребывания $(n+1)$ -го требования на k последних фазах

$$F_{n+1}(x) = P\{V_k(n+1) < x\} = G(x/k)F_n(x+a).$$

Для первого требования $F_1(x) = G(x/k)$. Из двух последних равенств получим

$$F_{n+1}(x) = G(x/k)G((x+a)/k) \dots G((x+na)/k).$$

Теперь не представляет труда найти совместное распределение величин $V(n+1)$, $V_k(n+1)$:

$$W_{n+1}(x, y) = \begin{cases} G(x)F_n(y+a) & \text{при } kx \leq y; \\ G(y/k)F_n(y+a) & \text{при } kx > y. \end{cases}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если математическое ожидание длины требования конечно $m_1 = \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$F_n(x) \rightarrow F(x) = \prod_{i=0}^{\infty} G((x+ia)/k);$$

$$W_n(x, y) \rightarrow W(x, y) = \begin{cases} G(x)F(y+a) & \text{при } kx \leq y; \\ G(y/k)F(y+a) & \text{при } kx > y. \end{cases}$$

Доказательство. Из условия теоремы 2 и интегрального признака сходимости рядов следует, что равномерно по $x \geq 0$ сходится ряд [2]:

$$\sum_{i=0}^{\infty} [1 - G((x + ia)/k)].$$

Отсюда вытекает, что для всех x , таких, что $G(x/k) > 0$ последовательность функции $F_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к функции $F(x)$.

После этого утверждение теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 1 с помощью предельного перехода по n .

Следствие 1. Пусть $\eta_1 \leq T$ и для любого $x < T$ $G(x) < 1$. Тогда $F(x) = G(x/k)G((x+a)/k) \dots G((x+ma)/k)$, где

$$m = \max \{i : G((x + ia)/k) < 1\};$$

$$W(x, y) = \begin{cases} G(x)F(y+a) & \text{при } kx \leq y; \\ G(y/k)F(y+a) & \text{при } kx > y. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно вытекает следствие 2.

Следствие 2. В условиях следствия 1 при $a \rightarrow 0$ время пребывания требования на k последних фазах в стационарном режиме стремится к постоянному значению kT . Это следствие показывает, что в условиях большой нагрузки на каждое обслуживающее устройство время пребывания на отдельных фазах, начиная со второй, стремится к максимальному значению T длины требования.

Список литературы: 1. Vinogradov O. P. On the distribution of sojourn time in the tandem system with identical service times. — In: Fundamentals of teletraffic theory, Moscow, 1984, p. 449—450. 2. Кудряцев Л. Д. Основы математического анализа. — М.: Высш. шк., 1970.—Т. 1. 230 с.; т. 2. 140 с.

Поступила в редколлегию 04. 11. 85.

УДК 621.397

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, канд. физ.-мат. наук

К СОВМЕСТНОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ

При решении ряда задач обнаружения необходимо определять индивидуальные параметры движения s_m ($m = 1, \dots, M$) элементов группы из M целей, т. е. находить вектор параметров $s = (s_1, \dots, s_M)$, где s_m — какие-либо измеряемые параметры. Пусть сигнальные параметры s_m принимаются на фоне корре-

лированного шума x_m . Таким образом, при измерении регистрируются величины $u_m = s_m + x_m$. Аналогичная задача рассмотрена для случая некоррелированного шума [1].

Охарактеризуем уклонение, отнесенное ко всей совокупности M измерений, с помощью суммы квадратов ошибок в условиях аддитивных помех

$$R_M = \sum_{m=1}^M u_m^2 - \sum_{m=1}^M s_m^2. \quad (1)$$

Рассмотрим статистическую структуру случайной величины R_M . Примем, что помеха x_m — реализация (в дискретные моменты времени) нормального марковского процесса $x(t)$ с переходной плотностью распределения вероятностей [2]:

$$\omega(x, t; x', t') = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma(1-q^2)}} \exp\left[-\frac{(x - qx')^2}{\sigma(1-q^2)}\right],$$

где t — текущее время; $t_m = m\Delta t$; Δt — шаг дискретизации; $q = \exp(-\nu\Delta t)$; σ, ν — интенсивность и декремент затухания процесса $x(t)$.

Статистическую структуру случайной величины R_M можно полностью охарактеризовать в терминах производящей функции $Q(\lambda) = \langle \exp(-\lambda R_M) \rangle$ (λ — произвольный параметр), являющийся Лаплас-трансформантой для плотности распределения вероятностей $\rho(R_M)$. Отметим, что задача нахождения $Q(\lambda)$ в случае, когда $\nu = 0, s(t) = 0$, была рассмотрена ранее [3]. С другой стороны, если $\nu \rightarrow \infty$ (полная некоррелированность помехи), сумму R_M можно охарактеризовать в терминах гамма-распределения [4]. Произвольному значению декремента ν отвечает промежуточный (общий) случай между этими предельными.

Выражение для $Q(\lambda)$ принимает следующий вид:

$$Q(\lambda) = A_s \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \omega(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int dx_1 \dots dx_M \times \\ \times \prod_{m=1}^M \omega(x_m, t_m; x_{m-1}, t_{m-1}) \exp\left[-\lambda \sum_{n=1}^M (x_n + s_n)^2\right]. \quad (2)$$

Здесь $A_s = \exp(\lambda \sum s_m^2)$; $\omega(x_0)$ — плотность распределения помехи $x(t)$ в исходный момент времени $t = 0$,

$$\omega(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{\sigma}\right).$$

Обозначив функцию под знаком интеграла по x_0 в выражении (2) через $Q(\lambda, x_0)$, запишем

$$Q(\lambda, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{dy_1 \dots dy_M}{\pi^{M/2}} \exp\left(-\sum_{n,m=1}^M B_{nm} y_n y_m\right) \times \\ \times G\left(\sum_{m=1}^M b_m y_m\right), \quad (3)$$

где

$$G(\eta) = \exp(-\eta);$$

$$b_1 = 2\lambda s_1 (\sigma p)^{1/2} - 2x_0 q (\sigma p)^{-1/2}, \quad p = 1 - q^2;$$

$$b_m = 2\lambda s_m (\sigma p)^{1/2}, \quad m = 2, \dots, M.$$

Матрица \mathbf{B} в выражении (3) трехдиагональная

$$B_{mm} = \lambda(1 - q^2) + (1 + q^2)(\sigma p)^{-1/2}, \quad m = 1, \dots, M - 1;$$

$$B_{MM} = \lambda(1 - q^2) + (\sigma p)^{-1/2}; \quad B_{m,m-1} = B_{m-1,m} = -q,$$

а остальные ее элементы равны нулю. Из условия положительной определенности квадратичной формы (y, By) следует, что существует ортогональная матрица Ω , приводящая \mathbf{B} к диагональному виду.

Переходя к диагональным переменным в многократном интеграле (3), получим

$$Q(\lambda, x_0) = (\det \mathbf{B})^{-1/2} \exp(H/2 - q^2 x_0^2 / \sigma p),$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^M b_n b_m (\mathbf{B}^{-1})_{nm}.$$

Здесь \mathbf{B}^{-1} — матрица, обратная к \mathbf{B} . Таким образом, промежуточная производящая функция может быть выражена в терминах детерминанта матрицы \mathbf{B} и дисперсии H . Введем обозначения:

$$D_1 = \det \mathbf{B}; \dots; D_{M-2} = \begin{vmatrix} B_{M-2,M-2}; & B_{M-2,M-2}; & 0 \\ B_{M-1,M-2}; & B_{M-1,M-1}; & B_{M-1,M} \\ 0; & B_{M,M-1}; & B_{M,M} \end{vmatrix}; \quad (4)$$

$$D_{M-1} = \begin{vmatrix} B_{M-1}; & B_{M-1,M} \\ B_{M,M-1}; & B_{M,M} \end{vmatrix}; \quad D_M = B_{M,M}; \quad D_{M+1} = 1.$$

В соответствии с работой [3] можно показать, что

$$H = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (q^{2m} D_m D_{m+1})^{-1} L_m,$$

$$L_m = \sum_{n=m}^M q^n b_n D_{n+1}. \quad (5)$$

Выделив в выражении (5) слагаемое с $m = 1$, запишем

$$Q(\lambda, x_0) = D_M^{-1/2} \exp \left\{ -q^2 x_0^2 / \sigma p + D_2 b_1^2 / 4 D_1 + L_2^2 + \right.$$

$$\left. + L_2 b_1 / 2 q D_1 + \frac{1}{4} \sum_{m=2}^M (q^{2m} D_m D_{m+1})^{-1} L_m^2 \right\},$$

а из выражения (4) прямым вычислением найдем

$$D_m = (B_{11}^2 - B_{12}^2 - \mu_2 B_{11}) (\mu_1 B_{MM} - B_{12}) (\mu_2 - \mu_1)^{-1} \mu_1^{M-m-2} -$$

$$- (B_{11}^2 - B_{12}^2 - \mu_1 B_{11}) (\mu_2 B_{MM} - B_{12}) (\mu_2 - \mu_1)^{-1} \mu_2^{M-m-2},$$

где $\mu_{1,2} = (B_{11} + \sqrt{B_{11}^2 - 4B_{12}}) / 2$. Поскольку b_1 линейно зависит от x_0 , заключительный интеграл $Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \omega(x_0) Q(\lambda, x_0)$ (явное его выражение не приводится из-за громоздкости). В случае отсутствия сигнала ($s(t) = 0$):

$$Q(\lambda) = \left[\frac{(1+F_0)^{M+1} - (1-F_0)^{M+1}}{(1+\lambda\sigma p + F)^{M+1} - (1+\lambda\sigma p - F)^{M+1}} \right]^{1/2},$$

$$F = [(1+\lambda\sigma p)^2 - 4q^2]^{1/2}, \quad F_0 = (1-4q^2)^{1/2}.$$

На основе производящей функции можно извлечь всю необходимую статистическую информацию, а поскольку она выражается в терминах элементарных функций, численные расчеты при рассмотрении конкретных задач вполне реализуемы. С помощью обращения Лаплас-преобразования и восстановления плотности распределения вероятностей $\rho(R_M)$ можно оптимизировать процедуру совместного определения параметров движения элементов групповой цели в условиях коррелированной помехи.

Список литературы: 1. Степанов М. Г. Совместное измерение параметров движения элементов групповой цели. — Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1985, 28, № 4, с. 89—90. 2. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. — М.: Изд-во иностр. лит., 1947.—168 с. 3. Montroll E. W. Markoff chains, Wiener integrals and quantum theory. — Communic pure and applied mathematics, 1952, 5, p. 415—455. 4. Вентцель Е. С. Теория вероятности. М.: Наука, 1964.—564 с.

Поступила в редколлегию 14. 10. 85.

УДК 681.516

Ю. А. ФРОЛОВ, канд. техн. наук

РАЗВОРОТЫ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ОПОРНЫМ МОДЕЛЯМ ВЕКТОРА МОДИФИЦИРОВАННОГО ПОВОРОТА

В общем случае решение задачи разворота твердого тела осложнено тем, что система уравнений вращения не интегрируема в аналитической форме. Это осложнение можно преодолеть на основе использования таких моделей вращения, по которым можно синтезировать управляющие моменты. Решение существенно зависит от принятой системы кинематических параметров. Изложены методы решения задач разворотов по опорным моделям вектора модифицированного поворота [1].

Введение опорной модели основано на результатах [2], которые при переходе от матричных равенств к векторным выражаются так:

1. Вращение определяется уравнением

$$\frac{\bar{\omega}}{2} = \frac{pr}{\varphi} \dot{\varphi} + \frac{p^2(\dot{\varphi} \times \bar{\varphi})}{\varphi^2} + \bar{\varphi} \frac{(\dot{\varphi}, \bar{\varphi})}{\varphi^2} \left(\frac{p'_\varphi}{r} - \frac{pr}{\varphi} \right), \quad (1)$$

$$r^2 + p^2 = 1, \quad r = r(\varphi), \quad p = p(\varphi), \quad (r(0) = 1, \quad p(0) = 0), \quad (2)$$

из обращения которого следует кинематическое уравнение

$$\dot{\Psi} = \frac{r\varphi}{2p} \bar{\omega} + \frac{\bar{\varphi} \times \bar{\omega}}{2} + \frac{\bar{\varphi}(\bar{\varphi}, \bar{\omega})}{2\varphi^2} \left(\frac{r}{p'_\varphi} - \frac{\varphi r}{p} \right), \quad (3)$$

где φ, ω — векторы кинематических параметров и угловой скорости в проекциях на связанные оси, $\bar{\varphi} = (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)$, $\bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)$; r, p — скалярные функции $\varphi = |\varphi|$; $p'_\varphi = dp/d\varphi$.

2. В частном случае поворот в параметрах вектора Родрига — Гамильтона $\lambda = (\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ определяется преобразованиями

$$\lambda_0 = (16 - \psi^2)/(16 + \psi^2), \quad \lambda_i = 8\psi_i/(16 + \psi^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

в которых компоненты вектора модифицированного поворота $\psi = (\psi_1 \psi_2 \psi_3)$:

$$\psi_i = 4\lambda_i/(1 + \lambda_0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

3. В этом случае выражения (1), (3) представляют собой уравнения:

$$\omega = \frac{16[(16 - \psi^2)\dot{\psi} + 8\dot{\psi} \times \bar{\psi} + 2\bar{\psi}(\dot{\psi}, \bar{\psi})]}{(16 + \psi^2)^2}, \quad (6)$$

$$\dot{\psi} = \left(1 - \frac{\psi^2}{16}\right) \omega + \frac{1}{2} \psi \times \omega + \frac{1}{8} \psi(\psi, \omega). \quad (7)$$

Выражение (6) отражает переход от матричного уравнения для $\tilde{\Omega}$ к векторному [2, с. 7], а уравнение (7) находим в результате обращения последнего.

Поскольку $\lambda_0 = \cos \theta/2$, $\lambda_i = \sin \theta/2 \cdot \theta_i/\theta$, $i = 1, 2, 3$, из преобразований (5) следует $\psi = 4 \operatorname{tg} \theta/4\theta/\theta$, где θ — вектор истинного поворота.

Отметим, что в работах [3, 4], опубликованных позже работы [2], приведен вывод «обобщенного кинематического уравнения», которое с точностью до обозначений и принятых векторно-матричных операций представляет собой частный случай уравнения (3), когда аргументом ψ является θ . Тогда в формулах (1)—(3) $r = \cos \theta/2$, $p = \sin \theta/2$, $p'_\varphi = r/2 (d\varphi/d\theta)$. Там же приводится и уравнение, соответствующее равенству (7), которое получаем простой подстановкой априорно вводимого аналога ψ . Такой вектор в неявной форме получен как результат исследования в [2], когда имеют место уравнения (4), (6). Из обращения этих равенств и следуют выражения (5), (7). При этом ψ имеет тангенсную форму, если за аргумент принят вектор θ .

Для решения задачи программного разворота из $\psi(0) = 0$, $\omega(0) = \omega^H$ в $\psi(T) = \psi^K$, $\omega(T) = \omega^K$ за время T вводится модель, которая включает в себя уравнение (7), динамическое уравнение Эйлера

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \omega \times K = M, \quad (8)$$

где M , K — управляющий и кинетический моменты, $K = (J_1 \omega_1 J_2 \omega_2 J_3 \omega_3)$ и опорную модель модифицированного поворота

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \psi^K t + \frac{3\bar{\psi}^K - 2\bar{\omega}^H T + \dot{\bar{\psi}}^K T}{T^2} t^2 + \\ & + \frac{T(\dot{\bar{\psi}}^K + \bar{\omega}^H) - 2\bar{\psi}^K}{T^3} t^3 + g(t) t^2 (T - t)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\dot{\bar{\psi}}^K = \dot{\bar{\psi}}(T)$ определяется значениями ψ^K , ω^K согласно уравнению (7); $g(t)$ — векторный многочлен t , коэффициенты которого можно найти из условий оптимальности разворота по формуле (9) или исходя из других требований. В простейшем случае $g(t) \equiv 0$. Если компоненты $g(t)$ определять как решения задач

$$\min_{g_i(t)} \max_{t \in [0, T]} |\ddot{\bar{\psi}}_i(t)|, \quad i = 1, 2, 3,$$

то максимальные значения $|\ddot{\bar{\psi}}_i(t)|$ на $[0, T]$ снижаются, что в соответствии с равенствами (6), (8) приводит к снижению и максимальных значений $M_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Решения этих задач можно получить по известным схемам наилучшего приближения Чебышева.

Итак, если построена вектор-функция $g(t)$, то по формуле (9) в каждый текущий момент t согласно выражениям (6), (8) находим управляющий момент $M(t)$, реализующий такой программный разворот.

Для разворота по схеме синтеза в модель вводится и формула сложения поворотов [1]:

$$\psi^\tau = \frac{16[(16 - \psi^2)\bar{\psi}^K - (16 - (\psi^K)^2)\bar{\psi} + 8\bar{\psi}^K \times \bar{\psi}]}{256 + (\psi^K)^2 \psi^2 + 32(\bar{\psi}^K, \bar{\psi})}, \quad (10)$$

где ψ^τ , ψ определяют потребный и реализованный развороты на момент $t = \tau$. Вводя формулу (9) при $g \equiv 0$ и замене t на $t - \tau$, получим из уравнения (6) потребное ускорение

$$\dot{\omega}(\tau) = \frac{2}{T^2} (3\psi^\tau - 2\omega(\tau)T + \dot{\psi}^K T). \quad (11)$$

В этих условиях управляющий момент находим в результате подстановки значений $\omega(\tau)$, $\dot{\omega}(\tau)$ в выражение (8). При этом T в равенстве (11) рассматривается как параметр адаптации для обеспечения качества разворота.

Для реализации разворота в его алгоритм необходимо включить и алгоритм определения ориентации [1]. В указанной работе приводятся и другие подходы к построению разворота.

Решение задачи синтеза разворота по информации о текущем состоянии целесообразно проводить в тех кинематических параметрах, для которых имеют место формулы сложения поворотов типа (10). В статье [3] ссылкой на сложность общих решений кинематических уравнений для векторов истинного поворота θ , $4\text{tg}\theta/4 \theta/\theta$ (там они обозначаются через φ , $\bar{\nu}$) по сравнению с решениями кинематических уравнений в параметрах Родрига — Гамильтона и вектора конечного поворота фактически ошибочно отрицается существование формулы сложения поворотов для вектора модифицированного поворота.

Список литературы: 1. Фролов Ю. А., Шипулина Л. В. Функциональные модели ориентации твердого тела и их приложения.— Х., 1985.— 27 с.— Рукопись деп. в УкрНИИТИ, № 2443 Деп. 2. Фролов Ю. А., Шипулина Л. В. Согласованные методы интегрирования кинематических уравнений вращения.— Х., 1981.— 8 с.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2575 Деп. 3. Панов А. П. О выборе кинематических параметров и уравнений вращения для численного интегрирования в ЦВМ.— Кибернетика и вычислительная техника, 1984, вып. 62, с. 104—111. 4. Панов А. П. Кинематические дифференциальные уравнения для собственных векторов операторов вращения твердого тела.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1985, № 4, с. 26—32.

Поступила в редколлегию 16.11.85.

УДК 681.516

Л. В. ШИПУЛИНА, канд. техн. наук,
Н. В. СЕРЕДА, канд. техн. наук, В. В. ЛЫННИК

УПРАВЛЕНИЯ РАЗВОРОТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Задача управления разворотом твердого тела возникает в различных областях техники, однако точного решения ее нет. Изложим приближенное решение с использованием метода стереографической проекции и уравнения Дарбу*.

Рассмотрим задачу разворота твердого тела, имеющего неподвижную точку O , из начального в конечное состояние при заданных координатах углового положения и скорости в условиях следующих ограничений: проекция мгновенной угловой скорости тела ω_3 на ось z равна нулю; при развороте тела ось z не должна попадать в некоторую заданную область (система осей $Oxuz$ жестко связана с твердым телом).

* Лурье А. И. Аналитическая механика.— М.: Физматгиз, 1961.— 824 с.

Обозначим через $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ единичные орты связанной системы координат $Oxyz$, зададим начальное и конечное состояния твердого тела стереографической проекцией на комплексную плоскость концов единичных ортов e_3, e_2 и проекциями мгновенной угловой скорости тела на оси связанной системы $Oxyz$:

$$z_3 = R_0 e^{i\varphi_0}, z_2 = z_0 e^{i\psi_0}, \omega_0 = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}), t = 0; \quad (1)$$

$$z_3 = R_k e^{i\varphi_k}, z_2 = z_k e^{i\psi_k}, \bar{\omega}_k = (\omega_{1k}, \omega_{2k}, \omega_{3k}), t = T.$$

Здесь R_0, R_k, z_0, z_k — модули; $\varphi_0, \varphi_k, \psi_0, \psi_k$ — фазовые углы векторов z_3, z_2 , определяющих стереографические проекции ортов \bar{e}_3, \bar{e}_2 на комплексной плоскости в начальный момент времени $t = 0$ и конечный $t = T$; ω_0, ω_k — векторы мгновенной угловой скорости тела; T — заданное время разворота.

Область, в которую при развороте твердого тела не должна попадать ось z , зададим в виде неподвижного кругового конуса, который на комплексной плоскости имеет стереографическую проекцию в виде окружности радиуса R_r при условии, что полюс стереографической проекции находится на оси конуса.

В этих условиях закон управления разворотом твердого тела можно найти исходя из вида траектории движения $z_3(t)$ проекции орта \bar{e}_3 с учетом ограничений

$$\omega_3(t) = 0, |z_3(t)| < R_r, 0 \leq t \leq T.$$

После этого определяем положение $z_2(T)$ орта \bar{e}_2 к концу разворота и при необходимости производим коррекцию.

Для нахождения закона управления используем уравнение Дарбу

$$\dot{z} = \frac{\omega_2 - \omega_1 i}{2} - iz\omega_3 + \frac{\omega_2 + \omega_1 i}{2} z^2, \quad (2)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции угловой скорости на оси связанной системы; $z(t)$ — стереографическая проекция на комплексную плоскость точки твердого тела.

