

ВЕСТНИК



**ХАРЬКОВСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА**

№ 199

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ**

Выпуск 3

1983 г.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

№ 199

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

ВЫПУСК 3

Основан в 1979 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1983

УДК 62—50+621.1

Прикладная механика и процессы управления. Вып. 3.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 199.— Харьков: Вина школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1983.— 64 с.

В вестнике освещены проблемы оптимального проектирования сложных технических и экономических систем, применения экономико-математических методов в планировании и управлении, синтеза систем автоматического регулирования.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1983 г.

Для научных работников и специалистов

Редакционная коллегия: Е. Г. Голоскоков (отв. ред.), И. И. Безменов (отв. секр.), В. Б. Гринев, Н. В. Дабагян, В. Н. Карабан, Ю. Т. Костенко, Ю. А. Фролов

Ответственный за выпуск *И. И. Безменов*

Адрес редакционной коллегии: 310002, Харьков-2, ул. Фрунзе, 21, политехнический институт, инженерно-физический факультет, тел. 40-04-75

Печатается по решению Ученого совета инженерно-физического факультета (протокол № 11 от 17 декабря 1981 г.)

Редакция научно-технической литературы

В 1502000000—019
М226(04)-83

© Харьковский
политехнический
институт, 1983

А. В. ДАБАГЯН, д-р техн. наук,
В. Я. ЗАРУБА, И. Н. ВЫПИНАШКО,
Г. Н. ГЛАДЫШЕВСКАЯ, канд. техн. наук,
В. П. ОГУРЦОВ, канд. техн. наук

ВОПРОСЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ВСТРЕЧНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ АСУ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИЕЙ

Внутриотраслевое планирование целесообразно рассматривать как процесс принятия решений в иерархической системе центр — элементы. Центр не обладает исчерпывающей информацией о производственных возможностях элементов, а интересы последних не полностью совпадают с интересами центра. Именно поэтому резервы повышения эффективности производства нельзя выявить без встречной инициативы отраслевых элементов даже при самом детализированном планировании сверху. Сказанное относится и к планированию в гражданской авиации. Необходимо, чтобы разрабатываемые планы учитывали истинные возможности предприятий — элементов системы, создавали заинтересованность исполнителей в объективном представлении информации. Эта проблема близка к другой — организации встречного планирования с участием планирующего центра и исполнителей. Встречное планирование призвано взаимовызывать планы предприятий на основе широкого использования их инициативы.

Основная задача встречного планирования в отрасли ГА — повышение информированности отраслевых плановых органов о производственных возможностях крупных территориальных подразделений — эксплуатационных управлений (УГА). Разработку механизмов встречного планирования необходимо проводить с учетом действующего порядка планирования и экономического стимулирования, существующего состояния и перспектив развития АСУ. Значительный объем плановых расчетов в рассматриваемой отрасли производится на базе АСУ «Аэрофлот», в составе которой функционируют, в частности, АСУ-1 (на уровне руководства Министерства ГА СССР) и АСУ-2 (для управления производственно-хозяйственной деятельностью эксплуатационного УГА). Насущная проблема развития АСУ ГА — это разработка организационно-экономического, математического, информационного и технического обеспечения процедур коллективного принятия решения при встречном планировании с участием управленческого аппарата различных уровней. Эти процедуры должны быть обоснованы с теоретико-игровых позиций и предусматривать оптимальное сочетание формализованных и неформализованных задач управления [1].

При реализации в отраслевой АСУ процедур встречного планирования важно разработать и теоретически обосновать алгоритмическое обеспечение. В качестве алгоритмической процедуры, реализующей основные положения встречного планирования, может использоваться алгоритм «аукцион» [2, 3], базирующийся на игровом подходе. Алгоритм определяет плановую стратегию центра, требования к действиям элементов (УГА) и состоит из таких этапов, как определение исходных плановых показателей отрасли путем использования имеющейся информации; корректировка показателей УГА (в связи с поступлением уточненных данных от УГА в МГА); получение окончательного варианта отраслевых плановых показателей. Алгоритм обладает следующими особенностями. Планирование рассматривается как многошаговый игровой процесс. На каждом его шаге определенное управление в установленной очередности может корректировать значения плановых показателей. Измененный вариант отраслевого плана становится известным центру и другим УГА. В конце шага центр на основе поступившей уточненной информации составляет сбалансированный отраслевой план, максимизирующий прибыль отрасли. Таким образом, алгоритм обеспечивает на каждом шаге сбалансированность плана, а также монотонное повышение эффективности плановых решений в ходе их коррекции.

На базе игрового алгоритма «аукцион» разработана методика согласования плановых показателей УГА с отраслевыми требованиями. Были составлены упрощенные экономико-математические модели центрального планирующего органа (МГА) и УГА, а также процедура коррекции плановых показателей УГА с учетом ресурсных ограничений МГА. Рассмотрены перспективные схемы динамического автоматизированного формирования плановых решений, реализующие предложенную методику и позволяющие повысить информированность верхнего уровня управления о нижнем, а значит, и качество планов, получаемых в отраслевой АСУ. Процедуры встречного планирования можно реализовать в децентрализованном и централизованном вариантах. Для обоих исходным является такой план системы, который обеспечивает получение центром максимального гарантированного результата. При децентрализованном варианте предусматривается коллективное принятие решений в соответствии с предложенным алгоритмом «аукцион». В результате находится отраслевой план, одновременно удовлетворяющий интересам центра и всех УГА. В случае централизованного варианта эксплуатационные управления сообщают свои истинные производственные возможности, а центр, используя алгоритм, имитирующий встречное планирование, находит равновесные планы и устанавливает их управлениям в директивном порядке. Поскольку планы, получаемые при децентрализованном варианте, удовлетворяют УГА, а централизованный вариант ориентиру-

ван на получение тех же планов, сообщение управлениями точной информации обусловлено их интересами.

В условиях АСУ гражданской авиацией процедуры встречного планирования могут использоваться в двух направлениях. Во-первых, для организации коллективного принятия решений в рамках взаимодействия АСУ-1 с АСУ-2 или создания в составе АСУ-1 отдельной автоматизированной системы коллективного принятия решений (АСКПР). Во-вторых, для централизованной разработки планов с помощью алгоритма, имитирующего встречное планирование, в составе математического обеспечения АСУ-1 (подсистема АСПР-ГА-Т «Расчет показателей по разделам годового плана развития отрасли»).

Первая форма автоматизации встречного планирования связана с организацией коллективного принятия решения при взаимодействии АСУ-1 и АСУ-2. Ее реализация возможна в перспективе при достижении определенного уровня интеграции АСУ-1, АСУ-2 на базе развития информационно-вычислительной сети ГА. К недостаткам данной формы относится необходимость многократного обмена информацией между центром и управлениями и проведения каждым отдельным УГА сложных расчетов, требующих использования ЭВМ. Вторая форма автоматизации — создание в составе АСУ-1 автоматизированной системы коллективного принятия решений (АСКПР). Она должна быть реализована как система с собственной функциональной частью, техническим, математическим и информационным обеспечением. Система должна предоставлять пользователям возможность коллективного доступа к информационной базе и вычислительным ресурсам, а также обеспечивать работу пользователей с ЭВМ в диалоговом режиме. Недостаток этой формы — необходимость концентрации в Министерстве на время выработки решений представителей различных уровней. Третья форма автоматизации предусматривает использование алгоритма, имитирующего процесс встречного планирования, в составе специального математического обеспечения АСУ-1 для централизованного составления сбалансированных планов, согласованных с интересами нижнего уровня и стимулирующих сообщение достоверной информации. В отличие от третьей формы в рамках первых двух могут быть эффективно решены вопросы выбора разумной степени формализации принятия решений центром и элементами. Вместе с тем эти формы требуют более высокого уровня технической базы, программно-математического и информационного обеспечения.

Список литературы: 1. Дабагян А. В., Заруба В. Я. Об одной схеме взаимодействия АСУП с ОАСУ. — В кн.: Методы и модели в задачах управления производством: Тез. докл. респ. науч.-техн. совещания. Таллин, 1979, с. 33—34. 2. Дабагян А. В., Заруба В. Я. Схема аукциона в задаче распределения ограниченного ресурса. — Автоматика и телемеханика, 1981, 3, с. 75—82.

УДК 001.89

В. Л. ЛИСИЦКИЙ, канд. техн. наук,
В. А. ГУЖЕВА, канд. техн. наук,
А. М. ХОДЬКО

МОДЕЛЬ ТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗРАБОТОК НА ОСНОВЕ РАЦИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

В условиях ограниченности трудовых ресурсов существенный момент тематического планирования — экономия живого труда за счет наилучшего выбора времен завершения типовых этапов разработок. В статье рассматривается сложная система, которую характеризует изменяющийся уровень $R(t) = R_0 + \gamma t$ однородных трудовых ресурсов. Деятельность системы направлена на выполнение n разработок, составляющих ее производственную программу. Разработка j состоит из m_j типовых этапов. Каждый i -й этап имеет нормативную трудоемкость S_{ij} и минимальную длительность τ_{ij} . Считается, что этапы выполняются непрерывно последовательно, в пределах каждого из них потребление ресурса постоянно.

При фиксированных длительностях τ_{ij} ($i=1, n, j=\overline{1, n}$) типовых этапов разработок потребление ресурса определяется кусочно-постоянной функцией $\tilde{R}(t)$. Если C — число скачков $\tilde{R}(t)$ на интервале $[0, T]$, а $t_0=0, t_1, t_2, \dots, t_C=T$ — их моменты, то на интервале $[t_{p-1}, t_p]$ функция $\tilde{R}(t)$ постоянна и равна R_p ($p=\overline{1, C}$). Наиболее полное равномерное потребление трудовых ресурсов зависит от рационального их планирования. Последнее предполагается оценивать с помощью обобщенного суммарного показателя Φ мгновенных неравномерностей φ_p потребления ресурса

$$\Phi = \sum_{p=1}^C \varphi_p; \quad \varphi_p = \frac{1}{t_p - t_{p-1}} \int_{t_{p-1}}^{t_p} (R_0 + \gamma t - R_p)^2 dt = (R_0 - R_p)^2 + \\ + \gamma(R_0 - R_p)(t_p + t_{p+1}) + \frac{\gamma^2}{3}(t_p^2 + t_p t_{p-1} + t_{p-1}^2).$$

Минимизация Φ экономически, в конечном счете, соответствует снижению потерь фонда заработной платы в системе от нерационального использования имеющихся трудовых ресурсов. Если Φ функция вектора $\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{m_1, 1}, \dots, \tau_{m_n, n})$, задающего календарный план выполнения производственной програм-

мы, то задача рационального использования трудовых ресурсов эквивалентна задаче нелинейного программирования: $\Phi(\bar{\tau}) \rightarrow \min, \bar{\tau} \leq \bar{\tau} \text{ (1)}$, где $\bar{\tau}$ — вектор, характеризующий предельное потребление ресурса в системе.

Структура целевой функции задачи (1) существенно зависит от взаимного расположения типовых этапов различных разработок, что обуславливает целесообразность применения прямых методов, малоэффективных в случае большого числа переменных. Приближенное решение задачи (1) предлагается искать в классе линейных моделей максимальной загрузки системы.

Степень использования ресурса системы определяется отношением W трудоемкости S работ, выполняемых на интервале $[0, T]$, к мощности $S_0 = \left(R_0 + \frac{1}{2} \gamma T\right) T$ системы. На каждом интервале $[t_{p-1}, t_p]$ коэффициент загрузки $W_p = R_p/R$, где $R = R_0 + \frac{\gamma}{2} T$. Полное использование возможностей системы на рассматриваемом интервале достигается при $W_p = 1$. В этом случае $R_p = R$, а φ_p принимает минимальное значение. Максимально загрузить систему — значит решить задачу нелинейного программирования в пространстве переменных:

$$W(\bar{\tau}) \rightarrow \max; W_p(\bar{\tau}) \leq 1, \bar{\tau} \leq \bar{\tau}. \quad (2)$$

Для достаточно малых γ можно считать, что $R(t)$ не зависит от времени и равно R . Последнее, сохраняя неизменной мощность системы, способствует мобилизации трудовых ресурсов в первой половине интервала планирования, позволяет W_p считать только функцией параметров R_p . Если ввести в рассмотрение переменные $r_{ij} = S_{ij}/\tau_{ij}$ и учесть, что $R_p = \sum_{\langle ij \rangle \in I_p} r_{ij}$, где I_p — множество пар индексов $\langle ij \rangle$ типовых этапов, определяющих уровень R_p потребления ресурса на интервале $[t_{p-1}, t_p]$, то ограничения задачи (2) в пространстве переменных $\vec{r} = (r_{11}, r_{21}, \dots, \dots, r_{m_1,1}, \dots, r_{m_n,n})$ являются линейными. Кроме того, максимизация среднего коэффициента использования ресурса

$$W_{cp} = 1/C \sum_{p=1}^C R_p/R$$

эквивалентна максимизации W . С учетом отмеченных обстоятельств задача (2) заменяется задачей линейного программирования

$$\sum_{p=1}^C \sum_{\langle ij \rangle \in I_p} r_{ij} \rightarrow \max; \quad (3)$$

$$\sum_{\langle ij \rangle \in I_p} r_{ij} \leq R; \quad r_{ij} \leq \bar{r}_{ij}; \quad i = \overline{1, m_i}, \quad j = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, C},$$

где $\bar{r}_{ij} = S_{ij}/\bar{\tau}_{ij}$ — предельное потребление ресурса на этапе i разработки j . Исходные структуры целевой функции задач (1) и (3) однозначно определяются потреблением ресурса в системе, соответствующего календарному плану τ .

Осуществляя в задаче (3) вариацию ε правых частей

$$\sum_{p=1}^c \sum_{\langle ij \rangle \in I_p} r_{ij} \rightarrow \max; \quad \sum_{\langle ij \rangle \in I_p} r_{ij} \leq R + \varepsilon, \quad \bar{r} \leq \bar{r} \quad (4)$$

и получая оптимальные решения $\tau(\varepsilon)$ задачи (4), находим значения критерия $\Phi(\tau(\varepsilon))$. В качестве решения задачи (1) выбираем календарный план $\tau(\varepsilon^*)$, где ε^* — значение параметра ε , при котором критерий $\Phi(\varepsilon)$ минимален. Решение $\tau(\varepsilon^*)$ обеспечивает максимальную загрузку системы при равномерном использовании ее трудовых ресурсов.