Полагая $z = x + iy, \dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}, \omega_3 = 0$ и выделяя вещественную и мнимую часть из уравнения (2), получаем

$$\dot{x} = \omega_2(x^2 - y^2 + 1)/2 - \omega_1 xy; \quad \dot{y} = \omega_2 xy + \omega_1(x^2 - y^2 - 1)/2. \quad (3)$$

Разрешая уравнения (3) относительно ω_1, ω_2 , найдем зависимость управления ω_1, ω_2 от траектории $z(t)$ и скорости $\dot{z}(t)$ изображающей точки на комплексной плоскости:

$$\omega_1 = \frac{2\dot{y}(x^2 - y^2 + 1) - 4xy\dot{x}}{(x^2 + y^2)^2 - 1}; \quad \omega_2 = \frac{2\dot{x}(x^2 - y^2 - 1) + 4xy\dot{y}}{(x^2 + y^2)^2 - 1}. \quad (4)$$

Задание управления ω_1, ω_2 по формулам (4) возможно при условии, что $(x^2 + y^2)^2 \neq 1$, т. е. траектория $z(t)$ изображающей точки не попадет внутрь окружности единичного радиуса, $|z(t)| > 1$.

Таким образом, для решения задачи разворота необходимо найти траекторию $z_3(t)$ орта \bar{e}_3 , удовлетворяющую условиям (1) и ограничениям по модулю: $1 < |z_3(t)| < R_r$ (5). Зададим закон изменения $z_3(t)$ в полярных координатах в виде

$$z_3(t) = Re^{i\varphi}; \quad R = E + F \sin \alpha; \quad (6)$$

$$\alpha = At^3 + Bt^2 + Ct + D; \quad \varphi = A_1t^3 + B_1t^2 + C_1t + D_1. \quad (7)$$

В этих условиях траектория $z_3(t)$ лежит в кольце $1 < E - F \leq R \leq E + F < R_r$ при соответствующем выборе констант E , F и ограничение (5) удовлетворяется.

Обозначим $z_3(t) = x + iy$, тогда

$$\begin{aligned} x &= (E + F \sin \alpha) \cos \varphi; & y &= (E + F \sin \alpha) \sin \varphi; \\ \dot{x} &= F \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \varphi - (E + F \sin \alpha) \sin \varphi \dot{\varphi}; & (8) \\ \dot{y} &= F \cos \alpha \dot{\alpha} \sin \varphi + (E + F \sin \alpha) \cos \varphi \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Из условий (1), (3) следуют начальные и конечные значения R_0 , R_k , φ_0 , φ_k , x_0 , x_k , y_0 , y_k , подставляя которые в выражения (8), получим уравнения для определения всех констант в формулах (7):

$$R_0 = E + F \sin D; \quad R_k = E + F \sin \alpha_k; \quad (9)$$

$$\varphi_0 = D_1; \quad \varphi_k = A_1T^3 + B_1T^2 + C_1T + D_1; \quad (10)$$

$$\dot{x}_0 = F \cos D \cdot C \cos D_1 - (E + F \sin D) \sin D_1 C_1;$$

$$\dot{y}_0 = F \cos D \cdot C \sin D_1 + (E + F \sin D) \cos D_1 C_1;$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= F \cos \alpha_k (3T^2A + 2TB + C) \cos \varphi_k - (E + F \sin \alpha_k) (3T^2A_1 + \\ &+ 2TB_1 + C_1) \sin \varphi_k; \quad \dot{y}_k = F \cos \alpha_k (3T^2A + 2TB + C) \times \\ &\times \sin \varphi_k + (E + F \sin \alpha_k) (3T^2A_1 + 2TB_1 + C_1) \cos \varphi_k. \end{aligned}$$

Из уравнений (9) найдем

$$\cos D = \sqrt{1 - \left(\frac{R_0 - E}{F}\right)^2} = Q_1; \quad \cos \alpha_k = \sqrt{1 - \left(\frac{R_k - E}{F}\right)^2} = Q_2. \quad (11)$$

Тогда с учетом выражений (9), (10) уравнения (11) принимают вид

$$C \cdot FQ_1 \cos \varphi_0 - C_1R_0 \sin \varphi_0 = \dot{x}_0; \quad C \cdot FQ_1 \sin \varphi_0 + C_1R_0 \cos \varphi_0 = \dot{y}_0. \quad (12)$$

Разрешая эту систему уравнений, получаем

$$C = (\dot{x}_0 \cos \varphi_0 + \dot{y}_0 \sin \varphi_0) / FQ_1; \quad C_1 = (\dot{y}_0 \cos \varphi_0 - \dot{x}_0 \sin \varphi_0) / R_0. \quad (13)$$

Для нахождения остальных констант используем уравнения (7), (10), (12). Равенства (7), (10) с учетом C , C_1 , D , D_1 примут вид

$$AT + B = (a_k - CT - D)/T^2; \quad A_1T + B_1 = (\varphi_k - C_1T - D_1)/T^2. \quad (14)$$

Выразив B , B_1 через A , A_1 и подставив их в выражение (12), получим уравнения с неизвестными A , A_1 :

$$a_{13}A + a_{14}A_1 = a_{15}; \quad a_{16}A + a_{17}A_1 = a_{18}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 3T^2FQ_2 \cos \varphi_k; & a_2 &= 2TFQ_2 \cos \varphi_k; \\ a_3 &= 3T^2R_k \sin \varphi_k; & a_4 &= 2TR_k \sin \varphi_k; \\ a_5 &= \dot{x}_k - FQ_2 \cos \varphi_k C + R_k \sin \varphi_k C_1; \\ a_6 &= 3T^2FQ_2 \sin \varphi_k; & a_7 &= 2TFQ_2 \sin \varphi_k; \\ a_8 &= 3T^2R_k \cos \varphi_k; & a_9 &= 2TR_k \cos \varphi_k; \\ a_{10} &= \dot{y}_k - FQ_2 \sin \varphi_k \cdot C - R_k \cos \varphi_k C_1; \\ a_{11} &= (a_k - CT - D)/T^2; & a_{12} &= (\varphi_k - C_1T - D_1)/T^2; \\ a_{13} &= a_1 - a_2T; & a_{14} &= a_4T - a_3; \\ a_{15} &= a_5 + a_4a_{12} - a_2a_{11}; & a_{16} &= a_6 - a_7T; \\ a_{17} &= a_8 - a_9T; & a_{18} &= a_{10} - a_7a_{11} - a_9a_{12}. \end{aligned}$$

Из уравнений (15)

$$A = \frac{a_{15}a_{17} - a_{14}a_{18}}{a_{13}a_{17} - a_{14}a_{16}}; \quad A_1 = \frac{a_{13}a_{18} - a_{15}a_{16}}{a_{13}a_{17} - a_{14}a_{16}}, \quad (16)$$

из уравнений (14)

$$B = a_{11} - TA; \quad B_1 = a_{12} - TA_1. \quad (17)$$

Таким образом, по формулам (9), (10), (13), (16), (17), используя начальное и конечное состояния твердого тела (1), можно задать траекторию движения $z_3(t)$ в форме (6) и закон управления движением (4). Конечное положение $z_2(T)$ определяем интегрированием уравнения (2) с известными ω_1 , ω_2 и начальному положению $z_2(0)$. Тем самым определяем конечное состояние твердого тела, которое при необходимости можно подкорректировать.

Поступила в редколлегию 06.11.85.

УДК 62-50

В. Б. УСПЕНСКИЙ

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВОРОТА ТВЕРДОГО ТЕЛА МИНИМАЛЬНЫМ ИМПУЛЬСОМ

Существенная нелинейность задач об оптимальном управлении вращением твердого тела в общем случае не позволяет решить их в полной мере аналитически или хотя бы достаточно

простыми вычислительными средствами. В этой связи рассмотрим задачу оптимального в смысле минимума импульса управляющего момента M разворота твердого тела, ориентация которого задается матрицей направляющих косинусов $\bar{\Gamma}(t)$ в соответствии с уравнением

$$\dot{\bar{\Gamma}} = \bar{\Omega}\bar{\Gamma} \quad (1)$$

из заданного начального положения $\bar{\Gamma}(t_0) = \bar{\Gamma}_0$ в требуемое конечное $\bar{\Gamma}(t_k) = \bar{\Gamma}_k$. Здесь матрица $\bar{\Omega}$ имеет вид

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

в которой $\omega = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости в проекциях на связанные оси, удовлетворяющий уравнениям $K = J\omega$, $\dot{K} = -(\omega \times K) + M$ (2), где $J = \text{diag} \|J_i\|$, $i = \overline{1, 3}$ — матрица главных моментов инерции при заданных краевых условиях $K(t_0) = K_0$, $K(t_k) = K_k$.

Известно, что при сформулированном критерии качества оптимальное управление имеет импульсный вид [1]. В этих условиях в основу решения задачи разворота положена широко применяемая на практике двухимпульсная схема управления (импульс P_1 в начале $t = t_0$ и импульс P_2 в конце $t = t_k$ интервала управления), глобальная оптимальность которой не очевидна. Предлагаем новый подход к решению задачи оптимального разворота в рамках двухимпульсной схемы.

Поскольку для двухимпульсной схемы $M(t) = P_1 \delta(t - t_0) + P_2 \delta(t - t_k)$, где $\delta(\tau)$ — δ -функция, рассматриваемый критерий качества $V = (P_1, P_1) + (P_2, P_2)$ (3). Причем $P_1 = K_0 - H_0$, $P_2 = K_k - H_k$. Здесь K_0, K_k заданы, а $H_0 = K(t_0 + 0)$, $H_k = K(t_k - 0)$ неизвестны. Очевидно, требуемый оптимальный разворот на интервале времени $[t_0 + 0, t_k - 0]$ реализуется свободным вращением твердого тела при краевых условиях H_0, H_k , доставляющих минимум функции (3). Нахождение таких H_0, H_k является решением исходной задачи.

Известно, что уравнение $\dot{H} = -(\omega \times H)$ (4), соответствующее свободному вращению, имеет решение в классе эллиптических функций [2]:

$$\begin{aligned} H_1(t) &= J_1 \varepsilon_1 \nu \sqrt{D(D - J_3)/J_1(J_1 - J_3)} \operatorname{cn} n(t - \tau_0); \\ H_2(t) &= J_2 \varepsilon_2 \nu \sqrt{D(D - J_3)/J_2(J_2 - J_3)} \operatorname{sn} n(t - \tau_0); \\ H_3(t) &= J_3 \varepsilon_3 \nu \sqrt{D(J_1 - D)/J_3(J_1 - J_3)} \operatorname{dn} n(t - \tau_0), \\ n &= \nu \sqrt{D(J_1 - D)(J_2 - J_3)/J_1 J_2 J_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ равны $+1$, либо -1 ; ν, D, τ_0 — произвольные

постоянные. Кроме того, для системы (1) существует первый интеграл $\bar{\Gamma}_0 H_0 = \bar{\Gamma}_k H_k$, из которого следует

$$H_k = \bar{\Gamma}_k^T \bar{\Gamma}_0 H_0. \quad (6)$$

Итак, после подстановки для момента времени $t = t_0$ соотношений (5), (6) в выражение (3) имеет место утверждение $\min_{\underline{P}_1, \underline{P}_2} V(\underline{P}_1, \underline{P}_2) = \min_{\nu, D, \tau_0} V(\nu, D, \tau_0)$. Отыскание последнего приводит

к системе нелинейных уравнений относительно $H_0 = (H_{01} H_{02} H_{03})^T$:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau_0} = (\bar{\alpha}, (H_0 \times \omega_0)) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = (4H_0 - \bar{\alpha}, H_0) = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial D} = 4 \sum_{i=1}^3 H_{0i}^2 - (\alpha_1 H_{01} + \alpha_2 H_{02}) \frac{2D - J_3}{D - J_3} - \alpha_3 H_{03} \frac{2D - J_1}{D - J_1} = 0,$$

причем $D = \sum_{i=1}^3 H_{0i}^2 \left/ \sum_{i=1}^3 \frac{H_{0i}^2}{J_i} \right.$. Здесь $\bar{\alpha} = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^T$ — известный век-

тор, $\bar{\alpha} = 2(K_0 + \bar{\Gamma}_0^T \bar{\Gamma}_k K_k)$ (8). Из первого уравнения системы (7) следует, что $H_0 = \lambda_1 \omega_0 + \lambda_2 \bar{\alpha}$ при непараллельности векторов ω_0 и $\bar{\alpha}$ или $H_{0i} = J_i \lambda_2 \alpha_{i1} / (J_i - \lambda_1)$ (9), где λ_1, λ_2 — некоторые неизвестные постоянные. Отметим, что обратное предположение, т. е. $\omega_0 \parallel \bar{\alpha}$, ведет к тому, что система (7) в общем случае становится избыточной по числу уравнений, значит, не существует в известном смысле ее решения. После исключения H_0 из системы (7) и несложных преобразований имеют место такие уравнения относительно λ_1, λ_2 :

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^3 J_i \frac{\alpha_i^2}{(J_i - \lambda_1)^2} \right) \left/ \left(\sum_{i=1}^3 J_i^2 \frac{\alpha_i^2}{(J_i - \lambda_1)^2} \right) \right.; \quad (10)$$

$$\sum_{k=0}^6 c_{7-k} \lambda_1^{6-k} = 0, \quad (11)$$

в которых коэффициенты $c_j, j = \bar{1}, 7$ вычисляются по формулам, полученным в результате подстановки уравнений (9), (10) в систему (7):

$$\begin{aligned} a_0 &= J_3^2 (J_1 \alpha_2^2 + J_2 \alpha_1^2), \quad a_1 = J_3 (\alpha_1^2 (J_2 + J_3) + \\ &+ \alpha_2 (J_1 + J_3)), \quad a_2 = J_3 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2), \quad a_0' = J_1^2 J_2^2 J_3^2 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2), \\ a_1' &= 2 (J_2^2 \alpha_2^2 (J_1 J_3^2 + J_3 J_1^2) + J_3^2 \alpha_3^2 (J_1 J_2^2 + J_2 J_1^2)), \\ a_2' &= J_2^2 \alpha_2^2 (J_1^2 + J_3^2 + 4J_1 J_3) + J_3^2 \alpha_3^2 (J_1^2 + J_2^2 + 4J_1 J_2), \\ a_3' &= 2 (J_2^2 \alpha_2^2 (J_1 + J_3) + J_3^2 \alpha_3^2 (J_1 + J_2)), \quad a_4' = J_2^2 \alpha_2^2 + J_3^2 \alpha_3^2, \\ b_0 &= J_1^2 J_2 \alpha_3^2, \quad b_1 = J_1 \alpha_3^2 (J_1 + J_2), \quad b_2 = J_1 \alpha_3^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b'_0 &= J_1^2 J_2^2 J_3^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2), \quad b'_1 = 2 (J_2^2 \alpha_2^2 (J_1^2 J_3 + J_3^2 J_1) + \\
&+ J_1^2 \alpha_1^2 (J_2^2 J_3 + J_3^2 J_2)), \quad b'_2 = J_2^2 \alpha_2^2 (J_1^2 + J_3^2 + 4J_1 J_3) + J_1^2 \alpha_1^2 (J_2^2 + \\
&+ J_3^2 + 4J_2 J_3), \quad b'_3 = 2 (J_2^2 \alpha_2^2 (J_1 + J_3) + J_1^2 \alpha_1^2 (J_2 + J_3)), \\
b'_4 &= J_2^2 \alpha_2^2 + J_1^2 \alpha_1^2, \quad c_1 = a_0 a'_0 + b_0 b'_0, \quad c_2 = -(a_1 a'_0 + a_0 a'_1 + \\
&+ b_1 b'_0 + b_0 b'_1), \quad c_3 = a_2 a'_0 + a_1 a'_1 + a_0 a'_2 + b_2 b'_0 + b_1 b'_1 + b_0 b'_2, \\
c_4 &= -(a_2 a'_1 + a_1 a'_2 + a_0 a'_3 + b_2 b'_1 + b_1 b'_2 + b_0 b'_3), \quad c_5 = a_2 a'_2 + \\
&+ a_1 a'_3 + a_0 a'_4 + b_2 b'_2 + b_1 b'_3 + b_0 b'_4, \quad c_6 = -(a_3 a'_3 + a_1 a'_4 + \\
&+ b_2 b'_3 + b_1 b'_4), \quad c_7 = a_2 a'_4 + b_2 b'_4. \quad (12)
\end{aligned}$$

Таким образом, решение нелинейной системы (7) сведено к уравнению шестой степени (11). В этих условиях предложен алгоритм расчета двухимпульсной схемы, который состоит в следующем:

1. По заданным K_0 , K_k , $\bar{\Gamma}_0$, $\bar{\Gamma}_k$ определяются из уравнения (8) вектор $\bar{\alpha}$, а затем из системы (12) коэффициенты c_j , $j = \bar{1}, \bar{7}$.

2. Решается уравнение (11) относительно λ_1 и отбрасываются комплексные корни.

3. Для оставшихся λ_1 с помощью уравнений (9), (10) находится $H_0 = (H_{01} H_{02} H_{03})^T$.

4. Вычисляются пары (P_1, P_2) и выбирается пара, доставляющая минимум (3).

Практический интерес представляет оценка времени T , в течение которого оптимальная пара импульсов (P_1, P_2) реализует требуемый разворот твердого тела. Поскольку аналитически получить такую оценку не представляется возможным, время T предлагаем определять по эмпирической формуле $T = (T^* + T^{**})/2$. В основу этой формулы положено численное интегрирование уравнения (4) при найденных краевых условиях H_0, H_k . Значение T^* соответствует моменту времени первого, в виду дискретности процедуры численного интегрирования, попадания радиус-вектора $H(t)$ в некоторую малую ϵ -область точки $(H_{k1} H_{k2} H_{k3})$, а T^{**} соответствует моменту времени выхода из этой области. Следует отметить, что отсутствие ограничений на время разворота в постановке задачи приводит к существованию особых точек ее решения. Действительно, в условиях, когда $K_0 = K_k = 0$, оптимальный в рассматриваемом смысле разворот выполняется в соответствии с полученным решением нулевыми импульсами за бесконечное время.

Приведенная методика позволяет рассчитать оптимальную двухимпульсную схему разворота твердого тела посредством простых вычислительных процедур.

Список литературы: 1. Красовский Н. Н. Теория управления движением.— М: Наука, 1968.— 475 с. 2. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела.— М: Наука, 1977.— 328 с.

Поступила в редколлегию 13.11.85.

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, д-р техн. наук,
В. Ю. РОХЛЕНКО, канд. техн. наук, С. Д. ГЕРАСИМОВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОГО
СЛЕДЯЩЕГО ПРИВОДА С НЕПРЕРЫВНЫМИ
И ДИСКРЕТНЫМИ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ**

Системы автоматического регулирования с цифровой ЭВМ, формирующей требуемые законы регулирования, имеют широкие возможности, однако при этом надо учитывать необходи-

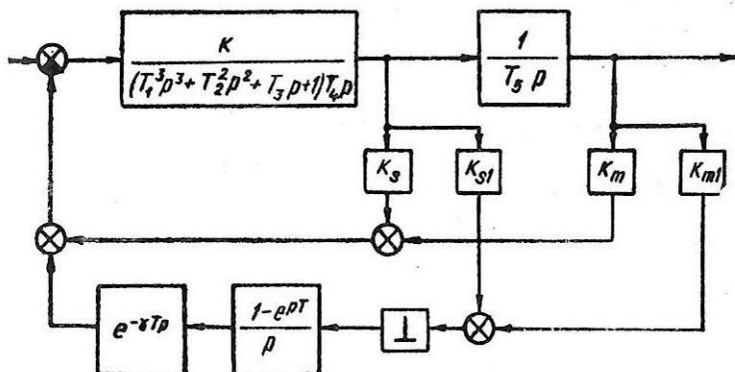


Рис. 1

мость включения ЭВМ в различные контуры системы регулирования. Исследуем вопрос о целесообразности перехода к дискретным обратным связям в электрогидравлическом следящем приводе (ЭГСП) цифрового варианта системы регулирования паровых турбин.

На основе обобщенной структурной схемы ЭГСП (рис. 1) проводятся исследования непрерывной, чисто импульсной и смешанной систем регулирования. При этом полагаются нулевыми соответствующие коэффициенты усиления дискретных обратных связей k_{s1} , k_{m1} или непрерывных обратных связей k_s , k_m . В дискретной обратной связи находятся идеальный импульсный элемент с периодом квантования T , формирующее устройство нулевого порядка и звено запаздывания, моделирующее запаздывание γT на ЭВМ.

Построение с помощью ЭВМ дискретной передаточной функции вида $W_s^*(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{m-i} / \sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}$ замкнутой системы и последующее использование критерия Гурвица [1] для выявления

степени влияния параметров системы регулирования на устойчивость достаточно сложно. Поэтому для изучения устойчивости ЭГСП используем критерий Найквиста для непрерывных и дискретных систем. Вначале строим область устойчивости внутреннего непрерывного контура регулирования в пространстве параметров k , k_s , где k — коэффициент усиления прямой цепи. После этого рассмотрим устойчивость системы со смешанными непрерывными и дискретными обратными связями.

В качестве номинальных значений постоянных времени были приняты: $T_1 = 0,009$ с; $T_2 = 0,013$ с; $T_3 = 0,034$ с; $T_4 = 0,1$ с; $T_5 = 0,18$ с. Из проведенных исследований непрерывной системы ($k_{s1} = k_{m1} = 0$) найдены условия устойчивости внутреннего контура регулирования и всего привода $k_s < 17$, $k_m/k_s > 0,2$ соответственно. Для определения устойчивости дискретной замкнутой системы, используем разложение в ряд передаточной функции разомкнутой дискретной системы $W_{раз}^*(q)$, которое имеет вид [2]

$$W_{раз}^*(q) = D \left\{ e^{-qT} \frac{1 - e^{-q}}{q} W \left(\frac{q}{T} \right) \right\} = \\ = (1 - e^{-q}) e^{-q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(q+j2\pi n)\varepsilon} W \left(\frac{q+j2\pi n}{T} \right) \Big|_{(q+j2\pi n)},$$

где $W(p)$ — передаточная функция непрерывной части системы, $p = q/T$, $\varepsilon = 1 - \gamma/T$.