Поступила в редколлегию 30.11.81.

УДК 62—50

А. Е. ГОЛОСКОКОВ, В. А. КАПУСТИНА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШАЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

При планировании на перспективу в одном случае можно установить числовые характеристики и законы распределения случайных величин, в другом — только области существования параметров модели. Например, в процессе формирования модели прогноза закрепления новых летательных аппаратов (ЛА) за авиалиниями учитывается закон распределения количества назначаемых ЛА i -го типа на j -ю авиалинию, но известной может быть только область существования параметра. Отсутствие статистических данных по новым типам ЛА не позволяет узнать законы распределения и их параметры и, следовательно, построить наиболее полную стохастическую модель. Таким образом, становится актуальной проблема установления числовых характеристик и законов распределения случайных параметров модели.

Предлагается методика определения статистических данных по количеству назначаемых ЛА i -го типа на j -ю авиалинию в зависимости от параметров модели. Используется подход, изложенный в работе [1]. Рассмотрим упрощенную стохастическую модель закрепления i -го типа самолета на авиалиниях [2, 3], цель которой — нахождение функции распределения F_x вектора \bar{X} .

Законы распределения случайных параметров модели известны, решение должно быть принято до наблюдения реализации случайных величин. Максимизировать

$$\int_{\Omega \times X} \sum_{i=1}^n C_{ij}(\omega) X_{ij} dF_{\omega} dF_x \quad (1)$$

при условиях

$$\int_{\Omega \times X} [P_{ij}(\omega) X_{ij} - \Pi_j(\omega)] dF_{\omega} dF_x \leq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$\int_{\Omega \times X} \left[\sum_{j=1}^n X_{ij} - d_i(\omega) \right] dF_{\omega} dF_x \leq 0; \quad (3)$$

$$X_{ij} \in X, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где $C_{ij}(\omega)$, $P_{ij}(\omega)$, $\Pi_j(\omega)$, $d_i(\omega)$ — случайные параметры условий задачи; X_{ij} — количество самолетов i -го типа, назначаемых на j -ю авиалинию.

Обозначим

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n C_{ij}(\omega) X_{ij} dF_{\omega} = \bar{\Psi}_0(\bar{X});$$

$$\int_{\Omega} [P_{ij}(\omega) X_{ij} - \Pi_j(\omega)] dF_{\omega} = \bar{\Psi}_e(\bar{X}), \quad e = \overline{1, n};$$

$\int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^n X_{ij} - d_i(\omega) \right] dF_{\omega} = \bar{\Psi}_e(\bar{X}), \quad e = n+1$ и введем новые переменные

$$y_e = \bar{\Psi}_e(\bar{X}); \quad e = 0, 1, \dots, n+1, \quad (5)$$

преобразующие множество $X \in \mathbb{R}^n$ в $G \in \mathbb{R}^{n+2}$. Обозначим через conv выпуклую оболочку множества Y , для которого задача (1) — (4) может быть записана в виде

$$y_0 \rightarrow \sup \quad (6); \quad y_e \leq 0, \quad e = \overline{1, n+1} \quad (7); \quad y \in \text{conv } Y \quad (8).$$

Используя теорему Каратеодора [1], $\text{conv } Y$ можно представить в виде

$$\text{conv } Y = \left\{ \sum_{k=0}^{n+2} \bar{\Psi}_e(\bar{X}_k) p_k, \quad e = \overline{0, n+1}; \quad p_k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{n+2} p_k = 1, \quad \bar{X}_k \in X \right\}.$$

В данном случае интерес представляют точки $y \in Y$, на одной из которых достигается экстремум. Согласно следствию теоремы Каратеодора [1] такие точки можно представить как выпуклые комбинации не более, чем $n+2$ точек множества Y . Это значит, что допустимая область решений задачи (6) — (8), а вместе с ней и задачи (1) — (3) определяются набором $n+2$ векторов $\bar{X}_k \in X$ и $n+2$ чисел p_k при условии

$$\sum_{k=0}^{n+1} p_k = 1; p_k \geq 0; k = \overline{0, n+1}.$$

Таким образом, задача (1) — (4) эквивалентна следующей. Найти векторы \bar{X}_k и числа p_k , которые определяют верхнюю грань функционала

$$\sum_{k=0}^{n+1} \bar{\Psi}_0(\bar{X}_k) p_k \quad (9)$$

при условиях

$$\sum_{k=0}^{n+1} \bar{\Psi}_e(\bar{X}_k) p_k \leq 0, e = \overline{1, n+1}; \quad (10)$$

$$\bar{X}_k \in X, p_k \geq 0, k = \overline{0, n+1}, \sum_{k=0}^{n+1} p_k = 1. \quad (11)$$

В данном случае, векторы \bar{X}_k^* и числа p_k^* , составляющие оптимальный план задачи (9) — (11), можно интерпретировать как возможные значения случайной величины X и соответствующие им вероятности. Следовательно, полученные статистические данные, позволяют найти закон распределения количества назначаемых ЛА i -го типа на n авиалиний и его числовые характеристики.

Уменьшая количество авиалиний по предлагаемой методике, удается прогнозировать закон распределения для одной авиалинии.

Таким образом, наша методика позволяет определять статистические данные параметра модели в зависимости от информированной структуры задачи.

Такая методика применена при построении стохастической модели распределения ЛА по сети авиалиний, что позволяет рекомендовать ее для построения стохастических моделей распределительного типа планирования и управления [2].

Список литературы: 1. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. радио, 1974. — 400 с. 2. Голоскоков А. Е. Стохастическая постановка распределительной задачи. — В кн.: Эффективность и оптимизация систем и процессов гражданской авиации и совершенствование системы комплексного планирования. М., 1977, с. 21. 3. Голоскоков А. Е. Построение стохастической модели планирования. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1979, № 148. Прикладная механика и процессы управления, вып. 1, с. 59—61.

Поступила в редколлегию 11.12.81.

УДК 519.3

Л. А. ГАМБАРОВ, канд. техн. наук

ИТЕРАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Широкий класс практических задач приводит к следующей математической постановке: найти

$$\min_{x_{ikl}, \hat{x}_{kjl}} \left(\sum_i \sum_k \sum_l c_{ik} x_{ikl} + \sum_k \sum_j \sum_l \hat{c}_{kj} \hat{x}_{kjl} \right) \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_k x_{ikl} = a_{il}, \quad i = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, q; \quad (2)$$

$$\sum x_{ikl} = \sum \hat{x}_{kjl}, \quad k = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, q; \quad (3)$$

$$\sum_k \hat{x}_{kjl} = b_{jl}, \quad j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, q; \quad (4)$$

$$\sum_{i,l} \hat{x}_{kjl} \leq d_k, \quad k = 1, \dots, r; \quad (5)$$

$$x_{ikl} \geq 0, \quad \hat{x}_{kjl} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Выражения (1)—(6) — пример многопродуктовой транспортной задачи с промежуточными узлами. Суть ее в отыскании оптимального плана перевозок неоднородного продукта l из пунктов производства i в пункты потребления j при наличии ограничений на пропускные способности промежуточных узлов k . Предполагается, что весь изготовленный продукт в каждом i -м пункте производства используется, а спрос каждого j -го пункта потребления удовлетворяется. В формализованной постановке

(1)—(6) даны следующие обозначения: x_{ikl} , \hat{x}_{kjl} — количество единиц продукта l -й номенклатуры, перевозимого соответственно по маршрутам $i \rightarrow k$ и $k \rightarrow j$; c_{ik} , \hat{c}_{kj} — стоимости перевозки едини-

цы продукта по соответствующим маршрутам; a_{il} — количество единиц продукта l -й номенклатуры, производимое в i -м пункте; b_{jl} — количество единиц продукта l -й номенклатуры, потребляемое в j -м пункте; d_k — суммарная пропускная способность k -го узла.

Особенность задачи (1) — (6) связана с наличием ограничений (3). Действительно, если предположить, что

$$\sum_i x_{ikl} = \sum_j \hat{x}_{kjl} = \bar{h}_{kl}, \quad k = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, q, \quad (7)$$

где \bar{h}_{kl} , $k = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, q$, определены, то налицо возможность расчленения задачи (1) — (6) на две группы подзадач и, как следствие, распараллеливание алгоритма решения. В первой группе q подзадач требуется найти

$$\min_{x_{ikl}} \sum_i \sum_k e_{ik} x_{ikl} \quad (8)$$

при ограничениях

$$\sum_k x_{ikl} = a_{il}, \quad i = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, q; \quad (9)$$

$$\sum_i x_{ikl} = \bar{h}_{kl}, \quad k = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, q; \quad (10)$$

$$x_{ikl} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, q. \quad (11)$$

Во второй группе q подзадач необходимо определить

$$\min_{\hat{x}_{kjl}} \sum_k \sum_j \hat{c}_{kj} \hat{x}_{kjl} \quad (12)$$

при ограничениях

$$\sum_j \hat{x}_{kjl} = \bar{h}_{kl}, \quad k = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, q; \quad (13)$$

$$\sum_k \hat{x}_{kjl} = b_{jl}, \quad j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, q; \quad (14)$$

$$\hat{x}_{kjl} \geq 0, \quad k = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, q. \quad (15)$$

Таким образом, благодаря наличию условий (7) задача минимизации функции цели (1) сводится к решению $2q$ независимых двухиндексных задач транспортного типа, что является эффективным способом «борьбы» с большой размерностью исходной задачи.

Остановимся на определении условий (7), допускающих описанный выше подход. Решение этого вопроса свяжем с задачей

построения рациональной последовательности точек $\bar{h}(s) = \{\{\bar{h}_{kl}(s), k=1, \dots, r\}, l=1, \dots, q\}$, $s=0, 1, 2, \dots$, где s — номер шага предлагаемой в работе итеративной процедуры. Введем в рассмотрение вектор $h = \{\{h_{kl}, k=1, \dots, r\}, l=1, \dots, q\}$ и обозначим через $\Phi(h)$ неявную зависимость функции цели (1) от переменных h_{kl} . Тогда вопрос определения оптимального набора переменных x_{kil}, x_{kjl} , $i=1, \dots, n$, $k=1, \dots, r$, $j=1, \dots, m$, $l=1, \dots, q$ в задаче (1) — (6) надо решать в такой постановке: найти

$$\min_{h \in H} \Phi(h), \quad (16)$$

где H — множество векторов, удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_k h_{kl} = \sum_i a_{il}, \quad l=1, \dots, q; \quad (17)$$

$$\sum_l h_{kl} \leq d_k, \quad k=1, \dots, r; \quad (18)$$

$$h_{kl} \geq 0, \quad k=1, \dots, r, \quad l=1, \dots, q. \quad (19)$$

Ограничение (17) можно получить следующим образом. Переменные x_{ikl} просуммируем по индексам i и k . Полученная сумма соответствует всему объему l -й номенклатуры, функционирующему в исследуемой системе. В то же время должно выполняться условие

$$\sum_i \sum_k x_{ikl} = \sum_j a_{jl}, \quad l=1, \dots, q. \quad (20)$$

Из соотношения (20) и ограничения (10) следует равенство (17). Ограничение (18) вытекает из выражений (5) и (13). Условие (19) очевидно.

Предположим, что на начальном шаге $s=0$ вектор $h = \bar{h}(0)$, а $\Phi(h)$ в общем случае не принимает наименьшего значения. Пусть на s -м шаге $h = \bar{h}(s)$. Обозначим через $g_\Phi(h)$ субградиент функции $\Phi(h)$ и решим задачу

$$\min_{h \in H} (g_\Phi(\bar{h}(s)), h), \quad (21)$$

где $(g_\Phi(\bar{h}(s)), h)$ — скалярное произведение векторов. Субградиент $g_\Phi(\bar{h}(s))$ выражается через двойственные оценки локальных транспортных задач (8) — (11) и (12) — (15). Тогда задачу (21) можно переписать в таком виде: найти

$$\min_{h_{kl} \in H} \sum_k \sum_l v_{kl}(s) + \hat{u}_{kl}(s) h_{kl}, \quad (22)$$

где $v_{kl}(s)$, $\hat{u}_{kl}(s)$ — оптимальные двойственные оценки соответственно ограничений (10) задачи (8) — (11) и ограничений (13) задачи (12) — (15), полученные на s -м шаге.

Очевидно, что оптимальное значение вектора переменных $h(s+1) = \{\{h_{kl}(s+1), k=1, \dots, r\}, l=1, \dots, q\}$ задачи (21) на s -м шаге, т. е. $\bar{h}(s+1) = \{\{\bar{h}_{kl}(s+1), k=1, \dots, r\}, l=1, \dots, q\}$ определяет значение вектора переменных задачи (16) на s -м шаге. Если последнее таково, что выполняется соотношение

$$\Phi(\bar{h}(s+1)) \leq \Phi(\bar{h}(s)), \quad s=0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

то условия (23) указывают на возможность децентрализованного планирования.