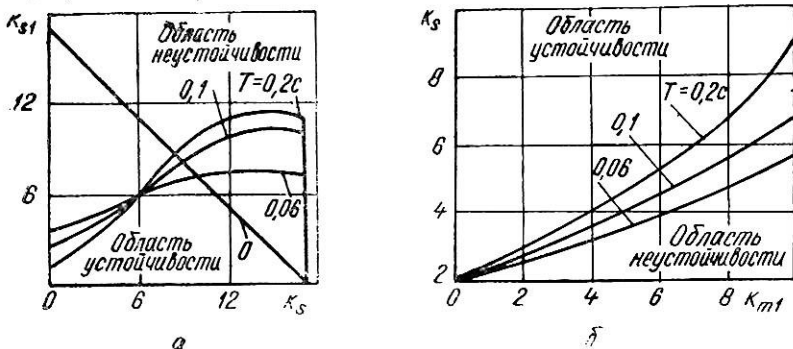


Рис. 2

Чтобы найти значение дискретной передаточной функции при круговой частоте ω , делаем подстановку $q = j\omega T$. При вычислении суммы n последовательно принимает значения $0, -1, 1, -2, 2, \dots$ до тех пор, пока очередной член суммы по модулю не станет меньше заданного процента от модуля всей суммы. Проведенные расчеты показали, что при номинальных значениях параметров и периоде квантования, изменяющемся в пределах $0,01 \dots 0,1$ с, для достижения точности 1% требуется $3 \dots 7$ членов ряда. Для определения устойчивости замкнутой

системы достаточно согласно критерию Найквиста установить лишь точки пересечения частотной характеристики разомкнутой системы с вещественной осью, а не строить полностью частотную характеристику. Программная реализация алгоритма выполнена на языке ФОРТРАН. Результаты расчетов областей устойчивости при номинальных значениях постоянных времени для внутреннего контура ЭГСП ($k_m = k_{m1} = 0$) в пространстве параметров k_s , k_{s1} и для внешнего контура ($k_{s1} = 0$) в пространстве параметров k_{m1} , k_s при условии $k_m + k_{m1} = 10$ представлены на рис. 2, а, б.

На основе расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Устойчивость ЭГСП с непрерывными и дискретными обратными связями определяется устойчивостью внутреннего контура и всей системы. При этом возникают соответственно ограничения на максимальное допустимое значение $k_s + k_{s1}$ (рис. 2, а) и минимальное допустимое значение k_s (рис. 2, б).

2. Максимальные значения k_s , k_{s1} , ограничивающие область устойчивости внутреннего контура, мало зависят от значений k_m , k_{m1} и находятся из зависимости (рис. 2, а).

3. Минимальное значение k_s , обуславливающее устойчивость всего контура ЭГСП, мало зависит от общего коэффициента усиления $k_m + k_{m1}$ и значения k_{s1} и устанавливается из зависимости (рис. 2, б).

4. Увеличение коэффициента усиления k_{s1} ухудшает устойчивость внутреннего контура. Поэтому для него лучше формировать комбинированную обратную связь при $k_s \geq 0,5k_{s1}$, но предпочтительнее совсем отказаться от импульсной составляющей $k_{s1} = 0$ (рис. 2, а).

5. Увеличение коэффициента усиления k_{m1} внешней дискретной обратной связи, а также уменьшение частоты квантования снижают запас устойчивости (рис. 2, б), поэтому желательно при использовании дискретных обратных связей увеличивать частоту квантования и уменьшать k_{m1} .

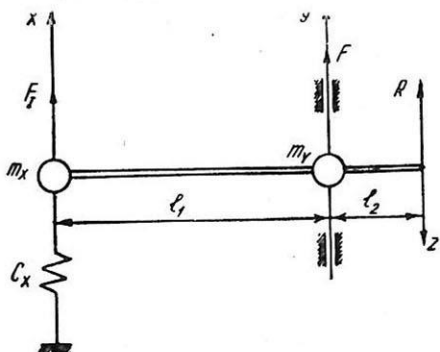
Список литературы 1. Барковский В. В., Захаров В. Н., Шаталов А. С. Методы синтеза систем управления.— М.: Машиностроение, 1981.— 277 с.
2. Иванов В. А., Ющенко А. С. Теория дискретных систем автоматического управления.— М.: Наука, 1983.— 336 с.

Поступала в редколлегию 18.11.85.

Э. А. ПИКУР, канд. техн. наук, В. П. СЕВЕРИН,
канд. техн. наук, Р. Е. ЛАСЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

В электрогидравлической системе регулирования (ЭГСР) паровых турбин для атомных электростанций наименее изучен электрогидравлический преобразователь (ЭГП), который состоит из электрической, механической и гидравлической частей [1, 2]. Математическая модель электрической части ЭГП представлена ранее [3]. Построим математическую модель механической части ЭГП. Вследствие больших сил давления жидкости, действующих на золотник ЭГП, необходимо учитывать упругие свойства рычага, соединяющего катушку управления с золотником.



Для вывода уравнений механической части ЭГП с учетом изгиба рычага примем расчетную схему, построенную на основании следующих допущений (рисунок). Масса катушки управления m_x сосредоточена в месте соединения штока катушки с рычагом, масса золотника m_y — в месте соединения рычага и золотника посредством мембраны. Рычаг — невесомый стержень с модулем Юнга E , моментом инерции I_1 , длиной l_1 между массами m_x и m_y , моментом инерции I_2 , длиной l_2 между массой m_y и соплами золотника. Ввиду больших сил давления жидкости можно пренебречь весом движущихся деталей, а также силами трения, действующими на золотник. На массу m_x действует управляющая сила катушки F_1 , упругая сила пружины с жесткостью C_x , сила вязкого трения с коэффициентом b_x ; на массу m_y — сила давления жидкости F . На правый конец рычага действует равнодействующая реакций струй R .

Введем вектор обобщенных перемещений $\bar{\eta} = (x, y, x_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$, составленный из вектора координат $\eta_1 = (x, y, x_3)^T$ и вектора углов поворота $\bar{\eta}_2 = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ управляющей катушки, золотника и правого конца рычага соответственно. Система дифференциальных уравнений (СДУ) ЭГП может быть получена

методом структурных матриц [4] в общем виде: $M\ddot{\eta} + B\dot{\eta} + A\eta = f$ (1), где M — диагональная матрица инерционных свойств механической системы с диагональными элементами $m_x, m_y, 0, 0, 0, 0$; B — диагональная матрица диссипативных свойств с диагональными элементами $b_x, 0, 0, 0, 0, 0$; A — матрица упругих свойств, $A = S^T D S$ (2), определяемая через матрицу структуры упругих элементов S и диагональную матрицу жесткости D с диагональными элементами [4, 5] $C_x, 12EI_1/l_1^3, EI_1/l_1, 12EI_2/l_2^3, EI_2/l_2$; f — вектор внешних сил, $f = (F_I, F, R, 0, 0, 0)^T$. Матрицу структуры упругих элементов S находим на основании теории изгиба балок [5] по вектору деформаций $\xi = S\eta$. Здесь $\xi_1 = x$;

$$\xi_2 = y - x - l_1(\varphi_1 + \varphi_2)/2; \quad \xi_3 = -\varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\xi_4 = x_3 - y - l_2(\varphi_1 + \varphi_3)/2; \quad \xi_5 = -\varphi_2 + \varphi_3;$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -l_1/2 & -l_1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -l_2/2 & -l_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу упругих свойств можно получить по формуле (2) матричным умножением. В целях исключения из СДУ (1) угловых координат разобьем ее на подматрицы размера 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда для СДУ (1) получим

$$M_{11}\ddot{\eta}_1 + B_{11}\dot{\eta}_1 + A_{11}\bar{\eta}_1 + A_{12}\bar{\eta}_2 = \bar{f}_1;$$

$$A_{21}\bar{\eta}_1 + A_{22}\bar{\eta}_2 = 0,$$

где M_{11} — диагональная матрица с диагональными элементами $m_x, m_y, 0$; B_{11} — диагональная матрица с диагональными элементами $b_x, 0, 0$; $\bar{f}_1 = (F_I, F, R)^T$. Исключая из последней системы уравнений вектор углов поворота $\eta_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}\eta_1$, приходим к СДУ $M_{11}\ddot{\eta}_1 + B_{11}\dot{\eta}_1 + A_1\bar{\eta}_1 = \bar{f}_1$ (3). Здесь

$$A_1 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_x + e/l_1^2 & -e(1/l_1 + 1/l_2)/l_1 & e/(l_1 l_2) \\ -e(1/l_1 + 1/l_2)/l_1 & e(1/l_1 + 1/l_2)^2 & -e(1/l_1 + 1/l_2)l_2 \\ e/(l_1 l_2) & -e(1/l_1 + 1/l_2)/l_2 & e/l_2^2 \end{bmatrix},$$

$$e = 3E(I_1 I_2 / (l_1 l_2)) / (I_1 / l_1 + I_2 / l_2).$$

Введем обозначения

$$k_{ZX} = l_2/l_1, \quad k_{ZR} = l_2^2/e = l_2^2(l_1/I_1 + l_2/I_2)/3E, \quad (4)$$

определим из последнего уравнения системы (3) относительную координату заслонки $z = y - x_3$: $z = k_{ZX}(x - y) - k_{ZR}R$ (5).

Подставив выражение (5) в два первых уравнения системы (3) с учетом введенных обозначений, получим СДУ:

$$m_X \ddot{x} + b_X \dot{x} + C_{XX} + k_{ZR}R = F_I; \quad (6)$$

$$m_Y \ddot{y} - (1 + k_{ZX})R = F.$$

Параметрическая модель механической части ЭГП (6), в которой зависимые параметры вычисляются по формулам (4), может применяться для идентификации параметров ЭГП и изучения устойчивости ЭГСП. Использование выражения (5) необходимо для исследования качества переходных процессов ЭГСП совместно с ее гидравлической частью.

Список литературы: 1. Проектирование следящих гидравлических приводов летательных аппаратов / Под ред. Н. С. Гамынина.— М.: Машиностроение, 1981.— 312 с. 2. Исследование электрогидравлических преобразователей для системы регулирования паровых турбин ХТГЗ им. С. М. Кирова / Э. А. Пикур, В. Е. Рожанский, В. Ю. Рохленко и др.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1979, № 148. Прикл. механика и процессы упр., вып. 1, с. 32—34. 3. Пикур Э. А., Северин В. П., Ласенко Р. Е. Параметрические модели электро-механического преобразователя.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1985, № 220. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 5, с. 50—52. 4. Митин В. Н., Штейнвольф Л. И. Моделирование динамических процессов в машинах с упругими звеньями.— Теория механизмов и машин, 1983, вып. 35, с. 12—18. 5. Митин В. Н., Халыпа В. М., Штейнвольф Л. И. К расчету перемещений и внутренних усилий в балочных конструкциях.— Динамика и прочность машин, 1981, вып. 34, с. 36—41.

Поступила в редколлегию 18.11.85.

УДК 531.383

В. В. ҚАРАЧУН, канд. техн. наук

О РЕАЛИЗУЕМОСТИ УСЛОВИЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В ДВУХКАНАЛЬНЫХ АВТОКОМПЕНСАЦИОННЫХ СХЕМАХ

Принцип инвариантности и условия его применения при расчете линейных и нелинейных систем глубоко и всесторонне освещен в ряде работ академиков Б. Н. Петрова и В. С. Кулебакина. Состоит он в том, что для обеспечения инвариантности выходного сигнала по отношению к возмущающему воздействию, необходимы как минимум два эквивалентных канала прохождения полезного сигнала и сигнала-помехи.

Этот метод применительно к интегрирующему гироскопу реализуется с помощью двух разновращающихся гироскопов,

одинаково ориентированных в пространстве и установленных на общем основании. Выходной сигнал прибора формируется в виде алгебраической суммы выходных сигналов гироскопов. Кроме того, вводится общая отрицательная обратная связь по сумме выходных сигналов приборов.

В этой схеме осуществляется автокомпенсация влияния кинематики основания, поскольку полезный сигнал гироскопа является нечетной, а сигнал-помеха — четной функцией кинетического момента. Таким образом, уже в простейшем варианте (без общей обратной связи) происходит удвоение коэффициента передачи прибора и вычитание помех. К недостаткам схемы следует отнести усреднение проявления внутренних помех типа трения, дебаланса и др.

Проанализируем возмущенное движение прибора. Свяжем с основанием систему координат x, y, z . Ось z направим параллельно осям чувствительности приборов, ось y параллельно осям прецессии, ось x перпендикулярно к первым двум.

Проекции угловой скорости основания на оси x, y, z имеют вид $\omega_x = \dot{\theta} - \omega_z \psi$; $\omega_y = \dot{\psi} + \omega_z \phi$; $\omega_z = \omega_z - \dot{\phi}\theta$, $\omega_z = \dot{\phi}$ (1). Здесь углы Эйлера φ, ψ, θ и их производные предполагаются малыми.

Воспользуемся методом последовательных приближений. Тогда для первых двух приближений запишем уравнения движения (с учетом обозначений [1, 2]):

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_{11} + 2h_1\dot{\beta}_{11} &= -q_1\omega_{1z} - \dot{\omega}_{1y} - k_{01}(\beta_{11} + \beta_{12}); \\ \ddot{\beta}_{12} + 2h_2\dot{\beta}_{12} &= -q_2\omega_{1z} - \dot{\omega}_{1y} - k_{02}(\beta_{11} + \beta_{12}); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_{21} + 2h_1\dot{\beta}_{21} &= -q_1\omega_{2z} + \beta_{11}r'_1\omega_{1x} + 2^{-1}a_1[(\omega_{1x}^2 - \omega_{1z}^2) \sin 2\beta_{01} + \\ &+ 2\omega_{1x}\omega_{1z} \cos 2\beta_{01}] - \dot{\omega}_{2y} - k_{01}(\beta_{21} + \beta_{22}); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_{22} + 2h_2\dot{\beta}_{22} &= -q_2\omega_{2z} + \beta_{12}r'_2\omega_{1x} + 2^{-1}a_2[(\omega_{1x}^2 - \omega_{1z}^2) \sin 2\beta_{02} + \\ &+ 2\omega_{1x}\omega_{1z} \cos 2\beta_{02}] - \dot{\omega}_{2y} - k_{02}(\beta_{21} + \beta_{22}); \quad \beta_2 = \beta_{21} - \beta_{22}; \end{aligned}$$

$$b_i B_i^{-1} = 2h_i; \quad q_{0i} B_i^{-1} = q_i; \quad R_i B_i^{-1} = a_i; \quad B_i = J_{0i} + J_{yi};$$

$$R_i = J_{0i} + J_{zi} - J_{xi}; \quad H_1 = H_2; \quad q_i = H_i B_i^{-1}; \quad r'_i = -H_i B_i^{-1};$$

$$P \equiv \frac{d}{dt}; \quad q'_i = 0; \quad q''_i = -H_i B_i^{-1},$$

где β_{ik} — угол поворота подвижной части прибора; i — приближение, $i = 1, 2$; k — номер гироскопа, $k = 1, 2$; $k_{0i} = k_y k_{дми}$ — коэффициенты передачи в цепи обратной связи; J_{ji} — моменты инерции внутреннего кольца i -го гироскопа, ($j = x, y, z$; $i = 1, 2$); J_{0i} — полярный и экваториальный моменты инерции гироскопов; b_i — коэффициент демпфирования; ω_{ij} — определяемые из выражения (1) составляющие первого и второго порядка малости ($i = 1, 2$; $j = x, y, z$); штрихи обозначают производные по входным сигналам гироскопов.

Так как в первом приближении систематическая составляющая ухода интегрирующего гироскопа отсутствует, перейдем к анализу уравнений второго приближения.

Решение уравнений (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \beta_2 \Delta = & [-q_1 (p^2 + 2h_2 p + 2k_{02}) + q_2 (p^2 + 2h_1 p + \\ & + 2k_{01})] \omega_{2z} + 2 [(h_1 - h_2) p + k_{01} - k_{02}] \dot{\omega}_{2y} + \\ & + (p^2 + 2h_2 p + 2k_{02}) Q_1 - (p^2 + 2h_1 p + 2k_{01}) Q_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Δ — определитель системы,

$$\begin{aligned} \Delta = & p^4 + 2(h_1 + h_2) p^3 + (4h_1 h_2 + k_{01} + k_{02}) p^2 + 2(h_1 k_{02} + h_2 k_{01}) p; \\ Q_i = & \beta_{1i} \dot{r}'_i \omega_{1x} + 2^{-1} a_i [(\omega_{1x}^2 - \omega_{1z}^2) \sin 2\beta_{0i} + 2\omega_{1x} \omega_{1z} \cos 2\beta_{0i}], \quad i = 1, 2; \\ \omega_{2x} = & -\omega_{1z} \psi; \quad \omega_{2z} = -\dot{\psi} \theta; \quad \dot{\omega}_{2y} = \dot{\omega}_{1z} \theta + \omega_{1z} \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Для асинхронных колебаний основания, когда

$$\theta = \rho_\theta \sin(\gamma_1 t + \delta_\theta), \quad \psi = \rho_\psi \sin(\gamma_2 t + \delta_\psi), \quad \omega_{1z} = \gamma_3 \rho_\varphi \cos(\gamma_3 t + \delta_\varphi),$$

после осреднения по времени правая часть выражения (4) обращается в нуль. Рассмотрим синхронные колебания:

$$\theta = \rho_\theta \sin(\gamma t + \delta_\theta), \quad \psi = \rho_\psi \sin(\gamma t + \delta_\psi), \quad \omega_{1z} = \gamma \rho_\varphi \cos(\gamma t + \delta_\varphi).$$

Правая часть уравнения (4) содержит гармонические слагаемые и одно постоянное слагаемое C , представляющее наибольший интерес, так как в установившемся движении ему соответствует систематический уход гироскопа, определяемый как частное решение уравнения (4):

$$p\beta_2 = 2^{-1} (h_1 k_{02} + h_2 k_{01})^{-1} C.$$

Обозначим символом $\langle \Delta \dot{\beta} \rangle$ осредненное по времени значение ухода гироскопа. Тогда дрейф нуля прибора находим по формуле ($\beta_{0i} = 0$, т.е. отсутствует входной сигнал у гироскопов):

$$\begin{aligned} \langle \Delta \dot{\beta} \rangle = & 2^{-1} (b_1 k_{02} + b_2 k_{01})^{-1} \{ (H_2 k_{01} + H_1 k_{02}) 2\gamma \rho_\theta \rho_\psi \sin(\delta_\theta - \\ & - \delta_\psi) + 2 (R_1 k_{02} - R_2 k_{01}) 2\gamma^2 \rho_\theta \rho_\varphi \cos(\delta_\theta - \delta_\varphi) - \\ & - 2\rho_\theta [\gamma^2 (\gamma^2 - c^2) + (\gamma^2 b - d)^2]^{-\frac{1}{2}} [(H_1 k_{02} F_1 + H_2 k_{01} F_2) \times \\ & \times \cos(\delta_\psi - \delta_\theta + \varepsilon) + (H_1 k_{02} L_1 + H_2 k_{01} L_2) \cos(\delta_\varphi - \delta_\theta + \varepsilon) + \\ & + (H_1 k_{02} D_1 + H_2 k_{01} D_2) \sin(\delta_\psi - \delta_\theta + \varepsilon) + (H_1 k_{02} E_1 + \\ & + H_2 k_{01} E_2) \sin(\delta_\varphi - \delta_\theta + \varepsilon) \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1 = & \gamma^3 \rho_\psi b_2 B_2; \quad F_2 = \gamma^3 \rho_\psi b_1 B_1; \quad L_i = H_i \gamma^3 \rho_\varphi + \\ & + \gamma \rho_\varphi (R_i k_{0j} B_j^{-1} H_i + k_{0i} H_i); \quad D_i = \gamma^4 \rho_\psi + 2k_j B_j^{-1} \gamma^2 \rho_\psi - k_{0i} B_i^{-1} \gamma^2 \rho_\psi; \\ E_i = & b_j B_j^{-1} H_i \gamma^2 \rho_\varphi; \quad i = 1, 2, \quad j = 2, 1. \end{aligned}$$

Пример. Пусть $H_1 = 1 \cdot 10^{-2}$ кг·м·с, $H_2 = 1,04 \cdot 10^{-2}$ кг·м·с, $b_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ кг·м·с, $b_2 = 5,5 \cdot 10^{-3}$ кг·м·с, $k_{01} = 3 \cdot 10^{-2}$ кг·м, $k_{02} = 3,04 \cdot 10^{-2}$ кг·м, $\gamma = 0,7$ с⁻¹, $\sigma_\theta - \sigma_\psi = \pi/6$ рад, $\sigma_\varphi - \sigma_\theta = \pi/2$ рад, $\rho_\theta = \rho_\psi = \pi/180$ рад, $\rho_\varphi = 5\pi/180$ рад. Тогда дрейф нуля интегрирующего гироскопа во втором приближении составит $\langle \Delta \dot{\beta} \rangle = 0,4 \cdot 10^{-4}$ рад·с⁻¹, что примерно на порядок меньше, чем для обычного гироскопа [1, с. 70].

Список литературы: 1. Луц Я. Л. Ошибки гироскопических приборов.—Л.: Судостроение, 1968.—231 с. 2. Назаров Б. Н. О погрешности двухстепенного интегрирующего гироскопа, вызванной угловыми колебаниями основания.—Изв. вузов. Приборостроение, 1960, 3, № 3, с. 243—246.

Поступила в редколлегию 28.10.85.

УДК 534.4

В. М. ШАТОХИН, канд. техн. наук

**О ПОСТРОЕНИИ ИМПУЛЬСНО-ЧАСТОТНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК СВОБОДНЫХ ДИСКРЕТНЫХ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Известно, что импульсно-частотные характеристики (ИЧХ) эффективны при нахождении реакции системы на произвольное периодическое возмущение [1], а также удобны для построения интегральных уравнений движения при исследовании некоторых нелинейных систем [1, 2].

Для построения ИЧХ необходимо нахождение периодической реакции системы на единичные периодические импульсы. При наличии эффективных программ определения собственных значений и собственных векторов произвольных матриц [3] эта задача для несвободных систем не вызывает осложнений [4]. Для свободных систем, т. е. систем, допускающих движения как свободного твердого тела, она принципиально не имеет решения.

Предлагаем методику построения обобщенных импульсно-частотных характеристик, которые являются аналогами обобщенных функций Грина [5] и позволяют определять периодическую реакцию свободной системы на любое периодическое возмущение, не содержащее постоянной составляющей, т. е. удовлетворяющее условию

$$\int_0^T F(t) dt = 0, \quad (1)$$

где T — период; $F(t)$ — возмущение.

Рассмотрим свободную дискретную механическую систему с n степенями свободы. Дифференциальные уравнения движения запишем в матричной форме

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0, \quad (2)$$

где M , B , C — матрицы инерции, демпфирования, жесткости; x — вектор перемещений масс $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; T — знак транспонирования.