В статье предложен новый подход к построению последовательности точек $\bar{h}(s)$, обеспечивающих сходимость рассматриваемого процесса децентрализованного планирования. Введем в рассмотрение множество

$$G = \{h(s) | h(s) \in H, h(s+1) \geq (1 - \varepsilon(s))\bar{h}(s)\}, \quad (24)$$

где $\varepsilon(s)$ — величина s -го шага. Из выражения (24) следует, что ограничения (19) задач (16) и (22) принимают вид

$$h_{kl}(s+1) \geq (1 - \varepsilon(s))\bar{h}_{kl}(s), \quad k=1, \dots, r, l=1, \dots, q.$$

Таким образом, задача (16) преобразуется в следующую: найти

$$\min_{h(s) \in G} \Phi(h(s)),$$

а задача (21): найти

$$\min_{h(s+1) \in G} (g_{\Phi}(\bar{h}(s)), h(s+1))$$

или в рассматриваемом случае

$$\min_{h(s+1) \in G} \sum_k \sum_l (v_{kl}(s) + \hat{u}_{kl}(s)) h_{kl}(s+1). \quad (25)$$

Алгоритм решения исходной задачи (1) — (6) включает такие операции. 1. Определение вектора $h(s)$, $s=0$ произвольным способом. 2. Вычисление $\Phi(h(s))$ и $g_{\Phi}(\bar{h}(s))$ при $\bar{h}(s) = \bar{h}(0)$ путем решения $2q$ независимых транспортных задач (8) — (11) и (12) — (15). Последние решаются любым методом, позволяющим получить двойственные оценки, с дальнейшим суммированием транспортных расходов всех задач. На этом завершается нулевая итерация. 3. Решение задачи (25) при $\bar{h}(s) = \bar{h}(0)$ и $\varepsilon(s) = \varepsilon(1)$, т. е. определение $\bar{h}(1)$. 4. Возвращение к п. 2, что завершает первую итерацию и т. д.

Ввиду ограниченного объема статьи осветить вопрос, связанный с выбором величины s -го шага $\varepsilon(s)$, который существенно влияет на скорость сходимости вычислительного процесса, нет

возможности. Численное исследование задачи (1) — (6), проведенное в условиях большой размерности, позволяет сделать вывод об эффективности рассматриваемого подхода.

Поступила в редколлегию 15.11.81.

УДК 629.734

М. Д. ГОДЛЕВСКИЙ, канд. техн. наук

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ОПТИМИЗАЦИИ ОБЛИКОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ ПАРКА ПАССАЖИРСКИХ МАГИСТРАЛЬНЫХ САМОЛЕТОВ

Вопросам оптимального проектирования больших систем в народном хозяйстве уделяется значительное внимание. Одна из них — комплекс технических средств гражданской авиации. Первый этап его проектирования [1] — синтез модели парка пассажирских магистральных самолетов на конкретной сети авиалиний и оптимизация ее параметров. Эту проблему можно представить в виде задачи оптимального покрытия множества X на основе метода интегральных стоимостных характеристик [1, 2]. Задачу оптимизации парка самолетов на подмножестве $X^{(l)}$ будем называть L -задачей, если

$$\bigcup_{l=1}^Q X^{(l)} = X, \quad X^{(l)} \cap X^{(s)} = \emptyset, \quad \forall l, s = \overline{1, Q}, s \neq l \quad (1)$$

и каждое множество $X^{(l)}$ обслуживается одним, двумя или тремя типами самолетов (ближние, средние, дальние магистральные), которые перекрывают весь диапазон дальности и эксплуатируются на авиалиниях протяженностью $L_j < L_{np_i}$ независимо от потока пассажиров. Решение ряда L -задач уменьшает общее количество степеней свободы при определении оптимальной конфигурации фиксированного количества областей D_i множества X .

Модель L -задачи для трех типов самолетов в общем виде можно записать как

$$S_{L_{np}}(X^{(l)}, Y) = \sum_{i=1}^3 F_i(V_{кр \text{ эк}_i}; n_{пас. o_i}, L_{np_i}, L_{np_{i-1}}); \quad (2)$$

$$a_1^{(1)} < L_{np_1} \leq b_1^{(1)} = a_1^{(2)} < L_{np_2} \leq b_1^{(2)} = a_1^{(3)} < L_{np_3}; \quad L_{np_0} = 0; \quad (3)$$

$$a_2^{(i)} \leq V_{кр \text{ эк}_i} \leq b_2^{(i)}; \quad a_3^{(i)} \leq n_{пас. o_i} \leq b_3^{(i)}, \quad i = \overline{1, 3} \quad (4)$$

при условии

$$F_i = S_{L_{np}}^{(i)}(V_{кр \text{ эк}_i}, n_{пас. o_i}, L_{np_i}) - \overline{S}_{L_{np}}^{(i)}(V_{кр \text{ эк}_i}, n_{пас. o_i}, L_{np_i}, L_{np_{i-1}}); \quad (5)$$

$$\overline{S}_{L_{np}}^{(1)}(V_{кр \text{ эк}_1}, n_{пас. o_1}, L_{np_1}, L_{np_0}) = 0,$$

где $S_{L_{np}}^{(i)}$, $\bar{S}_{L_{np}}^{(i)}$ — интегральные стоимостные характеристики для i -го типа самолета; $v_{кр \text{ эк } i}$ — крейсерская экономичная скорость полета; $n_{пас \text{ о } i}$ — максимальное число пассажирских мест в самолете; $L_{np \text{ } i}$ — практическая дальность полета; $\alpha_i^{(i)}$, $\beta_i^{(i)}$ — ограничения, которые определяются технической возможностью реализации изделия.

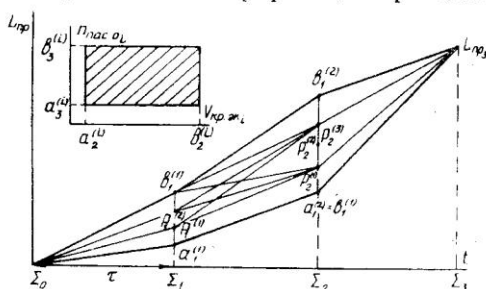
Выбирая различные конфигурации подмножеств $X^{(i)}$ и различное их количество на основе L -задач, решаем задачу оптимизации стратегии

$$S_{np}^*(X, Y) = \min_{Q, Y} \sum_{i=1}^Q S_{L_{np}}(X^{(i)}, Y)$$

при условии (1).

Для нахождения оптимальных параметров модели (2)–(5) необходимо решить задачу нелинейного программирования с целевой функцией, которая в общем случае многоэкстремальна. Вполне вероятно, что в области допустимых значений ее параметров возможно наличие нескольких локальных экстремумов. Необходимо среди них найти глобальный. Функция (2) аддитивна относительно параметров $L_{np \text{ } i}$. Исходя из этого для ее оптимизации предлагаем применять метод, который состоит в использовании идеи последовательного анализа вариантов при минимизации (2) по параметрам $L_{np \text{ } i}$ и решения ряда задач нелинейного программирования с целевой функцией (5) и ограничениями (4) для фиксированных значений $L_{np \text{ } i}$, $L_{np \text{ } i-1}$.

Одним из основных алгоритмов решения аддитивных задач является «киевский вешик» [3]. Применительно к поставленной задаче его геометрическая интерпретация приведена на рисунке



(Σ_i -одномерная плоскость в пространстве $(L_{np \text{ } i}, t)$, где $t = \tau t$, ($i = 1, 3$)). Длины отрезков, соединяющих плоскости Σ_i , Σ_{i-1} , с учетом ограничений (3, 4) обозначим следующим образом:

$$\bar{F}_i(L_{np \text{ } i}^*, L_{np \text{ } i-1}) = \min_{v_{кр \text{ эк } i}, n_{пас \text{ о } i}} F_i(v_{кр \text{ эк } i}, n_{пас \text{ о } i}, L_{np \text{ } i}, L_{np \text{ } i-1}). \quad (6)$$

Наша задача — определить ломаную линию наименьшей длины, которая соединяет плоскости Σ_0, Σ_3 . Обозначим расстояние от фиксированной точки L_{np_1} до плоскости Σ_0 (в нашем случае до ее нулевой точки) через

$$\bar{F}^*(L_{np_1}) = \min_{L_{np_0}} \bar{F}_1(L_{np_1}, L_{np_0}) = \bar{F}_1(L_{np_1}, 0). \quad (7)$$

Аналогично определим расстояние от произвольной точки L_{np_2} до плоскости Σ_0

$$\bar{F}^*(L_{np_2}) = \min_{L_{np_1}} \{\bar{F}^*(L_{np_1}) + \bar{F}_2(L_{np_2}, L_{np_1})\} \quad (8)$$

и расстояние от точки L_{np_3} до Σ_0

$$\bar{F}^*(L_{np_3}) = \min_{L_{np_2}} \{\bar{F}^*(L_{np_2}) + \bar{F}_3(L_{np_3}, L_{np_2})\}, \quad (9)$$

которое и доставляет минимум функции (2) с ограничениями (3), (4). Значение L_{np_3} определяется максимальной протяженностью авиалинии из подмножества $X^{(n)}$.

Численная реализация описанного алгоритма (6) — (9) осуществляется посредством задания на отрезках $[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}]$, $[a_1^{(2)}, b_1^{(2)}]$ некоторых узлов $P_1^{(j)}$, $P_2^{(j)}$ и вместо решения исходной задачи — определения кратчайшего пути, проходящего через эти узлы и соединяющего точки O , L_{np_3} плоскостей Σ_0, Σ_3 . Для нахождения длины произвольного отрезка между плоскостями Σ_i, Σ_{i-1} необходимо минимизировать функцию (5) с ограничениями (4). Для этого был разработан алгоритм оптимизации, представляющий собой синтез двух методов нелинейного программирования. Учитывая, что начальные значения $V_{кр\ эк_i}^{(0)}$, $n_{пасо_i}^{(0)}$ всегда можно выбрать внутри области допустимых значений на первом этапе, применяют метод наискорейшего спуска (МНС). Если через определенное число итераций в МНС достаточно близко подойдем к границе оптимизации, нужен алгоритм метода проекции градиента.

Функция F_i в общем случае невыпукла. Поэтому ее глобальный минимум следует искать путем многократного применения алгоритма оптимизации для различных начальных значений параметров $V_{кр\ эк_i}$, $n_{пасо_i}$ из области допустимых (4). Описанный выше подход сводится к декомпозиции задачи (2) — (3), содержащей восемь переменных, на ряд подзадач (4), (6) с двумя переменными, среди которых путем направленного перебора определяются три основных. Их решение и позволяет найти оптимальные параметры исходной модели. Введем обозначения: M_1 — количество узлов $P_1^{(j)}$ на плоскости Σ_1 ; M_2 — количество узлов $P_2^{(j)}$ на плоскости Σ_2 . Тогда число подзадач (4), (6) равно

$M_1 + M_2 + M_1 M_2$, каждая из которых должна решаться S раз (S — количество начальных значений параметров $V_{крэк}$, $n_{пасо}$, выбранных для нахождения глобального минимума). Допустим, область изменения каждой переменной разбивается на три интервала, а $M_1 = 10$, $M_2 = 15$, что позволяет найти вполне удовлетворительное по точности решение исходной задачи. Для такого варианта количество задач нелинейного программирования с двумя переменными примерно в четыре раза меньше, чем число подзадач, которые необходимо решать для модели, содержащей восемь переменных. Отсюда наглядное преимущество предложенного подхода.

Конкретная реализация алгоритма осуществлена для определения перспективного парка пассажирских магистральных самолетов гражданской авиации без учета принимаемости и базирования на сети, содержащей 1930 авиалиний. Результаты просчетов нескольких вариантов выбора подмножеств $X^{(i)}$ показали его хорошую работоспособность.

Список литературы: 1. *Годлевский М. Д.* Метод последовательных приближений при оптимизации комплекса технических средств транспортной системы. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1979, № 148. Прикладная механика и процессы управления, вып. 1, с. 64—66. 2. *Дабаян А. В., Годлевский М. Д., Пинаев Е. Г.* Оптимизация перспективного парка пассажирских самолетов гражданской авиации: Тр. ГосНИИГА. Исследование больших систем ГА, 1977, № 149, с. 69—75. 3. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1975, — 528 с.

Поступила в редколлегию 20.09.78

УДК 629.734

С. В. ШЕВЧЕНКО

О ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ СЕТИ АВИАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКИХ БАЗ ПО ОБСЛУЖИВАНИЮ ВЕРТОЛЕТНОГО ПАРКА

В районах экспедиционных работ Сибири и Дальнего Востока встает проблема технического обслуживания прикомандированных вертолетов по трудоемким формам регламента. Использование для этих целей существующей сети авиационно-технических баз (АТБ), как правило, ведет к большим убыткам из-за простоев машин в ожидании технического обслуживания (ТО) либо длительных перелетов. Поэтому возникает следующая задача перспективного планирования. Зная запрашиваемый различными министерствами и ведомствами налет часов вертолетов λ -го типа по районам работ, необходимо закрепить машины за базами технического обслуживания и реконструировать сеть АТБ путем строительства ангаров так, чтобы суммарные затраты на перелеты из районов работ в АТБ и обратно, техническое

обслуживание, строительство новых ангаров и суммарные потери прибыли, вызванные прекращением обслуживания заказчика на время проведения ТО, были минимальны. Учитывая различные среднегодовые налеты часов и различные затраты на эксплуатацию вертолетов разных типов, а также то, что вертолет с меньшим взлетным весом может проходить периодическое ТО в ангаре для вертолета с большим взлетным весом (обратное, в общем, невозможно), рассматриваемую задачу можно решать для каждого типа вертолета отдельно. Примем следующие обозначения: H_{ik} — требуемый общий налет часов в i -м районе работ вертолетов λ -го типа; τ_{λ}^n — удельный объем работ по периодическим видам ТО вертолетов; N_j — производственная годовая программа в j -й АТБ; M_j — производственная мощность АТБ; $T_{\lambda j}$ — существующий объем периодического ТО вертолетов λ -го типа; $F_{\lambda j}$ — прирост мощности АТБ по периодическому ТО от строительства ангара; $K_{\lambda j}$ — стоимость сооружения ангара; E_n — нормативный коэффициент экономической эффективности; L_{ij} — среднее расстояние от i -го района работ к j -й АТБ; V_{λ} — средняя скорость вертолета; Φ_{λ} — налет часов, после которого необходимо периодическое ТО по трудоемким формам регламента; c_{λ} — себестоимость летного часа вертолета; π_{λ} — прибыль от одного летного часа производительного полета. Введем логическую переменную

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вертолеты из } i\text{-го района проходят ТО} \\ & \text{в } j\text{-й АТБ;} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда суммарный дополнительный объем периодического ТО

$$\forall \lambda, j: \Delta T_{\lambda j} = \tau_{\lambda}^n \sum_i H_{ik} x_{ij} \quad (1)$$

при дополнительных ограничениях

$$\forall j: \sum_i x_{ij} = 1, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}. \quad (2)$$

Затраты на ТО всех вертолетов

$$\forall \lambda: \Theta_{\lambda} = \sum_j (\Delta T_{\lambda j} + T_{\lambda j}) C_{\lambda j}, \quad (3)$$

где $C_{\lambda j}$ — себестоимость приведенной единицы периодического ТО λ -го типа в j -АТБ, причем

$$\forall \lambda, j: C_{\lambda j} = a_{\lambda} + \frac{b_{\lambda} (N_j + \Delta T_{\lambda j})}{(T_{\lambda j} + \Delta T_{\lambda j})^2}. \quad (4)$$

Здесь a_{λ} , b_{λ} — постоянные коэффициенты.

Таким образом, на основании выражений (1), (4) суммарные эксплуатационные затраты на проведение периодического ТО вертолетов по сети АТБ

$$\forall \lambda: \Xi_{\lambda} = \sum_j (\tau_{\lambda}^n \sum_i H_{i\lambda} x_{ij} + T_{\lambda j}) (a_{\lambda} + b_{\lambda} (N_j + \tau_{\lambda}^n \sum_i H_{i\lambda} x_{ij}) / (T_{\lambda j} + \tau_{\lambda}^n \sum_i H_{i\lambda} x_{ij})^2$$

при условии (2) и $\forall j: N_j + \tau_{\lambda}^n \sum_i H_{i\lambda} x_{ij} \leq M_j$.

Рассмотрим дополнительные капитальные вложения в ангарах j -й АТБ. Обозначим суммарные капитальные вложения в строительство $(p-1)$ -го ангара $A_{pj\lambda}$.

Тогда

$$\forall j, \lambda: Y_{pj\lambda} = \begin{cases} 0, & p = 1; \\ (p-1) K_{\lambda j}, & p \geq 2. \end{cases}$$

Введем логическую переменную

$$\forall p, j: y_{pj} = \begin{cases} 1, & \text{если используются капитальные вложения} \\ & A_{pj\lambda}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Строительство новых ангарах и использование существующих резервов мощности в j -й АТБ регламентируется следующим ограничением *:

$$\forall j, \lambda: \tau_{\lambda}^n \sum_i H_{i\lambda} x_{ij} \leq \sum_p B_{pj\lambda} y_{pj}.$$

При этом

$$\forall j, \lambda: B_{pj\lambda} = \begin{cases} M_j - N_j, & p = 1; \\ M_j - N_j + (p-1) F_{\lambda j}, & p \geq 2. \end{cases}$$

Суммарные приведенные капитальные вложения на реконструкцию сети АТБ

$$\forall \lambda: W_{\lambda} = \sum_{i,p} E_n A_{pj\lambda} y_{pj}.$$

Транспортные издержки и потери прибыли при перелете из i -го района работ в j -ю АТБ можно выразить как

$$\forall \lambda: s_{ij\lambda} = 2L_{ij} H_{i\lambda} (c_{\lambda} + \tau_{\lambda}) / V_{\lambda} \Phi_{\lambda}.$$

Суммарные транспортные затраты с учетом выражения (2) можно представить

$$\forall \lambda: Q_{\lambda} = \sum_{i,j} s_{ij\lambda} x_{ij}.$$

* Дабаян А. В., Шевченко С. В. О задаче оптимального размещения систем обслуживания технических средств. 5 с. — Депон. УкрНИИТИ, 1981, № 3056, 15 сентября.

Тогда задача приобретает следующий вид: найти

$$\min S_\lambda = \sum \left(\sum_i s_{ij} x_{ij} + \sum_p y_{pj} \left(A_{pj} E_n + \left(T_{\lambda j} + \tau_\lambda^n \sum_i H_{ij} x_{ij} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(a_\lambda + \frac{b_\lambda (N_j + \tau_\lambda^n \sum_i H_{ij} x_{ij})}{(T_{\lambda j} + \tau_\lambda^n \sum_i H_{ij} x_{ij})^2} \right) \right) \right) \quad (5)$$

при ограничениях

$$\forall j: \tau_\lambda^n \sum_i H_{ij} x_{ij} \leq \sum_p B_{pj} y_{pj}; \quad (6)$$

$$\forall i: \sum_j x_{ij} = 1 \quad (7); \quad \forall j: \sum_p y_{pj} \leq 1; \quad (8)$$

$$\forall i, j, p: x_{ij}, y_{pj} \in \{0, 1\}. \quad (9)$$

Задача (5) — (9) представляет собой задачу нелинейного дискретного программирования с выпуклой вниз целевой функцией и линейными ограничениями. Для ее решения применим метод ветвей и границ.

Поступила в редколлегию 04.12.81.

УДК 656

П. М. ГЛАДКИЙ, канд. техн. наук,
П. М. ЗЕЛИНСКИЙ, Ю. В. МАРГАНИЯ,
Н. П. ЧЕРНЫШЕВА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ САМОЛЕТОВ ДЛЯ ПЕРЕВОЗКИ ГРУЗОВ

При перевозке партии различных грузов возникает задача об оптимальном использовании транспортных средств [1]. Рассмотрим эту задачу применительно к авиатранспорту. Предположим, что перевозка осуществляется самолетами одного типа. Тогда необходимое число рейсов

$$n = \left(\sum_{j=1}^m Q_j \right) / \sum_{j=1}^m x_j,$$

где Q_j — общая масса груза j -го вида; x_j — масса груза в каждом самолете; m — количество видов груза в партии.

Желательно так загрузить каждый самолет, чтобы общее число рейсов для перевозки данной партии груза было мини-

мальным. Уменьшение n достигается при увеличении $\sum_{j=1}^m x_j$.

Поэтому вместо минимизации числа рейсов можно рассмотреть эквивалентную задачу о максимизации загрузки каждого рейса: найти

$$\max \sum_{j=1}^m x_j \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^m x_j \leq P, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m (x_j/\gamma_j) \leq V \quad (3); \quad Q_j \sum_{j=1}^m x_j = x_j \sum_{j=1}^m Q_j, \quad (4)$$

где P, V — грузоподъемность и объемная вместимость самолета соответственно; γ_j — удельная объемная плотность груза j -го вида. Ограничения (2), (3) означают соответственно, что общая масса, объем помещаемого в самолет груза не должны превышать допустимой грузоподъемности и объемной вместимости. Условие (4) требует, чтобы перевезена была вся заданная партия груза.

Сформулированная задача относится к классу задач линейного программирования. Решить ее можно, например, симплексным методом [2]. Однако специфика задачи позволяет воспользоваться и более простым, суть которого состоит в следующем. Возможны такие варианты. 1. Преобладает груз с большой объемной массой, и самолет может оказаться недогруженным по объему. 2. Преобладает груз с малой объемной массой, и самолет может быть недогруженным по массе. 3. Грузоподъемность и вместимость самолета использованы до конца. Последний вариант идеален. Определим удельную объемную грузоподъемность самолета $\gamma_c = P/V$ (5) и среднюю удельную объемную плотность данной партии груза

$$\gamma_r = \left(\sum_{j=1}^m Q_j \right) / \sum_{j=1}^m v_j, \quad (6)$$

где γ_c — удельная объемная грузоподъемность самолета; γ_r — средняя удельная объемная плотность данной партии груза; v_j — объем, занимаемый грузом j -го вида в данной партии. Тогда первый вариант загрузки будет иметь место при $\gamma_c < \gamma_r$, второй — при $\gamma_c > \gamma_r$ и третий — при $\gamma_c = \gamma_r$.

Следовательно, минимально необходимое число рейсов определяется общей массой или объемом партии перевозимого груза. Этот вывод можно получить строго аналитически. Рассмотрим вместо ограничений (2), (3) эквивалентные им

$$\left(\sum_{j=1}^m Q_j \right) / m \leq P \quad (7); \quad \left(\sum_{j=1}^m Q_j / \gamma_j \right) / n \leq V. \quad (8)$$

Преобразуя неравенства (7), (8), получаем

$$n \geq \left(\sum_{j=1}^m Q_j \right) / P \quad (9); \quad n \geq \left(\sum_{j=1}^m Q_j / \gamma_j \right) / V. \quad (10)$$

Таким образом, количество рейсов n должно быть равно большему из двух чисел, определяемых по формулам

$$n_1 = \left(\sum_{j=1}^m Q_j \right) / P; \quad n_2 = \left(\sum_{j=1}^m Q_j / \gamma_j \right) / V.$$

На основании изложенного предлагается следующий алгоритм решения задачи (1)—(4). 1. Вычисляем удельную грузоподъемность самолета γ_c по формуле (5). 2. Находим объем каждого вида груза по формуле $v_j = Q_j / \gamma_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. 3. Определяем среднюю удельную объемную плотность всей партии груза по формуле (6). 4. Если $\gamma_c = \gamma_r$, то переходим к п. 6.

5. Ищем число самолетов по формуле $n = \left(\sum_{j=1}^m v_j \right) / V$ и переходим к п. 7. 6. Устанавливаем количество самолетов $n = \left(\sum_{j=1}^m Q_j \right) / P$. 7. Пользуясь формулой $x_j = Q_j / n$, $j = 1, 2, \dots, m$, получаем оптимальный комплект загрузки.

Список литературы: 1. *Оптимизация процессов грузовой работы*. — М.: Транспорт, 1973. — 270 с. 2. *Гасс С. Линейное программирование*. — М.: Физматгиз, 1961. — 303 с.

Поступила в редколлегию 08.12.80.

УДК 330.115

А. В. МАКАРЕНКО, С. В. ГОЛОБОВА

АЛГОРИТМ ДИХОТОМИИ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ТИПОРАЗМЕРНОГО РЯДА КТС И ЕГО ДИНАМИКИ

Параметры комплексов технических средств (КТС) при формировании перспективного парка и его изменений определяют таким образом, чтобы удовлетворялись все требования, предъяв-

ляемые к системе за плановый период, и минимизировались суммарные затраты на разработку, производство и эксплуатацию КТС. При этом можно использовать метод, изложенный в работах [1, 2]. Данный метод основан на построении и обслуживании динамического поля требований (ДПТ), которое согласно исследованию [2] представляет собой гиперпараллелепипед $0 < a_i \leq x_i \leq d_i$, $i = \overline{1, m}$ (1), где x_i , $i = \overline{1, m-1}$ — технические параметры; x_m — время; a_i , d_i , $i = \overline{1, m}$ — постоянные величины. Задачу обслуживания ДПТ можно решить, построив дихотомически граф альтернативных решений, оптимальному сечению которого соответствует оптимальный типоразмерный ряд КТС. Строится граф путем дихотомии поля требований [1]. Формализуем дихотомию, применяя метод интегральных стоимостных характеристик (ИСХ). Указанные характеристики — это зависимости затрат на разработку, производство и эксплуатацию КТС, определяемых m -мерным вектором \mathbf{x} , от данного вектора [2]. Пусть промежуточная ИСХ имеет вид

$$Q(\mathbf{x}) = A \exp \sum_{i=1}^m \alpha_i (x_i - c_i), \quad (2)$$

где A , α_i , c_i , $i = \overline{1, m}$ — постоянные положительные величины, а максимальная ИСХ —

$$R(\mathbf{x}) = B \exp \sum_{i=1}^m \beta_i (b_i - x_i), \quad (3)$$

где B , β_i , b_i , $i = \overline{1, m}$ — постоянные положительные величины. В выражениях (2), (3) они подобраны так, что при $x = d$ ИСХ равны. Суммарная стоимость обслуживания ДПТ $S(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})$ (4).

Задача оптимальной дихотомии — найти вектор \mathbf{X}^* , минимизирующий целевую функцию (4) при ограничениях (1).

Рассмотрим наиболее ценный с практической точки зрения случай, когда все величины β_i/α_i , $i = \overline{1, m}$ разные. Система уравнений, выражающих необходимые условия экстремума, несовместна. Следовательно, экстремум функции (4) может находиться лишь на ребрах гиперпараллелепипеда (1). На ребре x_j , $j = \overline{1, m}$ функция (4) принимает вид

$$S_j(x_j) = A \exp \sum_{i \neq j} \alpha_i (x_i - c_i) \exp [a_j (x_j - c_j)] + B \exp \sum_{i \neq j} \beta_i (b_i - x_i) \exp [\beta_j (b_j - x_j)]. \quad (5)$$

Функция (5) — сумма выпуклых функций. Поэтому она выпукла. Следовательно, на каждом из $m2^{m-1}$ ребер гиперпараллелепипеда (1) существует лишь один экстремум функции (4), который

является минимумом. Используя необходимое условие экстремума, получаем

$$x_j^* = \{ \alpha_j c_j + \beta_j b_j + \ln [(\beta_j B) / (\alpha_j A)] + \sum_{i \neq j} [\beta_j (b_i - x_i) - \alpha_i (x_i - c_i)] \} / (\alpha_j + \beta_j); \quad (6)$$

$$S_j(x_j^*) = B \exp \{ [\beta_j \sum_{i \neq j} \alpha_i (x_i - c_i) + \alpha_j \sum_{i \neq j} \beta_i (b_i - x_i) + \alpha_j \beta_j (b_j - c_j)] / (\alpha_j + \beta_j) [(\beta_j B) / (\alpha_j A)]^{-\beta_j / (\alpha_j + \beta_j)} (\beta_j / \alpha_j + 1) \}. \quad (7)$$

Алгоритм оптимальной дихотомии динамического поля требований состоит в следующем. 1. Осуществляем перебор всех ребер гиперпараллелепипеда (1), для каждого ребра вычисляем значение параметра (6). 2. Если величина (6) удовлетворяет соотношению (1), вычисляем целевую функцию по формуле (7). 3. Если величина (6) не удовлетворяет соотношению (1), находим значение целевой функции (4) в вершинах, которые соединяются этим ребром, и выбираем наименьшее значение. 4. Оптимально значение вектора параметров, соответствующее ребру, на котором достигается наименьшее значение целевой функции.