Для дальнейшего целесообразно перейти от выражения (2) к системе дифференциальных уравнений первого порядка и разделить переменные. Рассмотрим вместо уравнения (2) эквивалентную систему

$$M\dot{x} + Bx + Cx = 0; \quad M\dot{x} - M\dot{x} = 0. \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (3) можно записать так:

$$A\dot{y} + Ky = 0. \quad (4)$$

Отметим, что при таком переходе матрицы A , K оказываются симметричными.

Предположим, что после стандартной подстановки $y = he^{\lambda t}$ решена обобщенная проблема о собственных значениях и собственных векторах $(\lambda A + K)h = 0$ (5).

Так как рассматривается свободная система, то среди собственных значений два будут действительными, причем одно из них нулевое, а остальные комплексно-сопряженные. Для определенности полагаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Матрицу собственных векторов обозначим через H , нормируем их, используя условие $H^T A H = E$ (6), где E — единичная матрица.

Введем новые переменные с помощью соотношения $y = Hz$ (7). После подстановки выражения (7) в уравнение (4) и умножения его слева на H^T , они разделяются

$$E\dot{z} - \bar{\Lambda}z = 0. \quad (8)$$

Здесь $\bar{\Lambda} = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n} \}$. Это следует из ортогональности собственных векторов и принятой нормировки (6).

Запишем теперь краевые условия для новых переменных, не принимая пока во внимание наличие в рассматриваемом случае нулевого собственного значения. При нахождении периодической реакции системы на единичные периодические импульсы, действующие на массу с номером k , произвольные постоянные в общем решении для y определим из условий

$$y(0) - y(T) = q, \quad (9)$$

Где

$$q_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, n+k-1, n+k+1, \dots, 2n, \\ 1/m_k, & i = n+k; \end{cases}$$

m_k — значение k -й массы.

С учетом выражения (7) формулу (9) представим в виде

$$H(\bar{z}(0) - \bar{z}(T)) = q \quad (10)$$

или после умножения слева на $H^T A$: $E(\bar{z}(0) - \bar{z}(T)) = s$ (11).
Здесь $s = H^T A q$.

Заметим, что при $\lambda_1 = 0$ из первого уравнения системы (8) следует $z_1 = C_1$, где $C_1 = \text{const}$. Но так как в общем случае $s \neq 0$, то соответствующие краевые условия из выражения (11) для z_1 не могут быть выполнены, что и означает невозможность периодического движения свободной системы под действием периодических импульсов.

Свяжем упругорассматриваемую систему с заделкой, т. е. превратим ее в несвободную. Жесткость дополнительной связи выберем достаточно малой, так, чтобы собственные значения λ_1, λ_2 оставались действительными (отрицательными). Пусть $\lambda_1 = \epsilon_1$. Дифференциальное уравнение для z_1 на основании формулы (8) примет вид

$$\dot{z}_1 - \epsilon_1 z_1 = 0, \quad (12)$$

а его общее решение

$$z_1 = C_1 e^{-\epsilon_1 t}. \quad (13)$$

Константу C_1 найдем из уравнения

$$\begin{aligned} z_1(0) - z_1(T) &= s_1^* \\ \text{или } C_1(1 - e^{-\epsilon_1 T}) &= s_1^*, \end{aligned} \quad (14)$$

где s_1^* — первая компонента вектора s^* , который для измененной системы будет несколько отличаться от s . На основании (14)

$$\begin{aligned} C_1 &= s_1^* / (1 - e^{-\epsilon_1 T}); \\ z_1 &= s_1^* e^{-\epsilon_1 t} / (1 - e^{-\epsilon_1 T}). \end{aligned} \quad (15)$$

Это выражение невозможно непосредственно использовать для построения ИЧХ, так как

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} z_1 = \infty.$$

Преобразуем его, имея в виду следующее. Если возмущение удовлетворяет условию (1) и реакция на него определяется через интеграл типа «свертки»

$$x_k = \int_0^T \varphi(t - \tau) F(\tau) d\tau, \quad (16)$$

то постоянная составляющая в ИЧХ $\varphi(t)$ не играет никакой роли. На основании этого исключим бесконечно большую постоянную составляющую в выражении для z_1 . Продифференцируем выражение (15) и, раскрывая неопределенность, определим предел производной при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$

$$\dot{z}_1 = -s_1/T. \quad (17)$$

В силу непрерывности зависимости решения от параметра

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} s_1^* = s_1.$$

Интегрируя (17) и отбрасывая произвольную постоянную, восстановим функцию z_1 , которая уже не будет удовлетворять указанному требованию, т. е. не будет содержать постоянной составляющей $z_1 = -s_1 t/T$ (18). ИЧХ, построенные с использованием этой функции, в дальнейшем будем называть обобщенными импульсно-частотными характеристиками (ОИЧХ).

При нахождении функций z_2, z_3, \dots, z_{2n} , удовлетворяющих соответствующим краевым условиям, особенностей не возникает. Необходимо только иметь в виду, что паре комплексно-сопряженных собственных значений отвечают две комплексно-сопряженные функции. После определения вектора \tilde{z} возврат к старым переменным осуществляется в соответствии с формулой (7).

Практически при построении ОИЧХ переход к новым переменным и их разделение необязательны. При записи общего решения системы однородных дифференциальных уравнений (4) через собственные значения и собственные векторы достаточно решение, отвечающее нулевому собственному значению ($\lambda_1 = 0$), брать в виде $C_1 h_1 t$, где C_1 — const; h_1 — собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 0$. Произвольные постоянные в этом выражении определяются с помощью обычных краевых условий (9). Аналогично следует поступать и в случае, если система уравнений

(2) приводится к виду $\dot{y} = \tilde{A}y$ и решается обычная задача о собственных значениях и собственных векторах $(\lambda E - \tilde{A})h = 0$.

Изложенный подход легко распространяется на свободные недемпфированные системы. В этом случае нет необходимости перехода к дифференциальным уравнениям первого порядка.

Приведем пример ОИЧХ свободной двухмассовой системы с демпфированием, построенной с помощью рассмотренной методики.

Безразмерные значения параметров: $m_1 = 1$; $m_2 = 10/39$; $c = 2/5$; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 20/39$; $b = 0$ (β_1, β_2 — демпфирование на массах, b — демпфирование в соединении). ОИЧХ для первой массы на частоте $\omega = 4/5$ (период $T = 5\pi/2$) при воздействии на эту же массу имеет вид

$$\varphi = -d_1^2 t / T + d_2^2 e^{-4t/5} / (1 - e^{-4T/5}) + 2(d_3^2 - b_3^2) e^{-3t/5} \times$$

$$\times \cos(4t/5)/(1 - e^{-3\pi/2}) - 4d_3b_3e^{-3t/5} \sin(4t/5)/(1 - e^{-3\pi/2}),$$

где $a_1 = \sqrt{39/20}$; $a_2 = 5\sqrt{3}/(2\sqrt{17})i$; $a_3 = 1,8071631 \cdot 10^{-1}$; $b_3 = 6,7541673 \cdot 10^{-1}$; $i = \sqrt{-1}$.

Легко убедиться, что полученная ОИЧХ позволяет найти периодическое движение первой массы от периодического возмущения на этой же массе, если только последнее удовлетворяет условию (1).

Список литературы: 1. Розенвассер Е. Н. Нелинейные колебания.— М.: Наука, 1969.— 576 с. 2. Карабан В. Н., Шатохин В. М., Штейнвольф Л. И. К вопросу применения итерационного метода для расчетов колебаний существенно нелинейных систем.— Динамика и прочность машин, 1981, вып. 33, с. 54—63. 3. Уилкинсон Д., Райни К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра.— М.: Машиностроение, 1976.— 390 с. 4. Карабан В. Н., Шатохин В. М., Штейнвольф Л. И. Расчет высших гармоник свободных колебаний нелинейных систем.— Динамика и прочность машин, 1977, вып. 28, с. 100—104. 5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики.— М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. Т. 1.— 356 с.

Поступила в редколлегию 25.09.85.

УДК 621.865

С. В. ЭЛЛИС, канд. техн. наук, С. В. СКОРОПАД

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВТОМАТИЧЕСКИМИ МАНИПУЛЯТОРАМИ

Промышленные роботы (ПР), являющиеся наряду с основным технологическим оборудованием и вспомогательными устройствами компонентами гибкой производственной системы, предназначены для выполнения операций перемещения, обработки, сборки и контрольно-измерительных операций. Универсальность ПР во многом определяется гибкостью его системы управления.

Основные задачи системы управления (СУ) роботом: планирование траектории движения — тактический уровень управления; выработка управляющих воздействий перемещения манипулятора — исполнительный уровень; формирование модели внешней среды.

В соответствии с перечисленными задачами СУ должна иметь сложную многоуровневую структуру, построенную по иерархическому принципу. Рассмотрим проблемы синтеза исполнительного уровня управления ПР. Точное воспроизведение запрограммированных движений ПР затруднено в силу следующих причин: изменения параметров нагрузки отдельных приводов (статических и динамических моментов), обусловлен-

ных присоединением дополнительных масс и изменения пространственного положения звеньев; наличия существенных нелинейностей (люфтов, сухого и вязкого трения); взаимосвязи отдельных степеней подвижности.

Несмотря на большое количество работ в этой области, пока нет единого подхода к проблеме синтеза исполнительного уровня управления ПР. Чаще всего удовлетворяются предположением, что требуемые траектории можно реализовать с помощью локальных следящих систем отдельных степеней подвижности без учета динамического поведения системы. Однако для некоторых типов манипуляторов взаимовлияние подсистем может быть значительным и сделать управление неудовлетворительным.

Существует два способа компенсации взаимовлияния при помощи введения глобального управления с использованием обратных связей по силам, действующих в отдельных степенях подвижности, и с помощью математической модели системы. Однако реализация таких систем сопряжена со значительными трудностями вычислительного характера.

Применение теории систем с разрывными управлениями для синтеза исполнительного уровня позволяет избежать указанных трудностей. В этом случае используется децентрализованная информационная структура управления, так как на вход каждого привода поступают сигналы, несущие информацию о координатах состояния подсистемы соответствующей степени подвижности, обслуживаемые данным приводом. Вся система считается совокупностью подсистем, отвечающих степеням подвижности — отдельным приводам.

Для синтеза исполнительного уровня предлагаем использовать скользкие движения, имеющие место на поверхности переключения в пространстве состояния систем. Синтез осуществляется в пространстве канонических переменных, так как движение в этом пространстве в скользком режиме нечувствительно к вариациям параметров объекта и возмущения. Именно свойство нечувствительности позволяет исключить взаимовлияние между различными звеньями манипулятора.

Динамика манипулятора с шестью степенями подвижности может быть описана шестью взаимосвязанными уравнениями второго порядка. Для n -звенного манипулятора уравнение движения имеет вид $u = D(\theta)\ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta)$, где u — вектор вращающего момента в сочленениях размерности n ; $D(\theta)$ — матрица размера $n \times n$, представляющая моменты инерции; $H(\theta, \dot{\theta})$ — вектор размерности n , отражающий вклад кориолисовых и центробежных сил относительно точки приведения; $G(\theta)$ — вектор размерности n , выражающий действие сил тяжести; θ — вектор угла в сочленениях размерности n .

Обозначив θ через p , а $\dot{\theta}$ через v и приняв, что $D^{-1}(\theta)$ су-

существует и определяет вектор состояния \mathbf{x} как $\mathbf{x} = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T)^T$, можно получить уравнение для координат, характеризующее состояние манипулятора: $\dot{\mathbf{v}}_i = f_i(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}_i(\mathbf{p})\mathbf{u}$, $i = 1, \dots, n$. Здесь f_i — i -я компонента $\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{p})[\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \mathbf{G}(\mathbf{p})]$; $\mathbf{b}_i(\mathbf{p})$ — i -я строка матрицы $\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{p})$.

Исходя из того что универсальная система управления ПР должна обеспечить высокую точность позиционирования и возможность точного отслеживания непрерывной траектории, можно выделить две задачи регулирования.

1. Для данного начального положения $\mathbf{p}(t_0)$, $\mathbf{v}(t_0)$ и желаемого положения \mathbf{p}_a при скорости $\mathbf{v}_a = 0$ найти управление, позволяющее заставить звенья манипулятора в конечном состоянии. Пусть ошибка по положению $\mathbf{e}(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_a$. Соответственно введем новый вектор состояния $\mathbf{x}_e = (\mathbf{e}^T, \mathbf{u}^T)^T$ с уравнениями для него:

$$\dot{e}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = f_i(\mathbf{e} + \mathbf{p}_a, \mathbf{v}) + \mathbf{b}_i(\mathbf{e} + \mathbf{p}_a)\mathbf{u}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Цель управления — обеспечить $(\mathbf{e}(t)) \rightarrow 0$.

2. Необходимо отследить желаемую траекторию по положению. Если $\boldsymbol{\omega}(t)$ — ошибка по скорости, то цель управления — обеспечение $(\mathbf{e}(t), \boldsymbol{\omega}(t)) \rightarrow 0$.

Различие между двумя задачами состоит в необходимости учета ускорения для траекторной задачи.

Чтобы решить поставленную задачу, управление $\mathbf{u}(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ выбирают в виде

$$u_i(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{p}, \mathbf{v}), & \text{если } s_i(e_i, v_i) > 0; \\ u_i^-(\mathbf{p}, \mathbf{v}), & \text{если } s_i(e_i, v_i) < 0, \\ i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

где e_i, v_i — компоненты вектора состояния (1).

Набор уравнений $s_i(e_i, v_i) = c_i e_i + v_i$, $c_i > 3$, $i = 1, \dots, n$ (2) определяет совокупность поверхностей разрыва. Задача синтеза состоит в выборе функций управления $u_i^+(\mathbf{p}, \mathbf{v})$, $u_i^-(\mathbf{p}, \mathbf{v})$, таких, чтобы на пересечении плоскостей (2) возникал скользящий режим. Уравнения движения, представляющие скользящий режим, получают используя метод эквивалентных уравнений $\dot{e}_i = -c_i e_i$, $i = 1, \dots, n$ (3).

Система (3) состоит из независимых линейных дифференциальных уравнений первого порядка, каждое из которых представляет динамику одной степени подвижности, когда система (1) находится в скользящем режиме. При этом нелинейное взаимодействие различных подсистем манипулятора исключается полностью. Более того, динамика в скользящем режиме зависит от параметров c_i , выбирающихся произвольно. Условия существования скользящих режимов таковы, что для

определения функций управления достаточно знать только границы неопределенности физических параметров манипулятора.

Например, если в качестве приводов ПР используются электродвигатели постоянного тока, управление для них выбирается в виде $u_i(p, v) = u_{i\max} \text{sign}(p_i - \bar{v}_i)$. Здесь $u_{i\max}$ — максимальный момент, развиваемый двигателем; p_i , \bar{v}_i — заданное и среднее реальное значение скорости.

Рассмотренный принцип управления приводит к разрывным управляющим сигналам с частым изменением знака. Поэтому необходимо применение электродвигателей, имеющих большую (порядка 10) перегрузку по моменту. Возможна реализация по изложенному принципу систем прямого цифрового управления электроприводами ПР на основе микропроцессоров и новых высокомоментных электродвигателей.

Список литературы: 1. Вукобратович М., Стокич Д. Управление манипуляционными роботами: теория и приложения.— М.: Наука, 1985.— 384 с. 2. Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления.— М.: Наука, 1981.— 368 с. 3. Перельмутер В. М., Соловьев А. К. Цифровые системы управления тиристорным электроприводом.— К.: Техника, 1983.— 104 с.

Поступила в редколлегию 14.10.85.

УДК 62-50

И. В. ҚОНОНЕНКО, канд. техн. наук, Е. И. ТАРАСОВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ГИБКИХ СИСТЕМ

Актуальной проблемой является создание методов автоматизированного проектирования гибких систем различных уровней и типов. Предлагаем один из подходов к решению указанной проблемы.

Синтез структуры гибких систем осуществляется с позиции максимизации годового экономического эффекта от реконструкции. При этом предполагается, что гибкая производственная система (ГПС) внедряется взамен существующего технологического оборудования. О работе действующего технологического оборудования собирается статистическая информация. На основании анализа ретроспективной информации определяются вид распределения потока заявок и его параметры, виды и параметры распределений времени обслуживания в каналах дисциплины очередей в системе. Модель системы строится методами теории массового обслуживания. Если число каналов в системе велико, то используются методы имитационного мо-

делирования. Возможные варианты и сроки реконструкции рассматриваются путем перебора.

Для моделирования процессов развития системы необходимы прогнозы ряда экзогенных переменных. Прогнозирование указанных переменных осуществляем разработанным методом среднесрочного и долгосрочного прогнозирования [1]. При этом данные, включающие ретроспективную и имеющуюся информацию о будущих значениях, например экспертные оценки, представляем в виде матрицы $\bar{\Gamma} = (\bar{\Gamma}_{\text{ретр}} \bar{\Gamma}_{\text{прогн}})^{q \times (n+d)}$. Здесь q — количество значащих переменных, включающее и прогнозируемую переменную; n — объем предыстории; d — количество точек на периоде упреждения прогноза; $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1n})$ — вектор значений прогнозируемой переменной; $(\gamma_{1,n+1}, \gamma_{1,n+2}, \dots, \gamma_{1,n+d})$ — экспертные прогнозы. Различные математические модели, которые по предположению могут входить в итоговую прогнозирующую модель, образуют банк моделей. При этом используем элементарные степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, дробно-рациональные функции, а также функции, полученные эмпирическим путем для описания обрабатываемых данных. Модели поочередно выбираем из банка и производим предварительное оценивание пригодности каждой из них для описания данных в $\bar{\Gamma}$. Допустим пробуеться модель $\gamma_{1i} = f(v_i, \mathbf{B}) + \xi_i = b_0 + b_1 u_i + \xi_i$, где v_i — независимая переменная, $u_i = \varphi(v_i)$; \mathbf{B} — вектор оцениваемых параметров. Параметры модели \mathbf{B} оцениваем на подматрице $\bar{\Gamma}_{\text{ретр}}$, исходя из условия

$$\hat{\mathbf{B}} = \arg \min_{\mathbf{B}} \sum_{i=1}^n F(\gamma_{1i} - f(v_i, \mathbf{B})).$$

Здесь $F(\xi)$ — функция потерь. В зависимости от имеющихся предположений о законе распределения помех ξ , аддитивно наложенных на «истинную» модель, функцию потерь выбираем в виде $F(\xi) = |\xi|$ или $F(\xi) = (\xi)^2$. Функцию потерь $F(\xi) = |\xi|$ применяем, если предполагаем наличие тяжелых хвостов у распределения. В противном случае — $F(\xi) = (\xi)^2$. После оценивания параметров вычисляем остаточную сумму $S = \sum_{i=1}^n F(\gamma_{1i} - f(v_i, \hat{\mathbf{B}}))$. Если при предварительном анализе пригодности необходимо выяснить, насколько хорошо модель описывает данные в $\bar{\Gamma}_{\text{прогн}}$, то вычисляется остаточная сумма $S_1 = \sum_{i=1}^{n+d} F(\gamma_{1i} - f(v_i, \hat{\mathbf{B}}))$. Аналогично производим вычисление остаточных сумм для всех пробующихся моделей. Затем модели ранжируем по значению S или S_1 . Для последующего исследования оставляем только определенное число моделей с минимальными остаточными суммами. Из оставленных элементарных моделей формируются все возможные сочетания по одной, две, три модели в виде линейных комбинаций. Далее

матрицу $\bar{\Gamma}_{\text{ретр}}$ разбиваем на две подматрицы — обучающую $\bar{\Gamma}_{\text{об}}$ и проверочную $\bar{\Gamma}_{\text{пр}}$. Разбиение осуществляем отбором каждого нечетного столбца в $\bar{\Gamma}_{\text{об}}$ и каждого четного в $\bar{\Gamma}_{\text{пр}}$. На обучающей подматрице оцениваем параметры пробных моделей прогноза $\varphi(X_i, A)$, где $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ — вектор независимых переменных; $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)^T$ — вектор оцениваемых параметров. Оценивание осуществляется в соответствии с формулой (4.8) в работе [1], т. е. с учетом возможных ограничений на значения модели. Функцию потерь $F(\xi)$ при оценивании выбираем в соответствии с имеющейся информацией о законе распределения помех или о классе таких законов. При этом используем $F(\xi) = |\xi|$, $F(\xi) = (\xi)^2$, $F(\xi) = (\xi)^p$, $p = 1,25; 1,5$, функции потерь Хьюбера, Хэмпела [1], Тьюки [2].

Ограничения могут задаваться в виде нечеткого множества. Например, используя экспертные прогнозы, сформулированные так: «в r -м году значение прогнозируемой величины будет близко к l », $r \in \{n+1, n+2, \dots, n+d\}$, приходим к заданию ограничений в виде множества $C = \{\varphi(X_r, A) \mid \text{значение } \varphi(X_r, A) \text{ близко к } l\}$. Функция принадлежности множества C может быть представлена следующим образом:

$$\mu_C(\varphi(X_r, A)) = \begin{cases} 0, & \varphi(X_r, A) \leq k, \\ (\varphi(X_r, A) - k)/(l - k), & k \leq \varphi(X_r, A) \leq l, \\ (m - \varphi(X_r, A))/(m - l), & l \leq \varphi(X_r, A) \leq m, \\ 0, & \varphi(X_r, A) \geq m, \end{cases}$$

где k, m — действительные числа. В результате A оцениваем так:

$$\hat{A} = \arg \min_A \left[\lambda_1 \sum_{i=1}^{N_{\text{об}}} \rho_i F(\gamma_{i1} - \varphi(X_i, A)) - \lambda_2 \mu_C(\varphi(X_r, A)) \right]. \quad (1)$$

Здесь $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$. Придавая различные значения λ_1, λ_2 , можно получить набор эффективных альтернатив. Если задача решается в интерактивном режиме, эксперт сделает окончательный выбор.

После оценивания всех пробных моделей в соответствии с формулами (4.8) [1] или (1) в данной работе для каждой модели на всех точках предыстории вычисляем значение

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^n \rho_i F(\gamma_{i1} - \varphi(X_i, A)), \quad (2)$$

где ρ_i — весовой коэффициент. Далее $\bar{\Gamma}_{\text{пр}}$ делаем обучающей подматрицей, а $\bar{\Gamma}_{\text{об}}$ — проверочной и для всех моделей повторяется процесс оценивания параметров и вычисления теперь уже значений Δ_2 . В матрице $\bar{\Gamma}_{\text{ретр}}$ выбираем новые обучающую и проверочную подматрицы, повторяем процесс оценивания параметров моделей и вычисления Δ_3 , опять обучающую подматрицу делаем проверочной, а проверочную — обучающей, вычисляем Δ_4 и т. д. Процесс прекращается после заданного

числа итераций g , определяемого точностными требованиями. Среди пробных моделей выбирается та, которая имеет минимальное значение $H = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_g$. Параметры этой модели оцениваются в соответствии с формулой (4.8) [1] или выражением (1) на всей матрице $\bar{\Gamma}_{\text{регр}}$. Полученная модель используется для прогнозирования технико-экономических показателей. При увеличении g алгоритм все с большей вероятностью выбирает одну и ту же модель, причем более простую.