Список литературы: 1. Дабагян А. В. Оптимальное проектирование машин и сложных устройств. — М.: Машиностроение, 1979. — 280 с. 2. Дабагян А. В., Макаренко А. В. Построение оптимального типоразмерного ряда КТС с учетом его изменения на протяжении планового периода. — В кн.: Математические методы кибернетики. Киев, 1979, с. 30—40.

Поступила в редколлегию 03.01.81.

УДК 62—50

И. В. КОНОНЕНКО, канд. техн. наук,
Е. А. ГОРОХОВА

ИДЕНТИФИКАЦИЯ В УСЛОВИЯХ ПОМЕХ С НЕИЗВЕСТНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Проблеме помехоустойчивой идентификации уделяется много внимания. Признан хуберовский минимаксный подход [1]. Менее известны помехоустойчивые (робастные) методы оценивания, предложенные и проанализированные в монографии [2]. Особого отношения заслуживает трехпараметрическое семейство M -оценок, определяемых как

$$\hat{M}[\Xi_i] = \arg \min_M \sum_{i=1}^N F \left(\frac{\Xi_i - M[\Xi_i]}{S} \right);$$

$$F'(\xi) = \text{sign } \xi \begin{cases} |\xi|, & 0 \leq |\xi| < a, \\ a, & a \leq |\xi| < b; \\ \frac{c - |\xi|}{c - b} a, & b \leq |\xi| < c; \\ 0, & |\xi| \geq c, \end{cases}$$

где $\xi = \frac{\Xi_i - M[\Xi_i]}{S}$; $\hat{M}[\Xi_i]$ — оценка математического ожидания $M[\Xi]$ случайной последовательности Ξ_i , $i = \overline{1, N}$, $F(\xi)$, $F'(\xi)$ — функция потерь и ее производная; a , b , c — параметры функции потерь; S — медиана абсолютного отклонения от M_e ; M_e — медиана случайной последовательности Ξ_i . Данное семейство оценок (с различными a , b и c) предложено Ф. Хампелем для оценивания математического ожидания случайных последовательностей. В работе [2] проведен сравнительный анализ 65 различных методов оценивания, включая методы наименьших квадратов, наименьших модулей, Хубера и др. Сравнение методов осуществлялось на выборах размером 5, 10, 20, 40 для 30 законов распределения. Чтобы выбрать метод, пригодный для оценивания в условиях незнания закона распределения помех, применялся максиминный подход. Среди методов оценивания, дающих хорошую эффективность для нормального и на 5% испорченного нормального законов распределения выбирали тот, который дает максимальную эффективность на наихудшем для каждого метода законе распределения. Методы оценивания 12А—25А, АДА и некоторые другие обладают наилучшими свойствами на всех рассмотренных законах распределения. Параметры функции потерь следующие: 25А ($a=2,5$, $b=4$, 5 , $c=9$, 5); 22А ($a=2$, 2 , $b=3$, 7 , $c=5$, 9); 21А ($a=2$, 1 , $b=4$, 0 , $c=8$, 2); 17А ($a=1$, 7 , $b=3$, 4 , $c=8$, 5); 12А ($a=1$, 2 , $b=3$, 5 , $c=8$, 0); АДА ($a=\text{АДА}$, $b=4$, 5 , $c=8$, 0);

$$\text{АДА} = \begin{cases} 1,0, & L \leq 0,44; \\ (75L - 25) \cdot 8, & 0,44 < L < 0,6; \\ 2,5, & 0,6 \leq L; \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{K} \sum_{|\Xi_i - M_e| > S} \frac{S}{|\Xi_i - M_e|},$$

где K — количество точек i , для которых выполняется условие $|\Xi_i - M_e| > S$.

Методы оценивания Ф. Хампеля мы применили для решения задачи идентификации параметров модели $\varphi(A, X_i)$, линейной относительно параметров A , где $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$; $X_i = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ — вектор аргументов. При этом

$$A = \arg \min_A \sum_{i=1}^N F(|Y_i - \varphi(A, X_i)|/S).$$

Здесь Y_i — наблюдаемая последовательность $Y_i = \varphi(A, X_i) + \Xi_i$; Ξ_i — случайный шум с неизвестным законом распределения;

$$F(\xi) = \begin{cases} \xi^2/2, & 0 \leq |\xi| < a; \\ a|\xi| - a^2/2, & a \leq |\xi| < b; \\ \frac{a}{2} \left(c + b - a - \frac{c - |\xi|}{c - b} \right); & b \leq |\xi| < c; \\ \frac{a}{2} (c + b - a), & |\xi| \geq c; \end{cases}$$

S — робастный масштаб, который используется с целью нормировки отклонений $Y_i - \varphi(A, X_i)$. Нормировка с помощью масштабного коэффициента S позволяет получить оценки, инвариантные по отношению к дисперсии случайной помехи. После нормировки для помехи любой интенсивности производится следующее ранжирование отклонений от $\varphi(\hat{A}, X_i)$, где \hat{A} — оценка вектора A : 1) отклонения меньше уровня a , S учитываются по квадратичной функции потерь, 2) отклонения больше или равные aS и меньше bS учитываются по линейной функции потерь, 3) любые отклонения равные или превышающие cS считаются эквивалентными и вносят равный вклад в функцию потерь.

Таким образом, масштаб S показывает степень учета отклонений при оценивании коэффициентов модели. В нашем случае масштабный коэффициент S определялся как медиана абсолютного отношения наблюдений от оценки модели $\varphi(A, X_i)$, полученной по методу наименьших модулей, т. е. $S = M_e[|Y_i - \varphi(\hat{A}', X_i)|]$, где \hat{A}' — оценка истинного значения вектора параметров A по методу наименьших модулей.

Функция, имеющая непрерывные вторые частные производные, выпукла в том и только в том случае, если гессиан H является положительно полуопределенной функцией. Для нашей целевой функции при $n=2$ получим

$$H = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{1}{S^2} F''(\xi_i) x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^N \frac{1}{S^2} F''(\xi_i) x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^N \frac{1}{S^2} F''(\xi_i) x_{2i} x_{1i} & \sum_{i=1}^N \frac{1}{S^2} F''(\xi_i) x_{2i}^2 \end{bmatrix};$$

$$F''(\xi_i) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\xi_i| < a; \\ 0, & a \leq |\xi_i| < b; \\ -a/(c-b), & b \leq |\xi_i| < c; \\ 0, & |\xi_i| \geq c, \end{cases}$$

т. е. условие непрерывности вторых частных производных не выполняется.

Знак первого минора не определен, он зависит от невязок ξ_i , $i=1, \bar{N}$, попавших в интервал $(b, c) \vee (-c, -b)$. Следовательно, говорить о положительной полуопределенности матрицы Гессе и выпуклости целевой функции невозможно.

Предполагая наличие более одной стационарной точки у $\sum_{i=1}^N F(\xi_i)$, воспользуемся для поиска $\min_A \sum_{i=1}^N F(\xi_i)$ методом случайного блуждающего поиска глобального экстремума в сочетании с адаптивным градиентным методом, предназначенным для поиска локальных минимумов.

В качестве первого приближения для A принимаем оценку \hat{A}' , определенную по методу наименьших моделей. Такой подход оправдан устойчивостью оценок, найденных по методу наименьших модулей, в классе невырожденных плотностей [1]. Численные результаты указывают на высокую эффективность данного помехоустойчивого метода оценивания параметров моделей.

Список литературы: 1. Huber P. I. Robust estimation of a location parameter. — Ann. Math. Stat, 1964, 35, p. 73—101. 2. Robust estimates of location: survey and advances/D. F. Andrews, P. I. Bichel, F. R. Hampel e. a. — Princeton University Press, 1972. — 370 p.

Поступила в редколлегию 10.02.81

УДК 62—50

А. Н. СИРЕНКО, Н. Ю. ТУПАС

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

При идентификации сложных технико-экономических, технических и экономических систем часто возникает необходимость в получении аналитической зависимости между определяющими параметрами — аргументами и функцией. Обычно для этого используется метод наименьших квадратов или его модификации, например рекуррентная форма. В работах [1, 2] описана методика, позволяющая значительно упростить процедуру идентификации и аналитического представления экспериментально полученных зависимостей. В нашей статье предложен алгоритм, с помощью которого можно провести аналитическую аппроксимацию многомерных статистических функций. Алгоритм включает следующие этапы: 1) табличное представление исходных данных, 2) выделение аргументов, 3) получение точек, характеризующих изменение функции вдоль каждого аргумента, 4) аппроксимация составляющих методом наименьших квадратов, 5) вы-

числение среднеквадратичной ошибки аппроксимации. Аппроксимирующее выражение строится в виде

$$S^a(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \prod_{j=1}^n f_j^a(x_j). \quad (1)$$

Здесь функции $f_j^a(x_j)$ найдены при аппроксимациях методом наименьших квадратов функций одного переменного $f_j(x/j_i)$, которые получаем при решении системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} f_j(x_{ji}) = & \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_{j-1}=1}^{k_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=1}^{k_{j+1}} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} S(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots, x_{ni_n}) \times \\ & \times f_1(x_{1i_1}) f_2(x_{2i_2}) \dots f_{j-1}(x_{j-1i_{j-1}}) f_{j+1}(x_{j+1i_{j+1}}) \dots f_n(x_{ni_n}) / \times \\ & \sum_{i_1=1}^{k_1} [f_1(x_{1i_1})]^2 \sum_{i_2=1}^{k_2} [f_2(x_{2i_2})]^2 \dots \sum_{i_{j-1}=1}^{k_{j-1}} [f_{j-1}(x_{j-1i_{j-1}})]^2 \sum_{i_{j+1}=1}^{k_{j+1}} \\ & \times (x_{j+1i_{j+1}})]^2 \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} (f_n(x_{ni_n}))^2, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

где $S(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots, x_{ni_n})$ — табличная функция исходных данных; x_{ji} — j -й аргумент, принимающий k_j дискретных значений ($i_j = 1, 2, \dots, k_j$). Решать такую систему удобно методом последовательных приближений [2]. Расчеты на цифровой ЭВМ показали, что решение системы (2) можно получить при незначительном числе итераций, что обеспечивает небольшие затраты машинного времени. Аппроксимация полученных в результате решения системы (2) функций одного переменного методом наименьших квадратов трудностей не вызывает.

Оценим работоспособность предлагаемой методики на конкретном примере. Для этого возьмем статистическую функцию, зависящую от двух переменных

$$S = S(x_1, x_2), \quad (3)$$

где аргумент x_1 принимает значения $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{15}$, а аргумент x_2 — $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{24}$. Аппроксимирующее выражение будем искать в виде полинома.

В результате применения классического метода наименьших квадратов [3] получено аппроксимирующее выражение

$$S_1^a(x_1, x_2) = A_1 x_{11}^a x_{21}^a. \quad (4)$$

Применяя предлагаемый алгоритм, имеем

$$S_2^a(x_1, x_2) = A_2 x_{112}^a x_{222}^a. \quad (5)$$

Программная реализация обоих методов проведена на языке АЛГОЛ-60. Проанализируем результаты. На рис. 1 приведены функции

$$\Delta_1(x_1, x_2) = S(x_1, x_2) - S_1^a(x_1, x_2), \quad (6)$$

на рис. 2 — функции

$$\Delta_2(x_1, x_2) = S(x_1, x_2) - S_2^a(x_1, x_2). \quad (7)$$

Сравнив выражения (6), (7), придем к следующим выводам. Аппроксимирующее выражение, полученное по классическому ме-

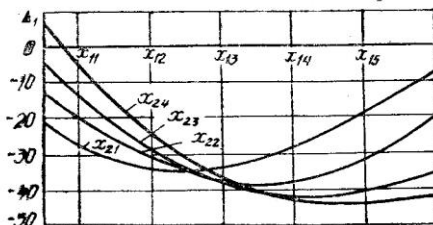


Рис. 1

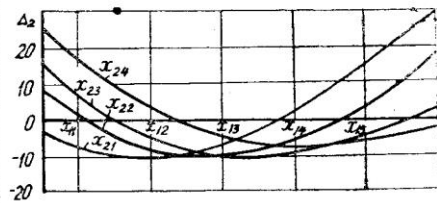


Рис. 2

тоду наименьших квадратов, приближает функцию (3) с некоторым неучтенным весом, чего не наблюдается при использовании рекомендуемой методики. Функция (5) обеспечивает среднеквадратичную ошибку аппроксимации примерно в 10 раз меньшую, чем функция (4).

Список литературы: 1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.— М.: Наука, 1965.— 474 с. 2. Эгерман И. П. Математические машины непрерывного действия.— М.: Машгиз, 1957.— 234 с. 3. Дабагян А. В. Оптимальное проектирование машин и сложных устройств.— М.: Машиностроение, 1970.— 280 с.

Поступила в редколлегию 11.12.89.

УДК 656

Н. В. ТКАЧУК, канд. техн. наук

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ ДАНЫХ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДИАЛОГОМ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Общепризнанной компонентой систем автоматизированного проектирования (САПР) является развитое программное обеспечение, предполагающее диалоговое взаимодействие проектировщика с ЭВМ [1]. В статье представлена одна из возможных

математических моделей структуры данных, предназначенная для реализации диалогового режима в САПР. Модель отвечает основным требованиям, вытекающим из качественного анализа общих характеристик процесса проектирования и его отдельных этапов [2]: а) альтернативному характеру процесса, причем не все решения могут быть заранее формализованы, что требует наличия возможности оперативного вмешательства проектировщика; б) иерархическому характеру отношений между различными этапами процесса проектирования; в) итерационному характеру поиска конструкторских решений, при котором на каждом этапе существует некоторое множество вариантов, уточняемых или отвергаемых после соответствующего анализа и проверки.