Поскольку последние точки временных рядов могут нести информацию об изменениях тенденций, целесообразно последним значениям ряда γ_{i1} , $i = 1, 2, \dots, n$ придавать больший вес, чем остальным значениям, или применять для этих значений не робастные функции потерь, например $F(\xi_i) = (\xi_i)^2$.

Проведено исследование метода выбора структуры прогнозирующих моделей на тестовых примерах при увеличении g . В частности, решали задачу прогнозирования значений функции $y = t^2 + 2t + 3$, $t \in \{0,1; 0,2; \dots, 1\}$, скрытой в аддитивных шумах

$\xi \sim N(0; (0, 3Q)^2)$, где $Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} \left(y_i - \sum_{i=1}^{10} y_i / 10 \right)^2} / 9$. Прогноз

выдавался для значений $t \in \{1,1; 1,2; \dots, 2\}$. Генерировалось 13 реализаций шума. Рассматривали все сочетания по одной, две, три элементарных функции $1, t^{1/2}, t, t^{3/2}, t^2, t^{5/2}, t^3, t^{-1/2}, t^{-1}, t^{-3/2}$ в виде линейных комбинаций. Функцию потерь выбирали вида $F(\xi) = (\xi)^2$, $\rho_i = 1$, $i = \bar{1}, 10$, ограничения на модели не накладывались. В результате получили, что с вероятностью $P \approx 0,85$ значения прогнозируемой функции в точке $t = 2$ при $g = 2$ принадлежат интервалу $-1,07 \leq y \leq 18,98$, при $g = 4$ — интервалу $4,8 \leq y \leq 20,44$. Средние ошибки составили 0,203, и 0,14 соответственно.

Разработан пакет прикладных программ, в котором реализован описанный метод выбора структуры математических моделей и оценивания их параметров. Кроме того, пакет предназначен для решения задач оценивания параметров математических моделей, нелинейных относительно параметров, оценивания доверительных интервалов для моделей в случае гауссовых шумов и шумов, отличающихся от гауссовых. Разработан простой входной язык пакета, ориентированный на пользователя-непрограммиста.

Список литературы: 1. Кононенко И. В., Сиренко А. Н. Методы выбора структуры математических моделей. — Х.: Б. и., 1984.—64 с. 2. Hogg R. V. Statistical Robustness: One View of Its Use in Applications Today — The American Statistician, 1979, 33, № 3, p. 108—114.

Поступила в редколлегию 23.09.85.

**ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РОБОТИЗИРОВАННЫХ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ**

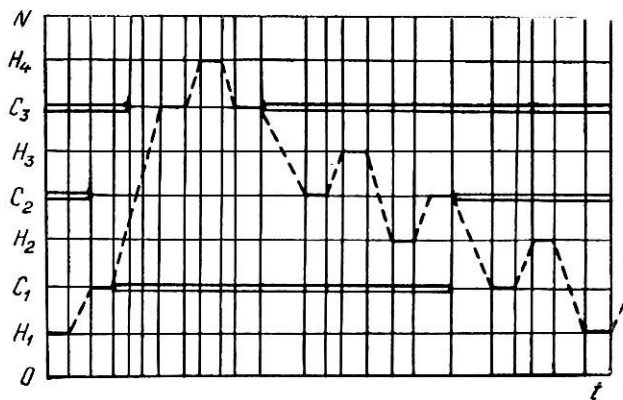
Внедрение роботизированных технологических комплексов (РТК) на стадиях технологической и конструкторской проработок требует решения ряда задач, часть из которых не может быть решена аналитически или сформулирована в виде моделей, разрешимых методами математического программирования. Допустимость и рациональность их решения подтверждается только экспериментально.

Существенную помощь в решении подобных задач оказывают имитационные модели. В экспериментах на них разрешены и подтверждены количественными оценками следующие задачи: оценка допустимости выбора количества и типа накопителей, промышленных роботов (ПР); оценка на модели ожидаемых технико-экономических показателей РТК; выбор рационального алгоритма перемещения ПР (циклограммы ПР) на множестве заданных вариантов. Описанная модель выполнена на универсальном алгоритмическом языке ФОРТРАН. В качестве альтернатив при выборе языка программирования рассматривались АЛГОЛ, PL/1, АССЕМБЛЕР, проблемно-ориентированные языки GPSS, SIMULA и СИМФОР. В модели на базе ФОРТРАНа повторены некоторые элементы, свойственные проблемно-ориентированным языкам имитационного моделирования, повышающие эффективность числового эксперимента.

Модель РТК представляет совокупность статической и динамической структур. Аналогично проблемно-ориентированным языкам GPSS, CSL [1] статическая структура реализована набором подпрограмм, имитирующих постоянные объекты «станок», «накопитель», «робот», и временного модуля «деталь», который активизируется при появлении детали в РТК, участвует в моделировании и исключается из имитационного процесса по окончании обработки.

Перечисленные объекты описываются наборами атрибутов, изменения которых в модельном времени характеризуют текущее состояние РТК и образуют динамическую структуру модели. В защищенных атрибутах объектов накапливается статистическая информация о ходе имитационного эксперимента, необходимая для расчета технико-экономических показателей функционирования РТК.

Важный вопрос при построении имитационной модели производственной системы — организация приращения модельного времени. Его решение предопределяет принадлежность модели к тому или иному методу имитации — методу расписания событий, просмотра действий или управления процессом взаимодействия [2]. В отличие от языков SIMULA, SOL или SIMPL/1 модельное время в программе наращивается не скачкообразно от события к событию, но переменным шагом $\Delta T = n\Delta t$. Тем самым достигается возможность покадрового просмотра перемещений ПР, а в случае необходимости с уменьшением n и численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как это реализуется в языке моделирования ДYNAMО [3]. В структуру модели заложен таймер модельного времени, позволяющий гибко вести процесс имитации. Разработанная методика предпочтительнее методов управления процессом взаимодействия при появлении двух ПР в конкурентной зоне обслуживания. Языки типа SIMULA в таком случае не рассматривают взаимного перемещения ПР, а следят лишь за конечными событиями типа «завершение манипулирования», «прибытие в зону» и т. п., тогда как пользователя интересует взаиморасположение ПР по мере их движения в конкурентной зоне.



Предложенная модель оснащена гибким алгоритмом ввода и вывода, модулями накопления статистических данных, генераторами псевдослучайных чисел для имитации случайных процессов (отказ оборудования, отклонения во временах обработки и перемещения ПР). Построение модели по модульному принципу с использованием методов структурного программирования обеспечивает необходимые программные ресурсы для ее модификации.

Описанная методика имитационного исследования проверена модельными экспериментами в исследованиях нескольких

вариантов линий механической обработки. В качестве примера на рисунке представлена временная диаграмма перемещения одного ПР в комплексе, состоящем из трех станков С и четырех накопителей Н. Сплошной линией на рисунке обозначено манипулирование ПР с деталью, пунктиром — транспортные перемещения ПР, параллельными прямыми — станочная обработка деталей.

В результате исследования на модели в данном примере выбран вариант управления ПР, в котором он обслуживает станки не в порядке поступления заявок, а с учетом прогноза состояния РТК на конец очередного акта обслуживания. Этим обусловлено перемещение ПР из зоны C_1 в зону C_3 , так как обслуживание находящегося в очереди быстродействующего станка C_2 привело к значительному увеличению простоев «медленных» станков C_1, C_3 . Аналогичные модельные исследования проводились и для РТК, состоящих из двух ПР и пяти-шести станков. Анализируя полученные результаты, отметим, что описанная методика позволяет строить имитационные модели на универсальных языках программирования, не прибегая к специализированным проблемно-ориентированным языкам. Этим достигается мобильность модели, удобство ее модернизации и применения.

Список литературы: 1. Дал У. И. Языки моделирования систем с дискретными событиями.— В кн.: Языки программирования / Под ред. Ф. Женюп. М.: Мир, 1972, с. 344—403. 2. Гордон Д. Вычислительные аспекты имитационного моделирования.— В кн.: Исследование операций. М.: Мир, 1981, т. 1, с. 655—679. 3. Беркович Р. Н., Корявов П. П. Динамо — язык математического моделирования.— М.: Б. и., 1972.— 30 с.

Поступила в редколлегию 28.02.85.

УДК 519.237

Н. И. БЕЗМЕНОВ

АЛГОРИТМЫ ГРУППИРОВКИ ПАРАМЕТРОВ, ОСНОВАННЫЕ НА СЛИЯНИИ ПОДМНОЖЕСТВ

Многие практические задачи в технике, медицине, социологии, экономике связаны с необходимостью выделения групп сильно связанных между собой параметров (признаков). Подобные задачи формулируются как задачи отыскания разбиения $\bar{S} \{S_k | k = \bar{1}, K\}$ множества параметров $S = \{X_j | j = \bar{1}, N\}$ на заданное чис-

ло подмножеств, таких, что степень связи между параметрами внутри каждого из них максимальна*.

Для оценки степени связи между параметрами воспользуемся рассматривавшимся в упомянутой работе информационным коэффициентом связи $\mu(X_j: X_l)$, принимающим значения из интервала $[0, 1]$ и достигающим своего максимума при взаимно однозначном соответствии значений параметров X_j, X_l . Если известна матрица связи $M = [\mu(X_j: X_l)]_{N \times N}$, то задача может быть сформулирована так: найти разбиение заданной мощности K , максимизирующее критерий качества

$$F = \sum_{k=1}^K \sum_{X_j \in S_k} \mu(X_j: X_k^*), \quad (1)$$

где X_k^* — параметр, обладающий свойством

$$\sum_{X_l \in S_k} \mu(X_l: X_k^*) = \max_{X_j \in S_k} \sum_{X_l \in S_k} \mu(X_l: X_j)$$

и называемый характерным параметром подмножества S_k .

Использование характерных параметров позволяет разработать алгоритмы последовательного уменьшения мощности разбиения с определенными свойствами. Если внутри каждого из подмножеств связь должна быть максимальной, то организация процесса формирования такого разбиения возможна на основе последовательной максимизации критериев

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^K \sum_{X_j \in S_i} \mu(X_j: X_i^*) \quad (2)$$

для $k = N, N-1, \dots, K$. Очевидно, в конечном счете мы приходим к максимизации критерия (1), так как при $k = K$ критерий качества (2) приобретает вид (1).

При получении разбиения будем исходить из того, что на каждой итерации осуществляется слияние двух подмножеств. Их выбор может производиться согласно различным правилам: С1 — объединяются подмножества, для которых достигается максимальное приращение критерия качества разбиения в предположении, что характерным параметром нового подмножества является характерный параметр одного из объединяемых подмножеств; С2 — объединяются подмножества, доставляющие максимальное приращение критерию качества разбиения; С3 — объединяются подмножества, степень связи между характерными параметрами которых максимальна.

Синтезируемые алгоритмы должны начинать свою работу с тривиального разбиения множества S на N одноэлементных подмножеств и заканчивать при получении разбиения мощности K .

* Безменов Н. И. Декомпозиционные методы группировки параметров. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1986, № 229. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 6, с. 31—35.

Рассмотрим алгоритмы, воплощающие правила С1 — С3.

Алгоритм С1. 1. Сформировать разбиение $\bar{S} = \{S_k | S_k = \{X_k\}, k = \overline{1, N}\}$. 2. Положить $i = N - 1$. 3. Если $i < K$, перейти к п. 8. 4. Найти значения q', r' , такие, что

$$\max \left\{ \sum_{X_j \in S_{r'}} (\mu(X_j: X_{q'}^*) - \mu(X_j: X_{r'}^*)), \sum_{X_j \in S_{q'}} (\mu(X_j: X_{r'}^*) - \mu(X_j: X_{q'}^*)) \right\} = \max_{\substack{q, r = \overline{1, i+1} \\ r > q}} \max \left\{ \sum_{X_j \in S_r} (\mu(X_j: X_q^*) - \mu(X_j: X_r^*)), \sum_{X_j \in S_q} (\mu(X_j: X_r^*) - \mu(X_j: X_q^*)) \right\}. \quad (3)$$

5. Положить $S_l = S_{l+1}, X_l^* = X_{l+1}^*, l = \overline{r', i}; S_{q'} = S_{q'} \cup S_{r'}$. 6. Определить характерный параметр $X_{q'}^*$ подмножества $S_{q'}$. 7. Положить $i = i - 1$ и перейти к п. 3. 8. Определить значение критерия качества разбиения и остановиться.

В алгоритме С1 при объединении двух подмножеств $S_{q'}, S_{r'}$ результирующее подмножество получает номер, равный $\min\{q', r'\}$, а так как $r > q$, то $\min\{q', r'\} = q', \max\{q', r'\} = r'$.

При реализации вычислительной процедуры, представляющей правило С2, можно воспользоваться вычислительной схемой алгоритма С1, за исключением шага 4, действия которого заменяются на следующие:

4. Найти значения q', r' , такие, что

$$\begin{aligned} & \sum_{X_j \in S_{q'} \cup S_{r'}} \mu(X_j: X_{\{q', r'\}}^*) - \sum_{X_j \in S_{q'}} \mu(X_j: X_{q'}^*) - \\ & - \sum_{X_j \in S_{r'}} \mu(X_j: X_{r'}^*) = \max_{\substack{q, r = \overline{1, i+1} \\ r > q}} \left\{ \sum_{X_j \in S_q \cup S_r} \mu(X_j: X_{\{q, r\}}^*) - \right. \\ & \left. - \sum_{X_j \in S_q} \mu(X_j: X_q^*) - \sum_{X_j \in S_r} \mu(X_j: X_r^*) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $X_{\{q', r'\}}^*, X_{\{q, r\}}^*$ — характерные параметры подмножеств $S_{q'} \cup S_{r'}, S_q \cup S_r$.

Алгоритм, воплощающий правило С3, также отличается от алгоритма С1 только в шаге 4. Действия последнего приобретают вид:

4. Найти значения q', r' , такие, что

$$\mu(X_{q'}^*, X_{r'}^*) = \max_{\substack{q, r = \overline{1, i+1} \\ r > q}} \mu(X_q^*: X_r^*). \quad (5)$$

Очевидно, алгоритм, основанный на выполнении условия (5), не связан с максимизацией критерия (2). Алгоритмы, реализующие правила С1, С2 и использующие соответственно условия (3), (4), хоть и несколько сложнее, однако в большей степени соответствуют постановке задачи. Наиболее приемлемо правило С2, но базирующийся на нем алгоритм сложнее ал-

Горизонтальная СИ, поскольку при его работе происходит определение характерных параметров для всех вариантов попарного объединения подмножеств.

Поступила в редколлегию 30.09.85.

УДК 681.3

О. Н. МАЛЫХ, канд. техн. наук, *А. В. АРДЕЛЬЯН*,
М. Ю. БОБЛАК, *Л. Н. НАУМОВ*, *Ю. С. ШАХНОВСКИЙ*

АЛГОРИТМ УПАКОВКИ МНОГОЦИКЛОВЫХ МИКРООПЕРАЦИЙ

В современных ЭВМ, построенных на микропроцессорных комплектах больших интегральных схем, применяется микропрограммное управление. При этом каждая машинная команда реализуется не на логических схемах, а выполняется путем интерпретации микропрограммы (МП), записанной в управляющей памяти машины. Микрооперации, составляющие МП, непосредственно управляют аппаратными ресурсами вычислителя и становятся выполнимыми после размещения в микрокомандах. За одно обращение к управляющей памяти извлекается одна микрокоманда, которая в процессе исполнения является управляющим словом машины.

Любая микрокоманда характеризуется форматом, т. е. набором полей определенной разрядности, куда заносятся коды микроопераций, их операндов, а также константы.

При вертикальном микропрограммном управлении в каждую микрокоманду может быть включена только одна микрооперация, а при горизонтальном — несколько. Следовательно, микрокоманда горизонтально управляемой машины отражает возможный аппаратный параллелизм при выполнении микроопераций и обеспечивает большую загрузку ресурсов в каждый момент времени. Последнее служит основным источником повышения быстродействия вычислителя заданной архитектуры при реализации конкретного алгоритма.

Первоначально МП представляется в виде последовательности микроопераций. Для машины с горизонтальным управлением необходимо установить способ размещения микроопераций исходной последовательности в форматах микрокоманд.

Рассмотрим задачу локальной упаковки микрокоманд. Она считается заданной, если определены набор форматов микрокоманд и линейные сегменты МП, не содержащие точек вет-

вления, кроме возможного ветвления в конце, и обладающие единственным входом-началом сегмента. Решение задачи — последовательность микрокоманд — составляется с учетом следующих характеристик используемых микроопераций и форматов: размещаются многофазные микрооперации, выполняемые в течение нескольких машинных циклов; для упаковки применяются различные по структуре горизонтальные частично-кодированные форматы микрокоманд. Сформированное решение задачи будет допустимым, если не искажены условия связей микроопераций по данным, отсутствуют конфликты между микрооперациями на общих ресурсах, установленные сочетания микроопераций в каждой из микрокоманд удовлетворяют форматным ограничениям.

Решение задачи оценивается числом составляющих микрокоманд. Необходимо найти такое допустимое размещение микроопераций в микрокомандах, чтобы их количество оказалось минимальным.

Процесс осуществления многоциклового микрооперации mo_i состоит в реализации последовательности $S_i = (iq_j | j = \overline{1, j_i})$ управляющих сигналов. Каждый сигнал iq формируется в одной из K_f фаз машинного цикла и активирует ресурс q в течение t_{iq} фаз, в общем случае, смежных циклов выполнения микрооперации. До размещения mo_i начало сигнала определяется как момент времени u_{iq}^0 при условии, что микрооперация начинается в нулевой момент времени.

В каждом операционном поле используемых горизонтальных микрокоманд размещается код одной из микроопераций, претендующих на включение в это поле. При упаковке все или некоторые из полей микрокоманды могут не заполняться микрооперациями, т. е. могут быть пустыми, что и характеризует горизонтальные микрокоманды такого типа, как частично-кодированные.

Для решения задачи локальной упаковки предлагаем алгоритм, в котором допустимость размещения микроопераций по данным устанавливается при разрешении ресурсных конфликтов между микрооперациями.

1. Для каждой микрооперации mo_i исходного линейного списка $MO := (mo_i | i = \overline{1, n})$ установить предварительный момент начала $u_i = 0$; для каждого ресурса q , используемого микрооперациями из MO , установить момент готовности к загрузке $u_q = 0$.
2. Положить $i = 1$; микрооперацию mo_1 начать в первом цикле, т. е. в момент времени $u_1 = 0$; сформировать множество $O_1 := \{mo_1\}$ микроопераций, запускаемых в первом цикле расписания.
3. Положить $C_{\max} = 1$, т. е. зафиксировать максимальный номер цикла расписания, использованный для запуска микроопераций из MO , и перейти к п. 25.
4. Положить $j = 1$, $Flag = 0$.
5. Если $u_q \leq u_{iq_j}^0$, т. е. в момент $u_{iq_j}^0$ ресурс q свободен положить $k_j = 0$ и перейти к п. 9.
6. Вычислить временной интервал $\tau_j = u_q - u_{iq_j}^0$.
7. Если $\tau_j < K_f$, положить $k_j = 1$ и перейти к п. 9.
8. Если

τ_j кратно K_f , положить $k_j = \tau_j / K_f$; иначе положить $k_j = [\tau_j / K_f] + 1$, где $[\cdot]$ — целая часть отношения. 9. Положить $j = j + 1$; если $j \leq j_i$, перейти к п. 5. 10. Определить $k = \max_j k_j$. 11. Положить $C = k + 1$, т. е. определить наиболее ранний цикл запуска mo_i без учета форматных ограничений. 12. Если $C \leq C_{\max}$, перейти к п. 17. 13. Микрооперацию mo_i начать в C -м цикле расписания, сформировать множество $O_C = \{mo_i\}$ микроопераций, запускаемых в цикле C . 14. Если $C - C_{\max} = 1$, положить $C_{\max} = C$ и перейти к п. 24. 15. Положить $Z = C - C_{\max} - 1$. 16. Сформировать пустые множества микроопераций $O_{C_{\max}+z} = \emptyset$, $z = \overline{1, Z}$, соответствующие циклам $C_{\max} + 1, \dots, C_{\max} + Z$, в которых не осуществляется запуск микроопераций; положить $C_{\max} = C$ и перейти к п. 24. 17. Если $C = 1$ и для каждого ресурса q , используемого mo_i , момент готовности к загрузке $u_q = 0$, то положить $Flag = 1$, т. е. mo_i не зависит по данным от всех микроопераций, включенных в расписание. 18. Если множество микроопераций, запускаемых в C -м цикле, $O_C = \emptyset$, то mo_i начать в цикле C расписания, сформировать $O_C = \{mo_i\}$ и перейти к п. 24. 19. Если mo_i и микрооперации из O_C могут быть размещены в одной или нескольких микрокомандах из заданного набора микрокоманд, то mo_i начать в цикле C расписания, сформировать $O_C = O_C \cup \{mo_i\}$ и перейти к п. 24. 20. Положить $C = C + 1$; если $C \leq C_{\max}$, перейти к п. 18, 21. Если $Flag = 0$, то mo_i начать в C -м цикле расписания, сформировать $O_C = \{mo_i\}$; положить $C_{\max} = C$ и перейти к п. 24. 22. Микрооперацию mo_i запустить в первом цикле, т. е. в момент времени $u_1 = 0$, и сформировать $O_1 = \{mo_i\}$. 23. Для всех включенных в расписание микроопераций (исключая mo_i , начатую в первом цикле) положить $C_{i'}$ = $C_{i'} + 1$, $i' = \overline{1, i - 1}$; для всех ресурсов, используемых $mo_{i'}$, $i' = \overline{1, i - 1}$, положить $u_q = u_q + K_f$. 24. Вычислить момент начала $u_i = k \cdot K_f$ микрооперации mo_i . 25. Для всех ресурсов микрооперации mo_i вычислить $u_q = u_i + u_{iq}^2 + t_{iq}$, $j = \overline{1, j_i}$, т. е. найти моменты освобождения ресурсов после включения mo_i в расписание. 26. Положить $i = i + 1$; если $i \leq n$, перейти к п. 4. 27. Определить длительность расписания $U = \max_q u_q$, выраженную в количестве фаз. 28. Если U кратно K_f , положить $D = U / K_f$; иначе положить $D = [U / K_f] + 1$, т. е. установить количество циклов, составляющих расписание. 29. Положить $C = 1$. 30. Если $O_C = \emptyset$, в заданном наборе форматов микрокоманд mk_l , $l = \overline{1, L}$, выделить формат $mk_l = \{mo_{i_p} | p = \overline{1, p_l}\}$, для которого выполняется условие $mk_l \cap O_C = O_C$; перейти к п. 32. 31. Сформировать пустую микрокоманду. 32. Положить $C = C + 1$; если $C \leq D$ перейти к п. 30; иначе остановиться.

Данный алгоритм выделяет очередную микрооперацию для включения в решение по правилу: первый пришел — первый обслужен. Следовательно, качество решения зависит от начального расположения микроопераций в сегменте.

Реализация принятой стратегии упаковки аргументируется следующим. Во-первых, при использовании указанного правила наиболее просто достигается допустимое расположение в микрокомандах микроопераций перехода, маскирования и управления

прерыванием, чувствительных к размещению в управляющей памяти. Во-вторых, в большинстве сегментов все микрооперации связаны по данным, что обуславливает единственность их начального расположения и, как следствие, возможность получения только одного решения

Сферой применения предложенного алгоритма локальной упаковки микрокода являются системы трансляции с языков микропрограммирования высокого уровня. На основе алгоритма упаковки строится постпроцессор, преобразующий промежуточное представление МП, полученное в результате трансляции, в объектный код МП, размещаемый в управляющей памяти вычислителя.

Поступила в редколлегию 26.09.85.

УДК 681.322

А. П. СЛЕПЧЕНКО, Г. М. ВАСИЛЕНКО

ФОРМИРОВАНИЕ МИКРОКОМАНД С ЧАСТИЧНО КОДИРОВАННЫМ ФОРМАТОМ

Перспективным направлением развития специализированных вычислительных систем с микропрограммным управлением является использование принципа параллельного микропрограммирования, обеспечивающего повышение быстродействия в результате параллельного выполнения микроопераций. Автоматизация проектирования систем, позволяющих осуществлять адаптацию архитектуры на класс решаемых задач, требует разработки трансляторов с языка микропрограммирования высокого уровня (типа языка Ада) и языка описания микроархитектуры ЭВМ, а также подсистемы формирования микрокоманд из последовательности микроопераций [1].

В задаче формирования (упаковки) микрокоманд с частично кодированным форматом требуется определить допустимые наборы микроопераций, обеспечивающие минимальное время выполнения микропрограммы и не вызывающие конфликтов по данным, форматам микрокоманд и используемым вычислительным ресурсам. Для получения точных решений комбинаторной задачи формирования микрокоманд требуются большие затраты времени, поэтому на практике широко используются эвристические методы, обеспечивающие решение, близкое к оптимальному, при меньших затратах времени.

Разработаны алгоритмы формирования микрокоманд для различных типов микропрограммируемых ЭВМ. Рассмотрены

алгоритмы формирования микрокоманд с горизонтальным форматом, выполняемых в течение одного машинного цикла [2].

Получен алгоритм формирования полифазных микрокоманд с частично кодированным форматом, выполняемых в течение нескольких машинных циклов [3].

В алгоритме используется понятие критических микроопераций, не имеющих резерва времени. Для определения критических микроопераций производится построение таблиц микрошаблонов, содержащих информацию об использовании во времени регистров и других вычислительных ресурсов. Критические микрооперации характеризуются одним и тем же положением микрошаблонов в таблицах с возможно ранними и возможно поздними сроками выполнения. Алгоритм реализует выбор формата микрокоманд, включающего наибольшее число критических микроопераций, но процедура построения таблиц микрошаблонов, определяющих критические микрооперации, не предусматривает сдвига микрошаблонов, связанных зависимостью по данным, относительно двух других микрошаблонов, также связанных зависимостью по данным. В результате возникает неполная компактность получаемых таблиц микрошаблонов и, как следствие, неполная компактность формируемых микрокоманд.

Предлагаемый алгоритм формирования полифазных микрокоманд, выполняемых в течение нескольких машинных циклов, основан на построении графа зависимости по данным. Вершины графа представляют микрооперации, а дуги связывают вершины в случае, если результат выполнения одной микрооперации используется в качестве исходных данных при выполнении другой микрооперации. Граф позволяет сформировать множество открытых микроопераций (не имеющих невыполненных предшествующих), анализируемых на совместность и отбираемых в микрокоманды. Совместность микроопераций характеризуется отсутствием конфликта по используемым вычислительным ресурсам, по данным и форматам микрокоманд. Отсутствие конфликта по используемым ресурсам выявляется сравнением значений времени освобождения и начала использования вычислительного ресурса. Алгоритм допускает включение в состав микрокоманд пар совместных микроопераций, связанных зависимостью по данным. Исходная информация задается таблицей кодов микроопераций и операндов, а также таблицей описания микроархитектуры ЭВМ, содержащей перечень микроопераций с описанием входящих в их состав микроприказов — элементарных действий по использованию вычислительных ресурсов.

Алгоритм формирования микрокоманд на основе графа зависимости по данным имеет следующий вид:

1. Формируется таблица использования ресурсов по исходной таблице описания линейной последовательности микроопе-

раций и по таблице описания микроархитектуры ЭВМ. 2. Анализируется полученная таблица и строится граф зависимости по данным. 3. Формируется множество открытых микроопераций. 4. Вычисляется время использования открытыми микрооперациями вычислительных ресурсов. 5. Анализируется время и признаки использования вычислительных ресурсов, форматы микрокоманд. 6. Если обнаружен конфликт, следует переход к шагу 7. При отсутствии конфликта — переход к шагу 8. 7. Из множества открытых микроопераций выделяется подмножество микроопераций, не вызывающих конфликтов. 8. Отбираются микрооперации в микрокоманду. 9. Анализируются микрооперации следующего яруса графа зависимости по данным, которые в случае совместности с уже отобранными микрооперациями также включаются в микрокоманду. 10. Если все микрооперации включены в микрокоманды, то конец вычислений, в противном случае — переход к шагу 3.

Данный алгоритм программно реализован и содержит 350 операторов языка ФОРТРАН-IV. Решение тестового примера показало, что последовательность микрокоманд, сформированных на основе графа зависимости по данным, выполняется в течение 13 машинных циклов, а выполнение микрокоманд, сформированных с использованием критических микроопераций, занимает 16 машинных циклов.

Список литературы: 1. Liun I., Shriver B., Dasgupta S. Component identification for portable, retargetable firmware development system. — In: IEEE Int. Workshop Comput. Syst. Organ., New Orleans, 29—31 March, 1983. — Silver Spring, 1983, p. 164—170. 2. Пуйль Е. И. О применении параллельных логических схем алгоритмов при горизонтальном микропрограммировании. — В кн.: Управление на сетях и узлах связи. — М.: Б. и., 1979, с. 93—101. 3. Tokogo M., Tamura E., Takizuka T. Optimization of microprogram. — IEEE Trans. Comput., 1981, с—30, № 7, p. 491—504.

Поступила в редколлегию 04. 11. 85.

УДК 519.6

В. Л. ЛИСИЦКИЙ, канд. техн. наук

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУР ДВУХУРОВНЕВЫХ РАЗРАБАТЫВАЮЩИХ СИСТЕМ

Рассмотрим двухуровневую, организационно-экономическую (разрабатывающую) систему A . Поведение \bar{A} последней направлено на создание конечного множества $\Pi = \{1, 2, \dots, N\}$ ранжированных по приоритету сложных технических комплексов (ТК). В начальный момент времени система располагает однородными

трудовыми ресурсами, сосредоточенными в ее подсистемах A_k , $k = \overline{1, H}$, уровни $R_k(0)$ ресурсов которых определяют исходную структуру $|A|_0 = |R_1(0), R_2(0), \dots, R_H(0)|$ системы. На интервале планирования $[0, T]$ вследствие изменения ε_k начального объема ресурса и роста γ_k производительности труда под влиянием научно-технического прогресса происходит изменение структуры $|A|_t = |R_1(\varepsilon_1, \gamma_1, t), R_2(\varepsilon_2, \gamma_2, t), \dots, R_H(\varepsilon_H, \gamma_H, t)|$, где $R_k(\varepsilon_k, \gamma_k, t) = (R_k(0) + \varepsilon_k)(1 + \gamma_k)^t$, обуславливающее рост компонент $S^k(\varepsilon_k, \gamma_k, t) = \int_0^T R_k(\varepsilon_k, \gamma_k, t) dt$, $k = \overline{1, H}$ вектора $S = (S^1, S^2, \dots, S^H)$ потенциальных возможностей подсистем A_k разрабатывающей системы A [1].

Каждый ТК имеет иерархическую структуру, элементами которой являются подсистемы, системы, части ТК. Базовый элемент разработки ТК — типовой этап. Номенклатура, содержание типовых этапов для всех элементов одного ТК одинаковы. Типовые этапы j -го ТК общей численностью n_j выполняются последовательно, непрерывно друг за другом. Порядок выполнения этапов по каждому ТК задан, потребление ресурса на этапе постоянно.

Производственная программа A_k характеризуется множеством $\Pi_k \subset \Pi$ номеров ТК, в создании которых он участвует. Структурные элементы ТК построены такими, что A_k разрабатывает единственный элемент j -го ТК, $j \in \Pi_k$. Каждый элемент ТК разрабатывается одной подсистемой. Распределение элементов ТК между A_k задано и на интервале $[0, T]$ не меняется.

В системе по каждому этапу i элемента j -го ТК, $j \in \Pi_k$, $k = \overline{1, H}$ с достаточной степенью достоверности заданы его трудоемкость S_{ij}^k и минимальная продолжительность a_{ij} . Вектор C с компонентами

$C_k = \sum_{j \in \Pi_k} \sum_{i=1}^{n_j} S_{ij}^k$, равными суммарным трудоемкостям работ программы Π_k , характеризует потребные возможности подсистем A_k . Задание длительностей τ_{ij}^k , $i = \overline{1, n_j}$, $j \in \Pi_k$, определяет календарный план $\bar{\tau}_k$ выполнения программы Π_k и кусочно-постоянную функцию $\bar{R}_k(t)$ изменения потребного объема ресурса в A_k , моменты разрывов которой соответствуют моментам завершения типовых этапов.

Участие различных подсистем в создании j -го ТК требует обеспечения сбалансированности сроков выполнения одноименных этапов различными A_k , что достигается внедрением условий

$$\forall_{k \in H_j} \{ \tau_{ij}^k = \tau_{ij}, i = \overline{1, n_j}, H_j = \{k : j \in \Pi_k\}, j = \overline{1, H} \quad (1)$$

равной продолжительности одноименных этапов.

Участие A_k в различных кооперациях H_j требует сбалансированности имеющихся $R_k(t)$ и необходимых $\bar{R}_k(t)$ объемов ресурсов

во всех подсистемах. Мера сбалансированности их — среднеквадратичное отклонение $\Phi_k = \frac{1}{T} \int_0^T (\tilde{R}_k(t) - R_k(t))^2 dt$ и степень $W_k = \tilde{C}_k / S_k$, $\tilde{C}_k = \int_0^T \tilde{R}_k(t) dt$ использования ресурсов подсистем A_k .

Необходимость учета различных приоритетов α_j , $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^H \alpha_j = 1$ технических комплексов обуславливает выбор в качестве критериальной характеристики показателя $L = \sum_{j=1}^H \alpha_j \sum_{i=1}^{n_j} \tau_{ij}$ взвешенного времени выполнения программы Π системы.

Задача оптимизации структуры $|A|_t$ состоит в выборе таких ее параметров роста $\mathbf{e}^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_H^*)$, $\bar{\gamma}^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_H^*)$ и календарных планов $\bar{\tau}_k$, которые, удовлетворяя ограничениям на рост системы

$$R_k(\varepsilon_k, \gamma_k, t) \geq 0, \gamma_k \geq 0, k = \overline{1, H}, \quad (2)$$

условиям (1), технологическим ограничениям

$$\tau_{ij}^k \geq \alpha_{ij}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

обеспечивают на интервале $[0, T]$ во всех подсистемах A_k наиболее сбалансированное потребление ресурсов $R_k(t)$, $k = \overline{1, H}$ при максимальном сокращении обобщенного времени L выполнения программы.

Задача нахождения оптимальной структуры $|A|_t^* = |R_1(\varepsilon_1^*, \gamma_1^*, t), R_2(\varepsilon_2^*, \gamma_2^*, t), \dots, R_H(\varepsilon_H^*, \gamma_H^*, t)|$ — многокритериальная задача нелинейного программирования

$$\begin{aligned} & \min_{|A|_t} \min_{\bar{\tau}_k} \max_{k=\overline{1, H}} \{\Phi_k(\varepsilon_k, \gamma_k, \bar{\tau}_k)\}; \\ & \max_{|A|_t} \max_{\bar{\tau}_k} \min_{k=\overline{1, H}} \{W_k(\varepsilon_k, \gamma_k, \bar{\tau}_k)\}; \\ & \min_{|A|_t} \min_{\bar{\tau}} \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j \sum_{i=1}^{n_j} \tau_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

при выполнении условий (1), (2), (3). Вектор $\bar{\tau} = (\tau_{ij}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, N})$.

Высокая размерность задачи (4) обуславливает целесообразность построения комплексного критерия оптимальности структуры $|A|_t$ на основе введения частных критериев

$$\begin{aligned} \varphi_k(\varepsilon_k, \gamma_k, \tau_k) &= \Phi_k(\varepsilon_k, \gamma_k) / \Phi(\varepsilon_k, \gamma_k, \tau_k); \\ r_1(\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}, \bar{\tau}) &= \left[\sum_{k=1}^H (\varphi_k(\varepsilon_k, \gamma_k, \bar{\tau}))^{p_1} \right]^{1/p_1}; \end{aligned}$$

$$r_2(\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}, \bar{\tau}) = \left[\sum_{k=1}^H (W_k(\varepsilon_k, \gamma_k, \bar{\tau}))^{p_2} \right]^{1/p_2};$$

$$r_3(\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}, \bar{\tau}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sum_{i=1}^{P_j} a_{ij}/L(\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}, \bar{\tau}),$$

где $\Phi_k^*(\varepsilon_k, \gamma_k)$ — наименьшее значение $\Phi_k(\varepsilon_k, \gamma_k, \tau_k)$ среди τ_k , удовлетворяющих условиям (3). Целые, отличные от нуля числа p_1, p_2 , выбираются таким образом, что $p_1 \gg 0, p_2 \ll 0$ [2].

Если p_1, p_2 выбраны подходящим образом, то решение задачи (4) может быть определено в результате решения задачи нелинейного программирования

$$\max_{|A|_t} \max_{\bar{\tau}} r_i(\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}, \bar{\tau}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

для $|A|_t$, удовлетворяющим условиям (1), (2), (3).

Комплексный критерий $r(\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}, \bar{\tau}) = \left[\sum_{i=1}^3 r_i(\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}, \bar{\tau})^{p_0} \right]^{1/p_0}$ оптимальности $|A|_t$ — степенная оценка частных критериев, характеризующих «равномерность» потребления ресурса (r_1), «напряженность» планового задания (r_2), «продолжительность» выполнения программы (r_3); p_0 — целое, отличное от нуля число, выбираемое из условия достаточной адекватности задачи (5) однокритериальной задаче нелинейного программирования

$$\max_{|A|_t} \max_{\bar{\tau}} r(\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}, \bar{\tau}) \quad (6)$$

при выполнении условий (1), (2), (3).

В результате решения задачи (6) находим параметры $\bar{\varepsilon}^*, \bar{\gamma}^*, \bar{\tau}^*$, обуславливающие сбалансированные траектории $\tilde{R}_k(\bar{\tau}^*, t)$ и $R_k(\varepsilon_k, \gamma_k, t)$, $k = \overline{1, H}$ роста потребляемых и располагаемых ресурсов подсистем, оптимальное изменение структуры разрабатывающей системы A на рассматриваемом интервале планирования.

Список литературы: 1. Лисицкий В. Л., Гужва В. А. Синтез и планирование развития структур двухуровневых разрабатывающих систем: В кн.: Тез. докл. Третьего Всесоюз. семинара «Методы синтеза и планирования развития структур крупномасштабных систем», 6—8 июня 1985. М., 1985, с. 25—26. 2. Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма / В. Н. Бурков, В. В. Кондратьев, В. В. Цыганов, А. М. Черкашин. М.: Наука, 1984.— 272 с.

Поступила в редколлегию 14.11.85.

**СОГЛАСОВАНИЕ СИСТЕМ ПЛАНИРОВАНИЯ
ТРАНСПОРТНЫХ ПЕРЕВОЗОК И ОПЕРАТИВНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ РЕАЛИЗАЦИИ ПЛАНОВ**

Практика перевозок товарной продукции в условиях научно-технического прогресса выдвигает целый ряд важных народнохозяйственных задач. Одна из них связана с проблемой снижения транспортных затрат в результате повышения эффективности использования имеющихся транспортных средств.

Проанализируем основные причины, приводящие к возникновению рассматриваемой проблемы. Предположим, что прикрепление поставщиков к потребителям осуществлено на основании решения транспортной задачи линейного программирования.

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ijl} x_{ijl}; \quad (1)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ijl} = a_{il}, \quad i \in I = \{1, \dots, n\}, \quad l \in L = \{1, \dots, q\};$$

$$\sum_{i \in I} x_{ijl} = b_{jl}, \quad j \in J = \{1, \dots, m\}, \quad l \in L;$$

$$x_{ijl} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad l \in L.$$

Задачу минимизации функции цели (1) обозначим T^1 . Последняя характеризует транспортные перевозки товарной продукции за планируемый период по критерию минимума затрат на перемещение неоднородного продукта $l \in L$ из пунктов производства $i \in I$ в пункты потребления $j \in J$. Здесь $\{c_{ijl}; i \in I; j \in J; l \in L\}$ — матрица стоимостей перевозок l -й номенклатуры из пунктов $i \in I$ в пункты $j \in J$, а $x = \{x_{ijl}; i \in I; j \in J; l \in L\}$ — матрица компонент плана, реализуемого по соответствующим маршрутам. Отсутствие связывающих ограничений по $l \in L$ позволяет задачу T^1 свести к q независимым классическим транспортным задачам.

Эффективность использования транспортных средств в условиях планирования T^1 существенно зависит от длины планового периода t . В этом нетрудно убедиться. Процесс реализации плана T^1 состоит в реализации соответствующего ему графика поставок. При этом оказывается, что длина временного интервала T_{jl}^v между поставками и размер Q_{jl}^v разовой поставки носят случайный характер, где v — индекс планового числа интервалов снабжения, $v = N = \{1, \dots, z_{jl}\}$. Даже при незначительных значениях дисперсий $D[T_{jl}^v]$, $D[Q_{jl}^v]$ и сбалансированности объемов производ-

ства и потребления $\sum_{i \in I} a_{il} = \sum_{j \in J} b_{jl}$, $l \in L$ на плановом периоде t могут

наблюдаться отклонения от планирования T^1 . Таким образом, наличие проблемы устойчивости плановых решений по отношению к случайным возмущениям, возникающим в процессе реализации планов. Пусть $F = \sum_{l \in L} f_l$ — оптимальное решение задачи T^1 . Здесь

f_l — оптимальное решение l -й классической транспортной задачи. Возможны три случая нарушения графика поставок. В первом случае $D[T_{il}^y]$ — малые величины, которыми можно пренебречь, $D[Q_{jl}^y]$ существенно отличны от нуля. Во втором случае $D[T_{il}^y]$ принимают весомые значения, $D[Q_{jl}^y]$ пренебрежимо мало. В третьем — $D[T_{il}^y]$, $D[Q_{jl}^y]$ одновременно отличны от нуля. Во всех ситуациях справедливы соотношения $\sum_{i \in I} a_{il}^y \cong \sum_{j \in J} b_{jl}^y$ и на заранее

известном ν -м интервале снабжения $\nu \in N_1 \subset N$ возникает необходимость либо в перераспределении товарной продукции на уровне потребителей, либо изменении маршрутов плановых поставок. Это повышает надежность выполнения планов предприятий уровня l , однако приводит к дополнительным транспортным затратам F_Δ . Для широкого класса номенклатур товарной продукции $z_{jl}(t)$ с ростом t — неубывающая функция, а это значит, что вероятность выполнения графика поставок $p(t)$ не может возрастать. Функция дополнительных транспортных затрат не убывает и может достигнуть значений, соизмеримых со значением F . В условиях транзитной формы снабжения при длине планового периода в один год z_{jl} достигает сотен, что во многих практических случаях делает модели рассмотренного вида малоэффективными.

Задача минимизации затрат F_Δ непосредственно примыкает к проблеме маневрирования и характеризует динамику процесса снабжения. Отсутствие координации между задачей планирования перевозок и задачей динамики процесса снабжения существенно влияет на эффективность использования транспортных средств и влечет за собой избыточные транспортные расходы.

Рассмотрим подход, позволяющий избавиться от указанных выше недостатков на этапе планирования перевозок. Составим совместный план транспортировок, учитывающий возможные варианты перераспределения товарной продукции на уровне потребителей [1]. Найти

$$\min_{x, \hat{x}} \left(\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} c_{ikl} x_{ikl} + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \hat{c}_{kjl} \hat{x}_{kjl} \right); \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ikl} = a_{il}, \quad i \in I, \quad l \in L;$$

$$\sum_{i \in I} x_{ikl} = \sum_{j \in J} \hat{x}_{kjl}, \quad k \in K = \{1, \dots, m\}; \quad l \in L;$$

$$\sum_{k \in K} \hat{x}_{kjl} = b_{jl}, \quad j \in J; \quad l \in L;$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \hat{x}_{kjl} \leq \hat{b}_k, \quad k \in K;$$

$$x_{ikl} \geq 0; \quad \hat{x}_{kjl} \geq 0, \quad i \in I, \quad k \in K, \quad j \in J, \quad l \in L.$$

Задачу минимизации функции цели (2) обозначим T^2 . Уровень k имеет тот же физический смысл, что и уровень j в задаче T^1 , причем $K = J$.