Адекватную этим требованиям модель структуры данных предлагается рассматривать как упорядоченное множество (кортеж) следующих формальных объектов [2]: $\Sigma = \{E, S, F, P, \sigma, \gamma\}$ (1); где E — конечное множество структурных элементов, посредством которых могут быть выражены все параметры и характеристики проектируемого изделия, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $n \in \Gamma^+$ (2); S — конечное множество классов, на которые по одному или совокупности признаков могут быть распределены структурные элементы и структурные формы, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, $m \in \Gamma^+$ (3); F — конечное множество структурных форм, которые понимаются как некоторые упорядоченные совокупности структурных элементов и (или) классов, $F = \{f_1, f_2, \dots, f_l\}$, $l \in \Gamma^+$ (4); $F \subseteq \bigcup_i (E \cup S)^{(i)}$, $i \in \Gamma^+$ (5); P — конечное множество предикатов, понимаемых здесь как — мерные логические функции, определенных на множестве D_p , $P = \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$, $t \in \Gamma^+$ (6), $D_p = E \cup S \cup F$ (7); σ — некоторое биективное отображение, задающее соответствие между элементами множеств E, F, S , $\sigma: (E \rightarrow S) \cup (F \rightarrow S) \cup (S \rightarrow S)$ (8); γ — биективное отображение, задающее соответствие предикатов из множества P элементам множеств E и S , $\gamma: (P \rightarrow E) \cup (P \rightarrow S)$ (9).

Теперь формальное выражение (1) можно рассматривать как некоторую контекстно-зависимую грамматику порождения описания конструируемого объекта. Процесс построения отдельного экземпляра описания начинается с фиксирования некоторого исходного класса $s_0 \in S$, который представляет проектируемое изделие на низшем уровне детализации. Описание строится путем пошаговой декомпозиции, при которой формальные классы из множества S , начиная с s_0 , замещаются соответствующими структурными формами или структурными элементами. Процесс проводится иерархически на различных уровнях декомпозиции порождаемого описания и регламентируется отображениями σ и γ . Отображение σ выделяет некоторое подмножество принципиально возможных правил постановки из выражения (8) для данного формального класса $s_i \in S$, обеспечивая тем самым по-

строение синтаксически правильного экземпляра описания. Отображение γ определяет посредством оценки упорядоченных им предикатов (9) условия выбора конкретного правила подстановки для данного $s_i \in \mathcal{S}$, учитывая контекстные условия построения экземпляра описания конструируемого изделия (например, зависимости между параметрами технического задания, технологические ограничения и т. д.).

Полученная таким образом модель структуры данных (1) — (9) обладает существенными преимуществами: а) пользователь САПР получает возможность в режиме диалога последовательно и иерархически манипулировать проблемными данными, что ускоряет время доступа к ним и способствует их защите; б) соответствующая диалоговая подсистема САПР берет на себя выполнение дополнительных по сравнению с пакетным режимом функций по поддержке процесса проектирования, так как становятся возможными проверка структурных соотношений и автоматическая коррекция данных.

Рассмотренная модель успешно применялась в процессе разработки и реализации диалоговой подсистемы для автоматизации проектирования оболочек вращения [3].

Список литературы: 1. Саар Х. Я. Об интерактивных системах инженерного проектирования.— Программирование, 1977, № 2, с. 46—54. 2. Herrlich O., Tkatschuk N. Einige Besonderheiten der Strukturierung von Daten und Programmen für die rechnergestützte Proektierung und Konstruktion von technischen Objekten.—IX Internationaler Kongreß über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, Weimar (DDR), 28. Juni bis 4. Juli 1981, Programm, S. 8. 3. Tkatschuk N. Eine Methodik zum Entwurf und zur Implementierung der Dialoggestaltung im rechnerunterstützten Konstruktionprozeß.—Diss., Technische Universität Dresden, 1981.—127 S.

Поступила в редколлегию 11.12.81.

УДК 658.012

С. А. САФРОНЕНКО, Е. Ю. ФОМИНА,
В. Г. БАЖЕНОВ, канд. техн. наук,
А. И. ЯРОХ, канд. техн. наук

ИНФОРМАЦИОННОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ НОРМАТИВОВ

Переход к интенсивным методам хозяйствования требует повышения эффективности использования материальных и энергетических ресурсов на предприятиях, в объединениях, министерствах. В связи с этим создаются автоматизированные системы материальных нормативов (АСН), которые позволяют решать задачи анализа и нормирования расхода материальных и топливно-энергетических ресурсов и основать постоянно действующую

щий фонд нормативной информации. Центральным звеном этих разработок является создание отраслевых банков данных о расходе сырья, материалов и электроэнергии на производство продукции.

На информационно-логическом уровне показатель представляется совокупностью наименования, набора признаков, уточняющих экономический смысл показателя, и численного значения. Каждый признак имеет множество значений, сведенных в списки. Позиции списка могут находиться в классификационных отношениях. Система списков для каждого признака составляет основу лексики информационного языка, в терминах которого может быть выражен смысл любого показателя. Схема базы данных на концептуальном уровне представляется отношениями двух типов. Первый тип — бинарные отношения, кортежи которых определяют значения конкретного признака описания показателя. Один домен отношения является первичным ключом и служит для однозначной идентификации каждой записи, другой — для текстового наименования позиции признака.

Второй тип — отношения, описывающие показатели базы данных. Каждый показатель представляется значением и набором признаков. Ключ отношения — совокупность ключей признаков, однозначно определяющих значение показателя. Число отношений второго типа зависит от числа структур показателей. Концептуальная схема базы данных для удобства использования специалистами разных профилей представляется в табличной форме. Такая форма удобна для использования и открыта для модификации и расширения, корректировки и развития. Подобный подход обеспечивает необходимую независимость от конкретно используемой СУБД, а также простоту перехода от табличных к иерархическим или сетевым структурам. Рациональны, однако, максимальное упрощение и отказ от сложных иерархических и сетевых структур, описание базы данных в форме отношений, дающее возможность реализовать впоследствии неструктурированные схемы баз данных. При этом достигаются большая эффективность функционирования системы, независимость программ от возможных изменений и расширений в схеме базы данных. В процессе реализации базы данных АСН описанной схемы выбрана СУБД сетевого типа «БАНК-ОС». Отношения в концептуальной схеме представлены неструктурированными записями с прямым доступом, осуществляемым заданием значений ключевых полей. Реализованные на уровне представления схемы идеи реляционного подхода обеспечивают достаточную независимость и целостность базы данных.

Представляют интерес реализованные в системе средства обработки данных, в частности ввод в базу данных, доступ к записям. При обработке потоков входной информации неограниченное многообразие форм ее представления требует расщепления входного документа на отдельные показатели, идентифика-

ции и ввода последних в базу данных. Для решения поставленной задачи в рамках АСН предложены средства формализации, автоматизирующие преобразование показателей из формата документа в структуру, необходимую для ввода в базу данных.

Пусть $R1, R2, R3$ — отношения, задающие значения признаков: общих для всего документа (x_1, x_2, \dots, x_i в $R1$), общих для строки документа ($x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k$ в $R2$), общих для столбца документа ($x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_l$ в $R3$). Домены $R2\#, R3\#$ определяют номер строки и столбца. Значения a_1, a_2, b_1, b_2 выбираются из соотношений $a_1, a_2 \in R3\#, b_1, b_2 \in R2\#$. Процедура преобразования показателей документа в записи для ввода в базу данных формируется так. Задаем множество типов структур показателей $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$, к которым необходимо привести показатели входного документа. Каждой структуре однозначно соответствует набор признаков из множеств $R1, R2, R3$. С группой показателей, расположенной в границах $(a_1 \leq R3\# \leq a_2) \wedge (b_1 \leq R2\# \leq b_2)$, однозначно связан тип структуры θ_l . Тогда выходное соотношение запишется в виде

$$\theta_l (R1.x_1, \dots, R1.x_i, R2.x_{i+n}, \dots, R2.x_{i+m}, R3.x_{k+p}, \dots, R3.x_{k+q}) : (a_1 \leq R3\# \leq a_2) \wedge (b_1 \leq R2\# \leq b_2).$$

Описанная процедура преобразования данных из структуры документа в структуру файла является основой автоматизации программирования процедур обработки исходных документов для ввода в базу данных. Средства автоматизации включают набор формальных параметров и макрогенератор компилирующего типа. Формальные параметры описывают структуру конкретного документа и выходных записей на основе заданных отношений и формулы формирования результирующей структуры. Параллельно процессу формирования записей для загрузки в базу данных генерируются процедуры контроля исходных данных.

Операцию выборки показателей формально можно представить в виде $GET\theta(\theta_l.Z) : \theta_l.X1\# = n_1 \wedge \theta_l.X2\# = n_2 \wedge \dots \wedge \theta_l.XN\# = x_n$.

Результатом выборки является отношение θ , содержащее одно значение Z при запросе по полному набору признаков x_1, x_2, \dots, x_n для θ_l . В случае неполного набора признаков выбирается несколько значений Z , удовлетворяющих запросу. Определяя порядок изменения признаков в соответствии с последовательностью записи параметров при генерации, получаем набор значений показателей, упорядоченный в соответствии с определенным алгоритмом. Трансформируя отношение θ в бинарное, тернарное и т. д., получаем матрицы значений показателей для практического использования в прикладных задачах. Описанная процедура выборки непосредственно адаптируется имеющимися средствами языков программирования и СУБД иерархического и сетевого типа.

Поступила в редколлегию 14.12.81.

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, д-р техн. наук,
Э. А. ПИКУР, канд. техн. наук,
В. П. СЕВЕРИН

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ, НЕ ИСПОЛЗУЮЩИХ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Целевые функции, характеризующие качество динамических систем высокого порядка, — это сложные функции варьируемых параметров, не допускающие аналитического задания производных. Как правило, время, необходимое для вычисления этих функций на цифровой ЭВМ, велико. Поскольку в большинстве методов многомерной оптимизации применяются методы одномерной минимизации, необходимо разработать эффективные алгоритмы одномерной минимизации, не использующие аналитические производные, и дать рекомендации по их применению для конкретного вида целевой функции.

Большинство алгоритмов одномерной минимизации состоит из двух частей: поиска интервала, содержащего минимум, с помощью нескольких возрастающих шагов по независимой переменной и сужения этого интервала [1].

Эффективным методом сужения интервала, содержащего минимум, является метод золотого сечения, который основан на разбиении интервала $[x_1, x_4]$ с помощью дроби Фибоначчи $F = (\sqrt{5}-1)/2$ точками $x_2 = x_4 - F(x_4 - x_1)$, $x_3 = x_1 + F(x_4 - x_1)$ на три части и отбрасывании той крайней части, которая не содержит минимум. Численные эксперименты показали [1], что погрешность представления дроби Фибоначчи в памяти цифровой ЭВМ и ошибки округления при вычислениях могут привести к потере интервала, содержащего минимум. Это произойдет, если на k -й итерации будет нарушено условие $x_2^{(k)} < x_3^{(k)}$. Авторами получено ограничение на количество итераций, при котором заведомо сохраняется интервал, содержащий минимум

$$k < [\lg |\varepsilon| + \lg(2F + 1)] / \lg F - 2,$$

где ε — погрешность задания дроби Фибоначчи в ЭВМ. Для задания дроби Фибоначчи с двумя значащими цифрами [2] $k < 6$, девятью [1] $k < 41$, двенадцатью $k < 52$. Поэтому следует задавать дробь Фибоначчи в алгоритме золотого сечения с максимально возможной точностью. При $k = 52$ интервал уменьшается более чем в 10^{11} раз, что вполне достаточно для практических вычислений.

Количество вычислений функции для определения минимума в заданном интервале по алгоритму золотого сечения не зависит от вида минимизируемой функции. Чаше более эффективны алгоритмы, основанные на многократной аппроксимации функции

полиномом и на интерполяции минимума функции в точке минимума аппроксимирующего полинома. Простейшая полиномиальная функция, имеющая экстремум,— полином второй степени

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (1)$$

Если $a_2 > 0$, то минимум достигается в точке

$$z = -0,5 a_1/a_2, \quad (2)$$

определяемой из условия $P_2'(z) = 0$. Три неизвестных коэффициента полинома (1), а следовательно, и положение минимума z (2), можно вычислить по трем точкам из системы линейных алгебраических уравнений

$$a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 = y_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

С обозначениями

$$p_1 = (x_2 - x_1)(y_3 - y_2), \quad p_2 = (x_3 - x_1)(y_1 - y_2) \quad (3)$$

выражение (2) примет вид

$$z = 0,5 [p_1(x_1 + x_2) + p_2(x_2 + x_3)] / (p_1 + p_2). \quad (4)$$

Формулы (3), (4) менее трудоемки, чем приведенные в работе [1].

Еще эффективнее алгоритмы кубической интерполяции по двум точкам и двум производным [3], по трем точкам и одной производной [4]. Возникает вопрос, будет ли алгоритм кубической интерполяции по четырем точкам без производных столь же эффективен? Для алгоритма кубической интерполяции полиномом

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

по условию экстремума в точке z

$$P_3'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 = 0$$

определяем экстремальные точки

$$z_{1,2} = (-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3}) / (3a_3).$$

Из двух найденных значений z условию минимума $P_3''(z) = 2a_2 + 6a_3z > 0$ удовлетворяет только одно —

$$z = (\sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3} - a_2) / (3a_3). \quad (5)$$

Коэффициенты кубического полинома можно определить по четырем точкам при решении системы линейных алгебраических уравнений $a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 = y_i$, $i = \overline{1,4}$. Применяя правило Крамера, получаем $a_1 = D_1/D$, $a_2 = D_2/D$, $a_3 = D_3/D$, где D , D_1 , D_2 , D_3 — соответствующие определители системы. Если ввести обозначения

$$p_1 = y_1(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3), \quad p_2 = y_2(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_4 - x_3);$$

$$p_3 = y_3(x_2 - x_1)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2), p_4 = y_4(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2);$$

$$q_1 = x_1 + x_2, q_2 = x_3 + x_4, r_1 = x_1x_2, r_2 = x_3x_4,$$

то

$$D = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3); D_1 =$$

$$= -p_1(q_2x_2 + r_2) + p_2(q_2x_1 + r_2) - p_3(z_1 + q_1x_4) + p_4(r_1 + q_1x_3);$$

$$D_2 = p_1(x_2 + q_2) - p_2(x_1 + q_2) + p_3(q_1 + x_4) - p_4(q_1 + x_3); D_3 =$$

$$= -p_1 + p_2 - p_3 + p_4.$$

Учитывая, что при $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ $D > 0$, минимум (5) определяется выражением

$$z = (\sqrt{D_2^2 - 3D_1D_3} - D_2)/(3D_3).$$

Алгоритмы золотого сечения, квадратичной и кубической интерполяции были исследованы при минимизации следующих тестовых функций:

- 1) $y = x^2$; 2) $y = x^4$; 3) $y = 0,25x^2(x+3)$; 4) $y = [x - 1,25 + 1,5625/(x+1,25)]/4,25$; 5) $y = \{-0,1x$ при $x < 0$, x при $x \geq 0\}$.