Рассмотрим ограничения $\sum_{i \in I} x_{ijl} = b_{jl}$, $j \in J$, $l \in L$ задачи T^1 .

Просуммируем их по l :

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} x_{ijl} = b_j, \quad j \in J. \quad (3)$$

В задаче T^2 значения (3) остаются без изменения, что соответствует плановым показателям. При расчете \hat{b}_k нужно учитывать возможность перераспределения товарной продукции на уровне потребителей. Они могут быть получены на этапе статистического анализа конкретного процесса материально-технического снабжения при следующих условиях:

$$\hat{b}_k = b_j, \quad k \in K^1; \quad j \in J^1; \quad K^1 = J^1; \quad (4)$$

$$\hat{b}_k < b_j, \quad k \in K^2, \quad j \in J^2, \quad K^2 = J^2; \quad (5)$$

$$\hat{b}_k > b_j, \quad k \in K^3, \quad j \in J^3, \quad K^3 = J^3, \quad (6)$$

причем $\bigcap_{\varphi} K_{\varphi} = \bigcap_{\varphi} J_{\varphi} = \emptyset$; $K^1 \cup K^2 \cup K^3 = K$;

$$\sum_{k \in K} \hat{b}_k \geq \sum_{i \in J} b_i. \quad (7)$$

В результате выполнения требований (4) — (7) в задаче T^2 осуществляется процесс согласования систем планирования и оперативного управления реализацией плановых решений. Такой подход создает объективные предпосылки для снижения транспортных расходов и, как следствие, повышает эффективность использования транспортных средств.

Структура задачи T^2 допускает параметрическую декомпозицию [2], что позволяет уменьшить размерность.

Список литературы: 1. Гамбаров Л. А. Об одной модификации транспортной задачи в условиях централизованного прикрепления поставщиков к потребителям. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1984, № 209. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 4, с. 29—32. 2. Гамбаров Л. А. Итеративный алгоритм решения одного класса задач линейного программирования. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикл. механика и процессы упр., вып. 3, с. 11—15.

Поступила в редколлегию 25.10.85.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПРОЦЕДУРЫ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ РЕСУРСОВ
В ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ**

Рассмотрим задачу рационального распределения ограниченных ресурсов в двухуровневых организационных системах, состоящих из центра и N элементов нижнего уровня [1, 2]. Обозначим соответственно через

$$x_{il}, \gamma_i, \xi_{il} = \gamma_i x_{il}, y_i = ((x_{il}, l \in L), \gamma_i), R_l, \\ L = \{1, 2, \dots, M\}, Q = \{1, 2, \dots, N\}$$

показатели затрат ресурса l -го вида, объем производства, эффективность использования l -го ресурса и вектор показателей (план) i -го элемента, а также объем ресурса l -го вида, имеющийся у центра, множество рассматриваемых видов ресурсов и множество номеров подчиненных центру элементов нижнего уровня, $l \in L$, $i \in Q$.

Центр выбирает и сообщает элементам закон планирования, в соответствии с которым набор допустимых планов элементов y_i , ($i \in Q$) преобразуется в допустимый план системы $z = (z_i, i \in Q)$ [1]:

$$z_i = y_i^{(j)}, (i \in Q); x_{il}^{(0)} = 0, (i \in Q), (l \in L); \quad (1) \\ y_i^{(j)} = \min_{i \in L} \{ \min_{i \in L} \{ x_{il}^{(j-1)} + \varphi(\xi_{il}) g_l^{(j)} / \sum_{i \in Q_j} \varphi(\xi_{il}), \\ x_{il} \} / x_{il} \} y_i, (i \in Q_j); y_i^{(j)} = y_i^{(j-1)}, (i \in Q \setminus Q_j); \\ g_l^{(j)} = R_l - \sum_{i \in Q} x_{il}^{(j-1)}, (l \in L); \\ Q_j = \{ i | x_{il}^{(j-1)} < x_{il}, (l \in L) \},$$

где $\varphi(\xi_{il})$ — базовая функция закона планирования; $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ — номер шага процесса дораспределения ресурсов. Признаком окончания дораспределения (на J -м шаге) — выполнение условия $g_l^{(j+1)} = 0$, по крайней мере, для одного номера ресурса $l \in L$.

Зависимость выигрыша каждого i -го элемента от векторов показателей y_i , $y^i = (y_q, q \in Q \setminus i)$ элементов системы имеет следующий вид:

$$D_i(y^i, y_i) = \psi_i(z_i(y^i, y_i)).$$

Здесь целевая функция i -го элемента $\psi_i(y_i)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{il}} > 0, (l \in L); \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial \gamma_i} > 0.$$

Обозначим

$$d_{ii}(y_i^i, y_{ii}) = \min \{x_{ii}^{(j-1)} + \varphi(\xi_{ii})g_i^j / \sum_{f \in Q_j} \varphi(\xi_{if})\},$$

$$x_{ii}\}, \quad i \in Q_j; \quad d_{ii}(y_i^i, y_{ii}) = x_{ii}, \quad i \notin Q_j.$$

Ранее описана процедура распределения ресурсов [1], базирующаяся на законе планирования (1). Процесс носит многошаговый характер и заканчивается в случае, если элементы не могут, или не заинтересованы изменить значения показателей плана. Возникает ситуация, описываемая игрой N лиц (элементов). Выигрышем каждого i -го элемента является значение функции $D_i(y^i, y_i)$, а стратегией — выбор плана y_i . Заявки y_i предлагаются элементами по одному в порядке возрастания номеров элементов. Показано наличие в описанной игре ситуации равновесия $y^* = (y_i^*, i \in Q)$, определяемой условиями

$$D_i(y_i^*, y_i) = \max_{y_i \in Y_i} D_i(y_i^*, y_i), \quad (i \in Q), \quad (2)$$

где Y_i — множество допустимых планов i -го элемента [3].

Стратегия y_i^* каждого i -го элемента гарантирует ему получение ресурсов в количестве, не меньшем x_i^* при любых стратегиях остальных элементов [2]:

$$x_i^* = \min_{y_i^i \in Y^i} \{ \min_{i \in L} \{d_{ii}(y_i^i, y_{ii}^*)/x_{ii}^*\} x_i^* \}.$$

Здесь $Y^i = \prod_{q \in Q \setminus i} Y_q$.

Таким образом, в рассматриваемой игре элементов ситуация равновесия оптимальна по принципу максимального гарантированного результата

$$\min_{y_i^i \in Y^i} D_i(y^i, y_i) = D_i(y_i^*, y_i^*), \quad (i \in Q),$$

и ситуация равновесия единственна. Действительно, предположим, что $y^{*(1)}$, $y^{*(2)}$ — такие планы системы, что

$$D_i(y^{i*(f)}, y_i^{*(f)}) = \max_{y_i \in Y_i} D_i(y^{i*(f)}, y_i), \quad (i \in Q), \quad f \in \{1, 2\}, \quad y^{*(1)} \neq y^{*(2)}.$$

Так как во всех ситуациях равновесия элементы получают максимальные гарантированные выигрыши, то значения целевых функций любого i -го элемента для планов $y_i^{*(1)}$, $y_i^{*(2)}$ должны совпадать, ($i \in Q$). Пусть

$$D_i(y_i^{i*(1)}, y_i^{*(1)}) = A > D_i(y_i^{i*(2)}, y_i^{*(2)}) = B.$$

Но, с другой стороны, имеют место соотношения

$$B = \max_{y_i} D_i(y_i^{i*(2)}, y_i) > C, \quad C = D_i(y_i^{i*(2)}, y_i^{*(1)}),$$

$$A = \min_{y_i} D_i(y_i^i, y_i^{*(1)}) \leq C, B \geq C \geq A,$$

следовательно, необходимо, чтобы выполнялось равенство $A = B$.
Примем $y_i^{*(1)} \neq y_i^{*(2)}$, тогда с учетом выражений (1), (2) имеем не-
равенство

$$\psi_i(y_i^{*(1)}) \neq \psi_i(y_i^{*(2)}).$$

Из полученного противоречия $y^{*(1)} = y^{*(2)}$.

Таким образом, равновесная ситуация при использовании предлагаемой процедуры единственна и оптимальна по принципу максимального гарантированного результата.

Список литературы: 1. Заруба В. Я., Выпинашко И. Н. Теоретико-игровая процедура распределения нескольких ресурсов в организационной системе.— К., 1984.— 18 с.— Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 699. Деп. 2. Заруба В. Я. Механизмы планирования при распределении ограниченного ресурса.— Автоматика и телемеханика, 1984, № 9, с. 110—120. 3. Заруба В. Я., Выпинашко И. Н., Иванов Л. В. Разработка алгоритмического обеспечения автоматизированных систем коллективного принятия плановых решений.— АСУ и приборы автоматики, 1984, вып. 70, с. 50—54.

Поступила в редколлегию 11.11.85.

УДК 519.6

А. Е. ГОЛОСКОКОВ, канд. техн. наук, Е. А. НИЖНИК

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Информация, используемая при проектировании сложных технических систем, может быть недостаточно достоверной и полной. Следовательно, параметры модели нелинейного программирования, к исследованию которых в ряде случаев сводятся процедуры проектирования, определяются неточно или с так называемыми малыми возмущениями. Это приводит к тому, что задача может быть неустойчивой к малым возмущениям исходных данных по решению и по целевой функции.

Реализация неустойчивого решения приводит к появлению негативных процессов в реальных системах. Исследование задач такого типа обуславливает необходимость решения следующих вопросов: с помощью метода регуляризации получить устойчивое решение задачи к малым возмущениям исходных данных; сформировать область допустимых возмущений параметров (ДВП) модели при условии, что любая совокупность значений параметров, принадлежащих множеству ДВП, не приводит к появлению неустойчивого решения. Последняя

задача особенно актуальна при проектировании технических систем, когда проектировщик должен найти область допустимых вариаций конструктивных параметров, а затем распределить допуски на параметры системы. Таким образом, не вызывает сомнений необходимость в разработке методов построения области ДВП.

Цель работы — разработка модификации одного из методов формирования множества ДВП. Рассмотрим задачу нелинейного программирования:

$$f(x, a) \rightarrow \min, g_i(x, a) \geq 0, i = \overline{1, l}. \quad (1)$$

Здесь x — n -мерный вектор переменных; a — m -мерный вектор коэффициентов. Предположим, что функции f, g_i принадлежат классу C^2 в окрестности точки x^*, a ; $f^*(x^*, a)$ — выпуклая монотонная функция в окрестности точки a .

Считаем, что параметры модели (1) подвергаются малым возмущениям. Это приводит к возмущенной задаче вида

$$f(x, a + \Delta a) \rightarrow \min, g_i(x, a + \Delta a) \geq 0, i = \overline{1, l}, \quad (2)$$

где Δa — m -мерный вектор возмущений.

Задача (1) ϵ -устойчива по целевой функции, если

$$|f^*(x, a) - f^*(x, a + \Delta a)| \leq \epsilon. \quad (3)$$

Здесь $f^*(x, a + \Delta a), f^*(x, a)$ — оптимальные значения целевой функции возмущенной и исходной задач; ϵ — параметр устойчивости, задаваемый экспертами при условии $\epsilon > 0$.

Необходимо определить множество элементов Δa , которые удовлетворяют условию (3), т.е. сформировать систему ограничений, накладываемых на Δa .

Поскольку в общем случае невозможно установить явную функциональную зависимость оптимального значения целевой функции от параметров задачи, невозможно и аналитически сформировать систему ограничений, накладываемых на возмущения параметров задачи. Это приводит к необходимости применять численные методы для решения поставленной задачи. Разработан метод формирования множества ДВП модели нелинейного программирования при условии $B\Delta a \leq 1$ [1]. Метод получил применение в проектировании сложных систем управления [2]. Матрица B имеет размерность $2^m \times m$, ее строки образованы всеми возможными заменами компонент вектора $b_1 = \{\delta_1^{-1}, \dots, \delta_m^{-1}\}$ на компоненты вектора $b_N = \{\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1}\}$. Значения δ_j, α_j находим следующим образом:

$$\delta_j = \begin{cases} \Delta_j = \frac{\epsilon}{\left| \frac{\partial f^*}{\partial a_j} \right|}, & |f_j^+ - f^*(x, a)| \leq \epsilon, \\ \frac{\epsilon \Delta_j}{|f_j^+ - f^*(x, a)|}, & |\cdot| > \epsilon; \end{cases} \quad (4)$$

$$\alpha_j = \begin{cases} -\Delta_j, & |f_j^- - f^*(x, a)| \leq \varepsilon, \\ -\frac{\varepsilon \Delta_j}{|f_j^- - f^*(x, a)|}, & |\cdot| > \varepsilon, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$f_j^+ = f^{**}(x, a_1, \dots, a_j + \Delta a_j, \dots, a_m); \quad (6)$$

$$f_j^- = f^{**}(x, a_1, \dots, a_j - \Delta a_j, \dots, a_m), \quad (7)$$

$$\frac{df_k^{**}}{da} = \frac{\partial f(x_k^{**}, a)}{\partial a} + \nabla_x f(x_k^{**}, a) \frac{dx_k^{**}}{da};$$

$$\frac{dx_k^{**}}{da} = -[\nabla_{xx}^2 W(x_k^{**}, a, r_k)]^{-1} \frac{\partial}{\partial a} (\nabla_x W(x_k^{**}, a, r_k));$$

$$W(x, a, r_k) = f(x, a) - r_k \sum_{i=1}^l \ln q_i(x, a);$$

$W(x, a, r_k)$ — функция штрафа; r_k — штрафные параметры. При $k \rightarrow \infty$ получаем

$$(dx_k^{**}/da) \rightarrow (dx^{**}/da); \quad (df_k^{**}/da) \rightarrow (df^{**}/da).$$

Недостаток алгоритма (4) — (7) — необходимость решения 2K задач нелинейного программирования. В случае большой размерности вектора коэффициентов модели требуется достаточно много времени счета на ЭВМ для формирования множества ДВП. Предлагаем модификацию алгоритма (4) — (7), суть которой заключается в следующем.

Составим для задачи (2) функцию Лагранжа и найдем ее решение \tilde{x}, \tilde{u} :

$$L(x, u, \tilde{a}) = f(x, \tilde{a}) - \sum_{i=1}^l u_i g_i(x, \tilde{a}), \quad (8)$$

где $\tilde{a} = a + \Delta a$.

Условия оптимального решения задачи (8)

$$F_j = \frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{a})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^l \tilde{u}_i \frac{\partial g_i(\tilde{x}, \tilde{a})}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$F_{s+n} = \tilde{u}_s g_s(\tilde{x}, \tilde{a}), \quad s = \overline{1, l}. \quad (9)$$

Продифференцируем тождества (9) по Δa_k :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial (\Delta a_k)} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial F_s}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial (\Delta a_k)} = -\frac{\partial F_s}{\partial (\Delta a_k)}, \quad s = \overline{1, n+l}. \quad (10)$$

Равенства (10) представляют собой линейную систему уравнений относительно неизвестных $(\partial x_i / \partial (\Delta a_k)), \dots, (\partial u_i / \partial (\Delta a_k))$.

Определитель системы (10) отличен от нуля в точке $\Delta a_k = 0$, $k = \overline{1, m}$. Следовательно, система (10) имеет единственное решение.

Используя решение системы (10), произведем разложение функции $x(\Delta a)$ в ряд Тейлора в нулевой точке

$$x(\Delta a) = x(0) + \nabla_{\Delta a}^T x(\Delta a) \Delta a. \quad (11)$$

По формуле (4) вычислим значение Δ_j . После чего вместо подстановки Δ_j в (6), (7) и решения двух оптимизационных задач вычислим с помощью выражения (11) $x(\Delta_j)$. Затем по формулам (4), (5) найдем элементы матрицы $B: \delta_j, \alpha_j$. Предложенная модификация существенно снижает затраты времени на формирование множества ДВП задачи нелинейного программирования.

Список литературы: 1. Мальцев В. В. Достаточные условия ϵ -чувствительности задач математического программирования.— Автоматика, 1979, № 5, с. 47—52. 2. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления / В. Л. Волкович, А. Ф. Волошин, Т. М. Горлович и др.— Киев: Наук. думка, 1984.— 216 с.

Поступила в редколлегию 16.11.85.

УДК 658.512

А. Н. БОЛЬШАК, С. Г. СМИРНОВА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ КОМПЛЕКТАЦИИ БЛОКОВ МОДУЛЯМИ

На этапе формирования оптимального типоразмерного ряда изделий, имеющих блочно-модульную структуру, возникает задача оптимальной комплектации блоков модулями. При этом суммарная мощность модулей должна удовлетворять ограничениям по мощности, накладываемым на блоки, а полная стоимость модулей, из которых комплектуются блоки, должна быть минимальной. Таким образом, задача комплектации блоков сводится к оптимизации ряда модулей.

В ряде случаев, исходя из принципов построения изделий, можно указать ряд неунифицированных модулей, из которых могут состоять рассматриваемые блоки. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — мощности модулей; n — общее число рассматриваемых модулей. Обозначим через x_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ количество модулей типа j , необходимых для комплектации блока мощности A_i . Тогда задачу оптимизации ряда модулей блоков можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n S_j \sum_{i=1}^m x_{ij} Q_i \pi \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} Q_i \right) \rightarrow \min;$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_{ij} \geq A_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$y_j \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq M y_j, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n y_j S_j^p \leq W,$$

где $S_j, j = \overline{1, n}$ — стоимость j -го модуля; $Q_i, i = \overline{1, n}$ — количество i -х блоков; $\pi \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} Q_i \right)$ — функция партионности, выражающая зависимость стоимости j -го модуля от размера серии выпуска этих модулей; M — константа, удовлетворяющая условию

$$M > \max_{j=\overline{1, n}} \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} Q_i \right);$$

W — объем ресурса, выделяемый на разработку ряда модулей; $y_j (j = \overline{1, n})$ — булева переменная,

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{i=1}^m x_{ij} = 0; \\ 1, & \text{если } \sum_{i=1}^m x_{ij} > 0; \end{cases}$$

S_j^p — объем ресурса, необходимый для разработки j -го модуля.

Таким образом, оптимизация типоразмерного ряда модулей заключается в решении нелинейной оптимизационной задачи с целочисленными переменными. При этом ограничения линейны и позволяют учесть модульную структуру блоков и ограниченность ресурсов, выделенных на разработку ряда модулей.

Функционал задачи представляет собой сумму нелинейных функций переменной $N_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} Q_i, j = \overline{1, n}$. Каждая из таких функций может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией своей переменной. Пусть α_{jk}, b_{jk} — коэффициенты линейной функции, аппроксимирующей j -ю функцию на k -м интервале разбиения области возможных значений переменной $N_j, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, L}; L$ — общее число интервалов. Тогда задача оптимизации ряда модулей

$$\sum_{j=1}^m S_j \left(\sum_{k=1}^L \alpha_{jk} z_{jk} + b_{jk} v_{jk} \right) \rightarrow \min;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} Q_i - \sum_{k=1}^L z_{jk} = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_{ij} \geq A_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{k=1}^L v_{jk} \leq 1, \quad j = \overline{1, n};$$

$$0 \leq z_{jk} \leq D_{jk} v_{jk}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, L};$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^L v_{jk} S_j^p \leq W.$$

Здесь v_{jk} — булева переменная, $v_{jk} = 1$, если $0 \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} Q_i \leq D_{jk}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, L}$, в противном случае $v_{jk} = 0$; D_{jk} — k -й интервал разбиения j -й составляющей функционала. Это — линейная задача с целочисленными переменными, которая может быть решена существующими методами целочисленного программирования.

Для кусочно-линейной аппроксимации нелинейной функции $F(N_j) = N_j \pi(N_j)$, где $N_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} Q_i$, можно применить следующий алгоритм:

1. Определение области возможных значений переменной N_j . Очевидно, что данная область будет представлять собой отрезок прямой. На практике применительно к настоящей задаче граничные точки такого отрезка можно выбирать из условий $G = \min(N_j) = 0$, $U = \max(N_j) \geq \sum_{i=1}^m x_{ij} Q_i$, $j = \overline{1, n}$.

2. $v = 1$, $C = G$, $T = U$.

3. Определение коэффициентов a_{jv} , b_{jv} линейной функции, проходящей через точки C , T ; $a_{jv} = (F(T) - F(C))/(T - C)$; $b_{jv} = F(T) - a_{jv} T$.

4. Нахождение точки N_j^0 , для которой $a_{jv} N_j^0 + b_{jv} - F(N_j^0) = \max_{C < N_j < T} |a_{jv} N_j + b_{jv} - F(N_j)|$.

5. Если $a_{jv} N_j + b_{jv} - F(N_j) > E$, где E — максимально допустимая погрешность аппроксимации, то $T = N_j^0$. Переход к п. 3.

6. Если $a_{jv} N_j + b_{jv} - F(N_j) \leq E$, то $G = N_j^0$. Переход к п. 7.

7. Если $T = U$, переход к п. 9.

8. Если $T \neq U$, то $v = v + 1$, $C = T$, $T = U$. Переход к п. 3.

9. Конец алгоритма. Печать полученных значений a_{jv} , b_{jv} , $v = \overline{1, L}$.

Предложенный алгоритм позволяет производить кусочно-линейную аппроксимацию нелинейных функций с заданной точностью.

Поступила в редколлегию 30.10.85.

СПОСОБ РЕШЕНИЯ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕСУРСОВ

Интенсификация экономического развития народного хозяйства предполагает рациональное потребление ресурсов. Для получения максимальной отдачи от использования ресурсов они должны быть оптимально в смысле выбранного критерия распределены по потребителям. Такого рода задачи возникают при необходимости выполнить некоторую совокупность работ X , используя обслуживающую систему Y . Каждая из заявок поля X определена параметрами $\mathbf{x}_j = \{x_{1j}, \dots, x_{mj}\}$ и количеством требований n_j , $j \in X$. Параметры изделия, входящего в Y , характеризуются m -мерным вектором $\mathbf{y}_i = \{y_{1i}, \dots, y_{mi}\}$ и размером серии l_i , $i \in Y$. Под серией l_i понимается допустимое количество обслуживающих устройств, которое может быть использовано для выполнения работ $j \in Q_i$. Под Q_i понимается область обслуживания изделий i -го типоразмера [1].

Введем булеву переменную $v_{ij} \in \{0, 1\}$, которая равна единице при $j \in Q_i$ и нулю в противном случае. Обязательно выполнение условий

$$\sum_{i \in Y} v_{ij} \geq 1, \quad j \in X. \quad (1)$$

Эти условия регламентируют обязательность удовлетворения всех потребностей. Каждая заявка может обслуживаться одним или больше чем одним типоразмером. Количество изделий l_i ограничено мощностью предприятий отрасли, производящей изделия i -го типа, а также их надежностными характеристиками

$$\sum_{j \in Q_i} n_j u_{ij} \leq l_i, \quad i \in Y, \quad (2)$$

где u_{ij} — количество изделий i -го типоразмера, необходимое для выполнения единицы работы из j -й заявки. Значением S'_i , $i \in Y$ ограничены расходы на эксплуатацию изделий типоразмерного ряда Y и поддержание их в работоспособном состоянии

$$f(\mathbf{x}_i) \pi_i \left(\sum_{j \in Q_i} n_j u_{ij} \right) \leq S'_i, \quad i \in Y. \quad (3)$$

Здесь $f(\mathbf{x}_i)$ — эксплуатационная стоимость одного изделия i -го типа после освоения его в производстве; π_i — коэффициент партионности i -го типоразмера.

Коэффициент партионности — это невозрастающая функция, показывающая относительное увеличение стоимости обслуживания

для i -го типа изделия при партии, меньшей чем оптимальная. При оптимальной партии $\pi_i = 1$. В оптимизационных задачах π_i , $i \in Y$ находим как сумму трех коэффициентов: разработки, освоения изделия в производстве и эксплуатации. Каждый из коэффициентов определяем как функцию от размера партии данного изделия. В задаче распределения первые два коэффициента равны нулю.

В качестве критериальной функции целесообразно использовать суммарные эксплуатационные затраты на изделия всех типов, образующих параметрический ряд Y :

$$\sum_{i \in Y} (f(x_i) \pi_i \left(\sum_{j \in Q_i} n_j u_{ij} \right) \sum_{j \in Q_i} n_j u_{ij} K_{ij}^d) \rightarrow \min, \quad (4)$$

где K_{ij}^d — коэффициент неадекватности, характеризующий степень несоответствия параметров i -го изделия j -му вектору x_j , $K_{ij}^d = K_{ij}^d(x_j, y_i)$. Функция (4) с ограничениями (1) — (3) образует нелинейную целочисленную задачу математического программирования, постановку которой можно сформулировать в следующем виде: при ограничениях (1) — (3) распределить обслуживающие элементы парка Y по выполнению работ X , которые при условии полного удовлетворения всех потребностей минимизируют эксплуатационные затраты (4) на изделия ряда Y . Задача может быть решена при использовании любого хорошо разработанного комбинаторного приема, например методом ветвей и границ [2]. Предлагаемая модификация метода объединения заявок [3] позволяет учесть ограничения (2), (3) не только для обслуживающей системы Y , но и на уровне отрасли, производящей изделия $\{y_i, l_i\}$, $i \in Y$. Алгоритм, хорошо зарекомендовавший себя при решении оптимизационных и распределительных задач большой размерности, можно представить в виде следующей последовательности шагов:

1. Из условия

$$x_{kj} \leq y_{ki}, \quad k = \overline{1, m}, \quad j \in X, \quad i \in Y$$

определяются заявки $j \in Q_i$. С учетом (2) вычисляется объем работ $\sum_{j \in Q_i} n_j u_{ij}$ для i -го типа изделий. Находятся коэффициенты паритетности

$$\pi_i = \pi_i \left(\sum_{j \in Q_i} n_j u_{ij} \right), \quad i \in Y. \quad (5)$$

2. Устанавливается стоимость S_{ij} выполнения i -м типоразмером единицы работы из j -й заявки

$$S_{ij} = f(x_i) \pi_i \left(\sum_{j \in Q_i} n_j u_{ij} \right) K_{ij}^d, \quad i \in Y, \quad j \in X. \quad (6)$$

3. Определяется минимальная из S_{ij} , $i \in Y$, $j \in X$ стоимость выполнения единицы работы. Допустим это S_{pt} .

4. Введем обозначения: a_i — количество необслуживаемых требований из j -й заявки; b_i — количество незагруженных изделий i -го типа. При $a_i \leq b_{pt}$ -я заявка полностью обслуживается p -м изделием, а из Q_i , $i \in Y$, $i \neq p$ она вычеркивается. Если $a_i > b_p$, то часть потребностей b_p из t -й заявки удовлетворяется изделием p -го типа. Количество требований в t -й заявке в Q_i , $t \in Q_i$, $i \neq p$ после ее прикрепления равно $(a_i - b_p)$ и заявка t из этих областей обслуживания не вычеркивается. К p -му типу изделий прикрепляются не сразу все работы, которые должны быть выполнены по рассмотренным условиям, а небольшими партиями, пока ограничение (3) выполняется. В случае невыполнения ограничения на эксплуатационные расходы оставшиеся требования возвращаются в t -ю заявку.

5. При изменении количества удовлетворяемых i -м типом обслуживающих устройств $i \neq p$ потребностей согласно выражению (5) пересчитывается π_i , а по формуле (6) вычисляются новые значения S_{ij} и вся процедура повторяется. Критерий ее окончания: либо полное обслуживание поля потребностей X , либо отсутствие полностью или частично неудовлетворенных заявок в области обслуживания недогруженных по формуле (2) и не израсходовавших свой лимит эксплуатационных затрат согласно выражению (3) изделий.

Следующее приближение проходит ту же последовательность шагов, но π_i , $i \in Y$ не пересчитывается по формуле (5), пока текущий размер серии $\sum_{i \in Q_i} n_{ij}$ не станет меньше оптимального из предыдущего приближения.

Рассмотренная схема особенно удобна в интерактивном (диалоговом) режиме, когда вся информация собрана в особом банке данных, содержащем полный набор сведений о потребностях, парке обслуживающих устройств, ресурсных возможностях системы. В процессе распределения все изменения согласуются с банком данных. По завершении очередного приближения в банк данных поступает запрос о возможности априорного изменения l_i , S_i^r для тех изделий, в области обслуживания которых входят неудовлетворенные потребности. Последовательность прикреплений отдельных заявок к обслуживающим устройствам отражается на экране терминала, что позволяет перераспределять ресурсы и вносить другие коррективы по ходу процесса.

Список литературы: 1. Дабагян А. В. Оптимальное проектирование машин и сложных устройств.— М.: Машиностроение, 1979.— 280 с. 2. Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т. Экстремальные задачи стандартизации.— Новосибирск: Наука, 1978.— 334 с. 3. Дабагян А. В., Цыхманов Г. В. О методе оптимизации типоразмерного ряда изделий.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1984, № 209. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 4, с. 32—34.

Поступила в редколлегию 24.10.85.

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАДРОВОГО СОСТАВА
НА ОСНОВЕ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ**

Необходимость повышения эффективности использования производственного и научно-технического потенциала страны в значительной мере относится и к кадровому потенциалу профессорско-преподавательского состава высшей школы. Рациональное планирование указанного состава на ближайшие и отдаленные промежутки времени требует учета большого числа разнообразных факторов, однако определяющим в расчете и прогнозировании его потребности является объем учебной работы и контингент студентов, обучающихся в вузе. Существен также учет принятого деления на основные должностные категории (профессоры, доценты, ассистенты) и состава этих групп по научным специальностям, учет возрастного деления внутри указанных групп и т. д.

Рациональное планирование и управление численностью профессорско-преподавательского состава — важная народнохозяйственная проблема, решение которой будет способствовать повышению качества подготовки высококвалифицированных специалистов, улучшению использования профессорско-преподавательского состава в соответствии с его квалификацией, эффективному воспроизводству научно-педагогических кадров высшей квалификации. Следует отметить, что сопоставление прогнозируемой на отдаленные годы потребности в преподавателях высшей квалификации с существующим составом позволит сформулировать требования к развитию аспирантуры по отдельным научным специальностям, рациональному формированию сети специализированных советов по защитах диссертаций.

Предложенный метод расчета штатов профессорско-преподавательского состава вузов, распределения его между кафедрами вуза, учитывающий напряженность учебных планов совокупности специальностей, по которым ведется подготовка в определенном регионе, и имеющийся контингент студентов, дает возможность установить необходимую численность профессорско-преподавательского состава вузов с учетом потребности в должностных категориях [1, 2]. Указанная методика допускает также возможность прогнозирования потребности вуза или региона в научно-педагогических кадрах определенных должностных категорий и научной квалификации для обеспечения учебного процесса в соответствии с планируемым объемом выпуска специалистов.

Сопоставление прогнозируемой потребности в профессорско-преподавательском составе с его существующей численно-

стью — основа кадровой политики по обеспечению эффективного функционирования высших учебных заведений, реализуемая в процессе управления кадровой структурой.

При решении указанной задачи следует принимать во внимание, что распределение профессорско-преподавательского состава по должностным категориям на интервале планирования не остается постоянным. На изменение указанного распределения оказывают влияние многочисленные случайные факторы, связанные с приемом и увольнением, переходами из низшей должностной категории в высшую в результате повышения уровня квалификации, образования вакансий и т. д.

Следовательно, для обоснованного принятия решений по обеспечению потребностей в профессорско-преподавательском составе необходимо прогнозирование динамики изменения его численности по должностным категориям.

Методика прогнозирования динамики структуры профессорско-преподавательского состава включает в себя построение математической модели, описывающей изменение средней численности преподавателей в каждой из должностных категорий, оценку неизвестных параметров модели по статистическим данным, полученным за фиксированный интервал времени, и расчет прогнозируемых показателей к заданному моменту времени. Введем вектор $x(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n))$, компоненты которого $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$ равны соответственно числу профессоров, доцентов и ассистентов в n -м учебном году в рассматриваемом вузе. Для простоты ограничимся рассмотрением задачи прогнозирования численности только по должностным категориям. Тогда задача прогнозирования состоит в вычислении среднего значения $x(n+m)$, где m — интервал прогнозирования, на основании статистических данных $x(n-l)$, $x(n-l+1)$, ..., $x(n)$. Здесь l — интервал сбора статистических данных.

Для построения математической модели примем, что переходы преподавателей по должностным категориям — статистически независимые случайные события [3]. Обозначим через p_{ij} вероятность перехода из i -й в j -ю должностную группу; ω_i — вероятность увольнения из i -й должностной группы; r_i — вероятность, что вновь принятый на работу преподаватель попадет в i -ю группу. Введенные параметры должны удовлетворять вероятностным ограничениям

$$\sum_{j=1}^3 p_{ij} + \omega_i = 1, \quad p_{ij} \geq 0, \quad \omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{i=1}^3 r_i = 1, \quad r_i \geq 0. \quad (1)$$

Тогда математическая модель, описывающая динамику изменения кадрового состава

$$\bar{x}_j(n+1) = \sum_{i=1}^3 x_i(n) p_{ij} + r_j u(n). \quad (2)$$

Здесь $u(n)$ — число преподавателей, принятых на работу в n -м учебном году.

Запишем уравнение (2) в матричной форме

$$\bar{x}(n+1) = x(n)P + r \cdot u(n). \quad (3)$$

Последовательность $u(n)$ определяет закон управления численностью профессорско-преподавательского состава. При выполнении требования сохранения общей численности преподавателей, установленной на начало интервала планирования, число вновь принятых преподавателей должно равняться числу уволившихся.

Тогда $\bar{u}(n) = \sum_{i=1}^3 x_i(n)w_i$ и уравнение модели приобретает вид

$$\bar{x}(n+1) = x(n)(P + w^T r) = \bar{x}(n)Q, \quad (4)$$

где w^T — вектор-столбец. В этом случае прогноз на m лет вперед находим из выражения (4) по формуле $\bar{x}(n+m) = x(n)Q^m$ (5).

В общем случае для прогнозирования следует использовать формулу, определяющую решение уравнения (3):

$$x(n+m) = x(n)P^m + r \sum_{k=0}^{m-1} P^{m-k-1} u(n+k), \quad (6)$$

позволяющую вводить в прогноз существующий или планируемый закон изменения численности профессорско-преподавательского состава.

Для использования формул прогнозирования (5) или (6) необходимо знать соответствующие параметры математических моделей. Эти оценки могут быть получены по имеющимся статистическим данным по методике [4]. Так для модели прогноза (5) оценку матрицы Q по методу наименьших квадратов находим из условия

$$\sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=1}^3 (x(n-l+k+1) - \sum_{i=1}^3 x_i(n-l+k)q_{ij})^2 \rightarrow \min_{q_{ij}} \quad (7)$$

при выполнении дополнительных ограничений вида (1). Решение задачи (7) дает оценку матрицы Q как функцию известных значений численности преподавательского состава по должностным категориям на интервале, предшествующем периоду прогнозирования.

Список литературы: 1. Киркач Н. Ф., Чугаев, А. А., Любчик М. А. К расчету штатов профессорско-преподавательского состава вуза по напряженности учебных планов.— Пробл. высш. шк., 1981, вып. 43, с. 27—32. 2. Чугаев А. А., Костенко Ю. Т., Любчик М. А. Распределение штатов профессорско-преподавательского состава между кафедрами вуза.— Пробл. высш. шк., 1983, вып. 51, с. 19—23. 3. Бертоломью Д. Управление структурой преподавательского состава в университете — В кн.: Математическое моделирование.— М.: Мир, 1979.— 277 с. 4. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам.— М.: Статистика, 1977.— 520 с.

Поступила в редколлегию 27.10.85.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

<i>Костенко Ю. Т.</i> Адаптивная стабилизация замкнутых систем с распределенными параметрами	3
<i>Кириченко А. И., Любчик Л. М.</i> Синтез дискретных нестационарных регуляторов температурных полей	6
<i>Воронин А. В.</i> Синтез наблюдателей пониженного порядка для распределенных систем	9
<i>Харченко О. Ю.</i> Анализ управляемости дискретных линейных систем с несимметричными ограничениями на управления	11
<i>Никульченко А. Г.</i> Идентификация положения динамического равновесия линейной системы, подверженной случайным воздействиям	13
<i>Воликов Г. А., Киреев Н. Г.</i> Исследование некоторых алгоритмов идентификации стационарных динамических систем	17
<i>Макаричев А. В.</i> Об одной многофазовой системе с идентичным обслуживанием	20
<i>Мазманишвили А. С.</i> К совместному определению параметров движения элементов групповой цели	22
<i>Фролов Ю. А.</i> Развороты твердого тела по опорным моделям вектора модифицированного поворота	25
<i>Шипулина Л. В., Середа Н. В., Линник В. В.</i> Управление разворотом твердого тела в условиях ограничений	28
<i>Успенский В. Б.</i> Задача оптимального разворота твердого тела минимальным импульсом	31
<i>Голоскоков Е. Г., Рохленко В. Ю., Герасимов С. Д.</i> Исследование электрогидравлического следящего привода с непрерывными и дискретными обратными связями	35
<i>Пикур Э. А., Северин В. П., Ласенко Р. Е.</i> Математическая модель механической части электрогидравлического преобразователя	38
<i>Карачун В. В.</i> О реализуемости условий инвариантности в двухканальных автокомпенсационных схемах	40
<i>Шатохин В. М.</i> О построении импульсно-частотных характеристик свободных дискретных механических систем	43
<i>Эллис С. В., Скоропад С. В.</i> Адаптивное управление автоматическими манипуляторами	47
<i>Кононенко И. В., Тарасова Е. И.</i> Моделирование в задаче синтеза гибких систем	50
<i>Кащеев Л. Б., Мельзидинов Э. М.</i> Имитационное моделирование функционирования роботизированных технологических комплексов	54
<i>Безменов Н. И.</i> Алгоритмы группировки параметров, основанные на слиянии подмножеств	56
<i>Малых О. Н., Ардельян А. В., Боблак М. Ю., Наумов Л. Н., Шаховский Ю. С.</i> Алгоритм упаковки многоцикловых микроопераций	59
<i>Слепченко А. П., Василенко Г. М.</i> Формирование микрокоманд с частично кодированным форматом	62
<i>Лисицкий В. Л.</i> Оптимизация структур двухуровневых разрабатывающих систем	64
<i>Гамбаров Л. А.</i> Согласование систем планирования транспортных перевозок и оперативного управления процессами реализации планов	68
<i>Выпинашко И. Н., Федорова М. В.</i> Исследование теоретико-игровой процедуры распределения нескольких ресурсов в организационной системе	71
<i>Голоскоков А. Е., Нижник Е. А.</i> Модифицированный метод построения множества допустимых возмущений параметров задачи нелинейного программирования	73
<i>Большак А. Н., Смирнова С. Г.</i> Постановка задачи оптимальной комплектации блоков модулями	76
<i>Мезенцев И. В., Христенко С. А.</i> Способ решения распределительных задач в условиях ограниченности ресурсов	79
<i>Чуаев А. А., Муравьева С. Н.</i> Прогнозирование динамики кадрового состава на основе марковских моделей	82

РЕФЕРАТЫ

УДК 62-50

Адаптивная стабилизация замкнутых систем с распределенными параметрами. Костенко Ю. Т.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 3—6.

Рассмотрена задача адаптивного управления граничными условиями в системах с распределенными параметрами. Получены алгоритмы настройки параметров регулятора с использованием метода эталонной модели. Библиогр.: 2 назв.

УДК 62-50

Синтез дискретных нестационарных регуляторов температурных полей. Кириченко А. И., Любчик Л. М.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 6—8.

Предложен метод оптимального циклического управления нагревом, обеспечивающий минимальное среднеквадратическое отклонение от требуемого распределения температур. Получены уравнения дискретного регулятора, реализующего конечношаговый переходный процесс. Библиогр.: 4 назв.

УДК 62-50

Синтез наблюдателей пониженного порядка для распределенных систем. Воронин А. В.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 9—11.

Решена задача конструирования наблюдающего устройства пониженного порядка для системы с распределенными параметрами, обеспечивающего нулевую статическую ошибку оценивания. Показана связь выбранной структуры наблюдателя с принципом инвариантности. Библиогр.: 3 назв.

УДК 62-50

Анализ управляемости дискретных линейных систем с несимметричными ограничениями на управления. Харченко О. Ю.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 11—13.

Определены условия управляемости стационарных линейных динамических объектов при наличии несимметричных ограничений на управляющие воздействия. Разработан алгоритм выбора управляющих воздействий. Библиогр.: 4 назв.

УДК 681.5

Идентификация положения динамического равновесия линейной системы, подверженной случайным воздействиям. Никольченко А. Г.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 13—17.

Рассмотрена задача идентификации текущего значения постоянной составляющей переходного процесса в линейной динамической системе, подверженной ступенчатым и гармоническим воздействиям в случайные моменты времени. Предложен адаптивный алгоритм решения, позволяющий оперативно определять моменты качественного изменения исследуемого процесса. Библиогр.: 2 назв.

УДК 62.505

Исследование некоторых алгоритмов идентификации стационарных динамических систем. Воликов Г. А., Киреева Н. Г. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 17—20.

Рассмотрены алгоритмы идентификации стационарных динамических систем на основе метода наименьших квадратов. Получен итерационный алгоритм идентификации для случая, когда динамические параметры объекта известны приближенно. Проанализирована точность и применимость к различным системам некоторых алгоритмов идентификации. Библиогр.: 3 назв.

УДК 519.21

Об одной многофазовой системе с идентичным обслуживанием. Макаричев А. В. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 20—22.

Исследована многофазовая система массового обслуживания, у которой на первой фазе имеется один обслуживающий прибор, а мест для ожидания нет. Найдено совместное распределение времени пребывания требования на первой фазе и времени пребывания на остальных фазах системы. Библиогр.: 2 назв.

УДК 621.397

К совместному определению параметров движения элементов групповой цели. Мазманшвили А. С. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 22—25.

Рассмотрен функционал, являющийся суммой квадратов произвольной детерминированной сигнальной величины, на которую аддитивно наложена помеха. Изложена техника аналитического вычисления производящей функции рассматриваемого функционала, полностью исчерпывающей информацию о его статистической структуре. Библиогр.: 4 назв.

УДК 681.516

Развороты твердого тела по опорным моделям вектора модифицированного поворота. Фролов Ю. А. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 25—28.

Описан подход к решению задач разворотов на основе полиномиальной модели тангенсной модификации вектора истинного поворота. Приведены результаты, обеспечивающие построение программного и синтезированного разворотов. Библиогр.: 4 назв.

УДК 681.516

Управление разворотом твердого тела в условиях ограничений. Шипулина Л. В., Середа Н. В., Лынный В. В. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 28—31.

Описан алгоритм решения задачи разворота твердого тела в условиях ограничений. Приведены аналитические зависимости управления разворотом для заданных краевых условий по положению и скорости тела. Использован метод стереографической проекции и уравнение Дарбу. Библиогр. ссылка в подстроч. прим.

УДК 62-50

Задача оптимального разворота твердого тела минимальным импульсом. Успенский В. Б.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 31—34.

Решена задача оптимального двухимпульсного разворота твердого тела в условиях, когда на время разворота не накладывается никаких ограничений. Указано на существование особых точек решения. Библиогр.: 2 назв.

УДК 62-523

Исследование электрогидравлического следящего привода с непрерывными дискретными обратными связями. Голоскоков Е. Г., Рохленко В. Ю., Герасимов С. Д.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 35—37.

Исследован вопрос о целесообразности перехода к дискретным обратным связям в электрогидравлическом следящем приводе цифрового варианта систем регулирования паровых турбин. Даны рекомендации по выбору коэффициентов усиления обратных связей. Ил. 2. Библиогр.: 2 назв.

УДК 62-523

Математическая модель механической части электрогидравлического преобразователя. Пикур Э. А., Северин В. П., Ласенко Р. Е.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 38—40.

Построена параметрическая модель механической части электрогидравлического преобразователя с учетом изгиба рычага в виде системы дифференциальных уравнений. Модель получена методом структурных матриц без учета сил трения и тяжести, действующих на золотник. Ил. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 531.383

О реализуемости условий инвариантности в двухканальных автокомпенсационных схемах. Карачун В. В.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 40—43.

Проведен анализ уравнений движения интегрирующего гироскопа с двухканальной автокомпенсацией влияния моментов-помех. Показана эффективность этого метода в условиях синхронной качки основания прибора. Библиогр.: 2 назв.

УДК 534.4

О построении импульсно-частотных характеристик свободных дискретных механических систем. Шатохин В. М.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1987, № 240. Техн. кибернетика и ее прил., вып. 7, с. 43—47.

Изложена методика построения обобщенных импульсно-частотных характеристик свободных дискретных систем, позволяющих находить реакцию систем на любое периодическое возмущение, не содержащее постоянной составляющей. Библиогр.: 5 назв.