Все эти функции имеют равный нулю минимум при $x^* = 0$. Минимизация начиналась из точки $x^{(0)} = -1$. Кубической интерполяции была предпослана одна итерация квадратичной интерполяции. Результаты минимизации приведены в табл. 1. На их ос-

Таблица 1

№ тестовой функции	Погрешность по аргументу	Погрешность по функции	Количество вычислений функции		
			Золотое сечение	Интерполяция	
				квадратичная	кубическая
1	0	0	61	5	5
2	$9 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-9}$	15	8	9
2	10^{-4}	0	26	8	—
3	$9 \cdot 10^{-7}$	0	35	12	6
4	$5 \cdot 10^{-6}$	0	33	28	11
5	10^{-2}	10^{-3}	11	25	15
5	$5 \cdot 10^{-11}$	10^{-11}	52	93	—

новании можно сделать следующие выводы. Метод золотого сечения позволяет определять минимум любой функции с машинной точностью и одинаково эффективен для всех функций. Он эффективнее интерполяционных методов для функции 5), которая обладает ярко выраженной асимметрией в любой сколь угодно малой окрестности точки минимума. Метод квадратичной интерполяции позволяет определять минимум с погрешностью порядка 10^{-7} — 10^{-8} и особенно эффективен для функций 1) — 2),

график которых симметричен относительно прямой $x=x^*$. Метод кубической интерполяции позволяет определять минимум с погрешностью 10^{-2} — 10^{-3} и эффективнее метода квадратичной интерполяции для функций 3)–5), которые асимметричны относительно прямой $x=x^*$.

В алгоритмах многомерной минимизации, где допускается погрешность одномерной минимизации по аргументу порядка 10^{-3} [1], каждый из рассмотренных методов может оказаться эффективнее других в зависимости от конкретного вида функции. Например, в табл. 2 приведены количества вычислений тес-

Т а б л и ц а 2

Метод одномерной минимизации	Метод многомерной минимизации				
	Полака-Рибьера	Девидона-Флетчера-Пауэлла	Гольдфарба	Ньютона	Пауэлла
Золотое сечение	370	373	373	299	589
Квадратичная интерполяция	243	243	221	170	267
Кубическая интерполяция	148	139	139	144	205

товой функции Розенброка [1] при ее минимизации различными методами до определения минимального значения с погрешностью 10^{-6} . Данные табл. 2 позволяют заключить, что для полиномиальных функций типа функции Розенброка эффективнее применять алгоритм кубической интерполяции.

Список литературы: 1. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.— М.: Мир, 1975.— 534 с. 2. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход.— М.: Мир, 1974.— 376 с. 3. Fletcher R., Reeves C. M. Function minimization by conjugate gradients.— The Computer Journal, 1964, 7, № 2, p. 149—154. 4. Кураев А. А., Ковалев И. С., Колосов С. В. Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ.— Минск: Наука и техника, 1975. — 295 с.

Поступила в редколлегию 09.12.80.

УДК 62.505

П. И. ЗАХАРЕНКО,
Н. Г. КИРЕЕВ, канд. техн. наук

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА АНАЛИТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ

Постановка задачи: для объекта, описываемого уравнением $\dot{x} + f(x, t) = \varphi(x, t)u$ (1), требуется найти управление $F(u, x, t) = 0$, минимизирующее функционал

$$I = V_3(\mathbf{x}(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} Q(\mathbf{x}, t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{u}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{u} + \mathbf{u}_{\text{он}}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{u}_{\text{он}}) dt,$$

где f, φ, Q, V_3 — заданные непрерывные функции; t_1, t_2 — заданные моменты времени; \mathbf{k}^2 — заданная диагональная матрица с положительными постоянными элементами.

Из основной теоремы аналитического конструирования управления по критерию обобщенной работы [1, 2] следует, что искомое управление имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{он}} - \mathbf{k}^2 \varphi^T \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2)$$

где $V = V(\mathbf{x}, t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \mathbf{f}^T \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = -Q$$

при граничном условии $V_{t=t_2} = V_3$.

Алгоритм оптимизации управления с прогнозирующей моделью и его модификация. В работе [2] предложен метод определения функции $\partial V / \partial \mathbf{x}$ и, следовательно, управления (2).

В данном алгоритме управления за свободное движение объекта принимается движение при $\mathbf{u} = 0$, т. е. при отсутствии управления. Такое движение может очень сильно отличаться от реального управляемого движения объекта на интервале оптимизации и приводить в область пространства состояний, далекую от реально достигаемой. Это сказывается на точности определения управления. В данной работе предлагается «свободным» движением считать движение с некоторым наперед заданным управлением. В качестве такого управления можно взять либо априорно известное приближение оптимального управления, либо управление, вычисленное на предыдущем цикле оптимизации в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \Delta \mathbf{u}$, где \mathbf{u}^* — заданное управление.

Уравнение объекта (1) запишем следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) (\mathbf{u}^* + \Delta \mathbf{u}). \quad (3)$$

Так как $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — известная функция, которая не подвергается оптимизации, выражение (3) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \Delta \mathbf{u}, \quad (4)$$

где $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}^*$.

Уравнение (4) аналогично уравнению (1) и, следовательно, можно получить

$$\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{k}^2 \varphi^T \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{k}^2 \varphi^T \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}},$$

где $\partial V / \partial \mathbf{x}$ вычисляется на «свободном» движении:

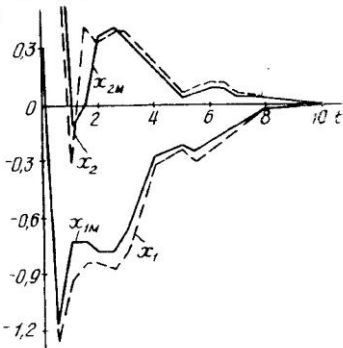
$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}^*.$$

Пример. Метод аналитического синтеза оптимального управления с помощью прогнозирующей модели и его модификация, предложенная в данной работе, реализованы для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \zeta_{1x}; \quad \dot{x}_2 = u - a_1 x_2 - a_2 x_1 + \zeta_{2x}; \quad \dot{a}_1 = \zeta_{1a}; \quad \dot{a}_2 = \zeta_{2a}; \\ z_1 &= x_1 + \zeta_{1z}; \quad z_2 = x_2 + \zeta_{2z} \end{aligned}$$

при $t_0=0$; $x_{10}=0,3$; $x_{20}=-10$; $a_{10}=1,1$; $a_{20}=0,1$. Здесь ζ_{1x} , ζ_{2x} , ζ_{1a} , ζ_{2a} , ζ_{1z} , ζ_{2z} — белые шумы с нулевым математическим ожиданием и с известными ковариационными матрицами S_x , S_a , S_z , S_{xz} , причем полагали, что белые шумы составляют 50% от соответствующих параметров. Переменные состояния системы и ее динамические параметры определяли при помощи системы одновременной идентификации и оценивания, описанной в работе [2].

Изменение переменных состояния системы при обычном управлении (x_1 , x_2) и при его модификации (x_{1M} , x_{2M}) показано на рисунке. Как видно из рисунка, модифицированный метод аналитического синтеза оптимального управления предпочтительнее, так как требуемое состояние ($x_1=x_2=0$) достигается быстрее и с меньшими отклонениями. Преимущество предлагаемой модификации особенно наглядно в тех случаях, когда оптимальное управление является квазипостоянным в течение некоторого времени либо когда известно некоторое приближенное значение оптимального управления. Продолжительность цикла управления Δt задается исходя из допустимой дискретности управления, интервала оптимизации и быстродействия управляющей ЭВМ.



Список литературы: 1. Красовский А. А. Аналитическое конструирование контуров управления летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1969. — 231 с. 2. Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. — М.: Наука, 1977. — 272 с. 3. Шендрик В. С. Синтез оптимальных управлений методом прогнозирующей модели. — Докл. АН СССР, 1975, № 3, с. 561—562.

Поступила в редколлегию 10.11.78.

А. Г. НИКУЛЬЧЕНКО

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ И СОКРАЩЕНИЯ ПОРЯДКА МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Постановка задачи: пусть имеется система, где переходный процесс описывается в общем случае выражением

$$\alpha(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \exp(-h_k t) \sin(\omega_k t + \psi_k). \quad (1)$$

Здесь $\alpha(t)$ — переходная функция в момент времени t . Значения h_k могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Переходный процесс такого вида соответствует линейной динамической системе, в характеристическом уравнении которой отсутствуют кратные корни. Система может быть устойчивой или неустойчивой в зависимости от значений h_k . Допустим, что известны значения переходной функции системы в дискретные равноотстоящие моменты времени, причем за интервал δt между измерениями функция меняется незначительно, что делает возможным численное интегрирование. Весь промежуток времени, на котором определяются значения переходной функции, может быть намного меньше времени затухания переходного процесса. Необходимо, задавшись порядком аппроксимирующей модели M , определить параметры переходной функции и передаточную функцию модели. Критерий близости модели к исходной системе — сумма квадратов ошибок между реакциями системы и модели в точках измерений.

Интегральный конечно-шаговый метод определения передаточной функции и сокращения порядка модели. Предлагаемый метод решения поставленной задачи представляет собой дальнейшее развитие конечно-шаговых методов идентификации*. Не останавливаясь на математическом обосновании метода, приведем основные формулы и соотношения.

Исходной информацией для интегрального конечно-шагового метода (ИКШМ) служат значения интегралов от измерений $\beta(t_i)$ ($t_0=0$; $t_i=t_{i-1}+\Delta t$), полученные на основе измерений $\alpha(t_j)$, $t_j=t_{j-1}=\delta t$, путем численного интегрирования. С помощью ИКШМ оценки искомых параметров вычисляются в темпе поступления информации, т. е. значений $\beta(t_i)$.

* *Голоскоков Е. Г., Никульченко А. Г., Фролов Ю. А., Шипулина Л. В. Конечно-шаговые методы идентификации равновесного положения САР.* — Киев: Ин-т кибернетики (Препринт — 80—9), 1980, с. 23—44.

Значение Λ_0 в выражении (1) вычисляется на P -м шаге алгоритма по следующим формулам:

$$\Lambda_{0p} = \frac{e_{Mp} + \sum_{i=0}^{M-1} z_{ip} e_{ip}}{2^{M+1} \Delta t P \left(1 + \sum_{i=0}^{M-1} z_{ip} \right)}; \quad (2)$$

$$\sum_{s=0}^{M-1} z_{sp} h_{isp} = g_{ip} \quad (i = \overline{0, M-1}), \quad (3)$$

где M — порядок модели (алгоритма);

$$e_{ip} = \sum_{j=1}^P \Delta_{ij}^{(M-1)} \quad (i = \overline{0, M-1}); \quad h_{isp} = f_{isp} - \frac{1}{P} e_{ip} e_{sp}$$

$$(s = \overline{0, M-1});$$

$$g_{ip} = \frac{1}{P} e_{Mp} e_{ip} - f_{iMp} \quad (i = \overline{0, M-1});$$

$$f_{isp} = \sum_{j=1}^P (\Delta_{sj}^{(M-1)} \Delta_{ij}^{(M-1)} + \xi_{sj}^{(M-1)} \xi_{ij}^{(M-1)}) \quad (s = \overline{0, M}).$$

Здесь $\Delta_{ij}^{(M-1)}$, $\xi_{ij}^{(M-1)}$ — сформированные соответствующим образом линейные комбинации интегралов от измерений*. Формулы (2) и (3) получены путем минимизации квадратичной функции невязок исходных уравнений метода. При этом z_{sp} — коэффициенты алгебраического уравнения

$$y^M + \sum_{s=0}^{M-1} y^s z_{sp} = 0,$$

решением которого являются значения $y_k = \cos(\omega_k \Delta t \pm j h_k \Delta t)$, позволяющие найти оценки частот ω_k и коэффициентов затухания h_k в исследуемом процессе. Оценки амплитуд A_{kp} и начальных фаз ψ_{kp} получают, применяя метод наименьших квадратов к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \beta(i \Delta t) = \Lambda_{0p} t_i + C - \sum_{k=1}^{m_1+m_2} [E'_k \exp(-h_{kp} i \Delta t) \sin(\omega_{kp} i \Delta t) + \\ + E''_k \exp(-h_{kp} i \Delta t) \cos(\omega_{kp} i \Delta t)] - \sum_{k=m_1+m_2+1}^m E_k \exp(-h_{kp} i \Delta t) \end{aligned} \quad (4)$$

$$(i = \overline{0, 2M+P}),$$

* См. указанную работу.

где $m_1 + m_2$ — число квазигармонических составляющих в формуле (1). Соотношение (4) представляет собой аналитическое выражение для интегралов от измерений, соответствующих процессу (1). Найдя по методу наименьших квадратов оценки $E'_{кр}$ и $E''_{кр}$, используем их для оценивания амплитуд A_{kr} и начальных фаз ψ_{kr} . Теперь, когда все параметры переходного процесса модели известны, ее передаточная функция $W(s) = L_n(s)s$, где $L_n(s)$ — изображение по Лапласу переходной функции.

Применение нового метода определения передаточной функции: для проверки работоспособности предложенного метода был идентифицирован переходный процесс

$$a(t) = R + A \exp(-ht) \sin(\omega t + \psi), \quad (5)$$

где $R=1$; $A=2$; $h=0,00225$; $\omega=0,01$; $\psi=\pi/2$.

Переходный процесс вида (5) соответствует линейной динамической системе, имеющей передаточную функцию

$$w(s) = 1 + \frac{2s(s + 2,258 \cdot 10^{-3})}{(s + 2,25 \cdot 10^{-3})^2 + 10^{-4}}. \quad (6)$$

При определении параметров передаточной функции системы по переходному процессу вида (5) полагали порядок модели M равным 4, интервал дискретности $\Delta t = 16$ с, шаг интегрирования $\delta t = 0,2$ с.

Уже на первом шаге рекуррентного алгоритма (что соответствует времени снятия измерений $t=144$ с) было получено выражение для идентифицируемого переходного процесса

$$z_M(t) = 1 + 2 \sin(0,01t + 1,57) \exp(-0,00225t) + 2,2 \cdot 10^{-10} \sin \times \\ \times (0,0228t - 1,288) \exp(0,00188t) \quad (7)$$

и значение передаточной функции

$$w_M(s) = 1 + \frac{2s(s + 2,258 \cdot 10^{-3})}{(s + 2,25 \cdot 10^{-3})^2 + 10^{-4}} - \\ - \frac{2,2 \cdot 10^{-10} s(s - 8,5 \cdot 10^{-3})}{(s - 1,88 \cdot 10^{-3})^2 + 5,2 \cdot 10^{-4}}. \quad (8)$$

Очевидно, первое и второе слагаемые в выражениях (7), (8) и (5), (6) соответственно равны. Последнее же слагаемое в формулах (7), (8) характеризует ошибки вычислений. Превышение порядка модели ($M=4$) над порядком ($N=2$) объекта необходимо для повышения точности алгоритма в условиях случайных погрешностей измерений и вычислений.

Таким образом, точное выражение для идентифицируемого переходного процесса и передаточной функции системы получено за время $t=144$ с, которое значительно меньше периода колебаний ($T=628$ с) и время затухания переходного процесса.

Поступила в редколлегию 04.12.80.

С. Д. ГЕРАСИМОВ

**ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ
ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

При решении ряда практических задач исследования многомерных динамических систем автоматического регулирования (САР) и задач оценки вектора состояния систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, приходится использовать на конечном этапе численные методы. Во многих случаях удобно применять с самого начала исследований разностный подход, для применения которого нужны уравнения САР в дискретном виде. Актуальность такого подхода определена наличием цифровой ЭВМ в замкнутом контуре управления.

В статье предложен новый метод вычисления дискретной переходной матрицы многомерной САР, основанный на теореме Кели — Гамильтона и позволяющий значительно сократить время вычислений на ЭВМ.

Известно [1], что непрерывную линейную стационарную динамическую систему, описываемую уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

можно преобразовать в дискретную систему, которой соответствуют уравнения

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k); \quad y(k) = Cx(k) + Du(k),$$

где $F = e^{AT}$, $G = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau$; T — период дискретизации. Матричная экспонента e^{AT} обычно вычисляется по формуле

$$e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k T^k / k!. \quad (1)$$

Недостаток этого способа в необходимости определения высоких степеней матрицы A , что удлиняет процесс вычисления на ЭВМ. Метод вычисления e^{AT} , описанный в работе [2], дает ощутимые погрешности за счет обращения после нескольких итераций одного из сомножителей в машинный нуль при значительной величине второго сомножителя. Предлагаемый метод вычисления e^{AT} основан на теореме Кели — Гамильтона, согласно которой каждая матрица A порядка n является корнем своего характеристического уравнения

$$q_0 + q_1\lambda + q_2\lambda^2 + \dots + q_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0. \quad (2)$$

При использовании этой теоремы e^{AT} можно найти с помощью лишь первых n степеней матрицы A . Вначале определяются первые n степеней матрицы A и их следы

$$R_k = \text{tr}(A^k), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

затем коэффициенты характеристического уравнения (2) по формулам

$$q_n = 1; \quad q_{n-k} = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k q_{n-k+i} R_i, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

По теореме Кели — Гамильтона

$$A^n = -q_0 I - q_1 A - \dots - q_{n-1} A^{n-1}, \quad (5)$$

где I — единичная матрица. Значит, A^{n+m} можно представить в виде

$$A^{n+m} = a_{0m} I + a_{1m} A + a_{2m} A^2 + \dots + a_{n-1,m} A^{n-1}.$$

Запишем $(n+m-1)$ -й член ряда (1):

$$\frac{T^{n+m-1}}{(n+m-1)!} A^{n+m-1} = c_{0,m-1} I + c_{1,m-1} A + \dots + c_{n-1,m-1} A^{n-1}. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{T^{n+m}}{(n+m)!} A^{n+m} &= [c_{0,m-1} A + c_{1,m-1} A^2 + \dots + c_{n-2,m-1} A^{n-1} + \\ &+ c_{n-1,m-1} (-q_0 I - q_1 A - \dots - q_{n-1} A^{n-1})] \frac{T}{n+m} = \\ &= c_{0m} I + c_{1m} A + \dots + c_{n-1,m} A^{n-1}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения получаем рекуррентную формулу для вычисления:

$$c_{0m} = -q_0 c_{n-1,m-1} T / (n+m); \quad c_{im} = (c_{i-1,m-1} - q_i c_{n-1,m-1}) \times \\ \times T / (n+m), \quad (7)$$

где $i=1, 2, \dots, n-1$; $m=2, 3, \dots$. Из уравнений (4) и (5) следует, что при $m=1$

$$c_{i0} = -q_i T^n / n!, \quad i=1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

Теперь для любого заданного T матричную экспоненту можно представить в виде

$$\begin{aligned} e^{AT} &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k T^k / k! = \sum_{k=0}^{n-1} A^k T^k / k! + \sum_{m=0}^{\infty} A^{n+m} T^{n+m} / (n+m)! = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k T^k / k! + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A^k c_{km} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left(\frac{T^k}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{km} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Итак, вместо матричного ряда (1) получены формулы (3), (4), (7)–(9) для вычисления матричной экспоненты. При определении e^{AT} по этим формулам для матриц пятого порядка время счета на ЭВМ по сравнению с выражением (1) уменьшается почти в два раза, а для матриц седьмого порядка — в три. Если порядок матриц выше, выигрыш во времени значительно больше. Предложенный алгоритм позволяет определять e^{AT} с любой заданной точностью.

Рассмотрим определение матрицы G . Очевидно, при постоянной матрице B вычисление G сводится к определению

$\int_0^T e^{A\tau} d\tau$. Так как

$$\int_0^T e^{A\tau} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \int_0^T \tau^k d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} A^k T^{k+1}/(k+1)!, \quad (10)$$

легко можно получить

$$\int_0^T e^{A\tau} d\tau = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left(\frac{T^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{m=0}^{\infty} d_{km} \right), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} d_{k0} &= -q_k T^{n+1}/(n+1)!; \quad d_{0m} = -q_0 d_{n-1,m-1} T/(n+m+1); \\ d_{km} &= (d_{k-1,m-1} - q_k d_{n-1,m-1} T/(n+m+1), \quad k=1, 2, \dots, n-1; \\ & \quad m=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, значение G можно найти по формулам (3), (4), (11), (12). Уменьшение времени счета по сравнению с выражением (10) такое же, как и для матричной экспоненты. Предлагаемый алгоритм наиболее эффективен в случае применения к нестационарным системам с медленно изменяющимися параметрами, ибо приходится вычислять матрицы F и G на каждом участке замораживания коэффициентов. Малое время вычисления позволяет использовать алгоритм для задач исследования САР в реальном масштабе времени.

Список литературы: 1. Кузовков Н. Т., Карабанов С. В., Салычев О. С. Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации.— М.: Машиностроение, 1978.—222 с. 2. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем.— М.: Мир, 1965.— 464 с.

Поступила в редколлегию 12.10.80.

В. В. КАРАЧУН, канд. техн. наук,
 В. С. ДИДКОВСКИЙ, канд. техн. наук,
 В. Н. КОЛОСОВ, канд. техн. наук,
 М. С. КОВАЛЕВ, канд. техн. наук

ГИРОСКОП НАПРАВЛЕНИЯ С АВТОКОМПЕНСАЦИЕЙ ВЛИЯНИЯ ПОМЕХ НА КАЧАЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ

Известно, что гироскоп направления на базе трехстепенного астатического гироскопа с качающимся основанием имеет систематический уход относительно обеих осей [1]. Уход достигает иногда нескольких десятков угловых минут за час работы. Посмотрим, можно ли уменьшить уход гироскопа направления с помощью двухканальной схемы автокомпенсации. Для этого вместо одного будем использовать два разновращающихся гироскопа с одинаковой кинематикой подвеса. В исходном положении оси подвеса параллельны. Выходной сигнал прибора формируется в виде полусуммы углов поворота обоих гироскопов относительно осей наружных рамок $-\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ [2]. Вводится также взаимная коррекция приборов по разности углов поворота относительно осей подвеса. Решение ищем методом последовательных приближений. В первом приближении гироскоп не имеет систематического ухода. Поэтому воспользуемся вторым приближением. Движение описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} A_1(\beta_{01}) p^2 \alpha_{21} - H_1 p \beta_{21} \cos \beta_{01} - k_{01}(\beta_{21} - \beta_{22}) &= -M_{12}; \quad B_1 p^2 \beta_{21} + \\ + H_1 p \alpha_{21} \cos \beta_{01} + k_{02}(\alpha_{21} - \alpha_{22}) &= M_{11}; \quad A_2(\beta_{02}) p^2 \alpha_{22} + H_2 p \beta_{22} \times \\ \times \cos \beta_{02} - k_{01}(\beta_{21} - \beta_{22}) &= -M_{22}; \\ B_2 p^2 \beta_{22} - H_2 p \alpha_{22} \cos \beta_{02} + k_{02}(\alpha_{21} - \alpha_{22}) &= M_{21}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A_i(\beta_{0i})$, B_i — моменты инерции; M_{ij} — возмущающие моменты; $H_1 \approx -H_2$ — кинетические моменты гироскопов; $k_{0i} = k_j k_{\text{дми}}$ — коэффициент передачи в цепях обратных связей.

Определим систематический уход гироскопа направления при двухкомпонентной гармонической качке [1] $\omega_{2x} = \rho \omega \sin \psi_0 \cos \times \times (\omega t + \varepsilon)$; $\omega_{2y} = \rho \omega \cos \psi_0 \cos (\omega t + \varepsilon)$. Колебания вокруг оси z могут иметь произвольную форму, если отсутствует трение в осях подвеса гироскопов. Ось z параллельна, а ось x перпендикулярна осям рамок. Формула для определения осредненного по времени систематического ухода во втором приближении

$$\langle \alpha_2 \rangle = (2\Delta)^{-1} C, \quad (2)$$

где Δ — определитель системы (1); C — постоянная составляющая правой части уравнения движения.

Таким образом, независимо от характера колебаний задача определения систематической составляющей увода основания сводится к выделению постоянных составляющих внешних возмущений M_{ij} . Удерживая наибольшие слагаемые, формулу (2) можно записать так:

$$\langle \dot{\alpha}_2 \rangle = [2k_{02} (H_1 \cos \beta_{01} + H_2 \cos \beta_{02})]^{-1} \Phi^2 \{ \{ k_{02} (H_1 \cos \beta_{01} + H_2 \cos \beta_{02}) \{ A_1 (\beta_{01})^{-1} H_1^2 (L_1^2 + L_2^2) \sin 2\beta_{01} [1 - R_1 \cos^2 \beta_{01} (2A_1 \times \\ \times (\beta_{01})^{-1}) - (A_2 (\beta_{02})^{-1} H_2^2 (L_3^2 + L_4^2) \sin 2\beta_{02} [1 - R_2 \cos^2 \beta_{02} \times \\ \times (2A_2 (\beta_{02})^{-1})] \} - [2A_1 (\beta_{01}) A_2 (\beta_{02})]^{-1} H_1 \cos \beta_{01} H_2 \cos \beta_{02} (L_1^2 + \\ + L_2^2 + L_3 + L_4) \{ R_1 \sin 2\beta_{01} (k_{01} + 2k_{02}) H_1 \cos \beta_{01} + k_{01} H_2 \times \\ \times \cos \beta_{02} \} + R_2 \sin 2\beta_{02} [k_{01} H_1 \cos \beta_{01} + (k_{01} + 2k_{02}) H_2 \cos \beta_{02}] \} \} \}, \\ \text{где } R_i - \text{ моменты инерции; } L_i = f(H_i; \beta_{0i}; \omega; A_i; k_{0i}); \Phi = \\ = \sin \psi_0 \rho \omega [\omega^4 (b - a\omega^2) + (f - d\omega^2)]^{-1}.$$

Формула (3) распространяется на случай полигармонической качки, если ее представить как сумму колебаний [1]:

$$\omega_{2x} = \sin \psi_0 \sum_{i=1}^n \rho_i \omega_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i); \quad \omega_{2y} = \cos \psi_0 \sum_{i=1}^n \rho_i \omega_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i).$$

Для наглядности рассмотрим числовой пример. Пусть $H_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $H_2 = 4,04 \cdot 10^{-1} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $\rho = 0,08 \text{ рад}$, $\omega = 0,8 \text{ Гц}$, $\beta_{01} = \beta_{02} = \pi/6$, $B_1 = 1,01 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $B_2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $R_1 = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $R_2 = 0,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $A_1 = 2,86 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $A_2 = 2,88 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $k_{01} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$, $L_3 = -L_1 = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н}^4 \cdot \text{м}^4 \cdot \text{с}^3$, $L_4 = -L_2 = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Н}^4 \cdot \text{м}^4 \cdot \text{с}^3$, $\Phi = 4 \cdot 10^{-24} \text{ Н} \cdot \text{м}^4 \cdot \text{с}^3$, $k_{02} = 2,05 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Тогда $\langle \dot{\alpha}_2 \rangle \approx 1,45 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}$. Напомним, что увод трехступенного гироскопа без автокомпенсации (для условий примера) составляет около $1,79 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}$, т. е. на два порядка больше.

Список литературы: 1. Луцк Я. Л. Ошибки гироскопических приборов. — Л.: Судостроение, 1968. — 231 с. 2. Одинцов А. А. Использование метода двухканальности для уменьшения влияния внешних помех на увод трехступенного гироскопа в кардановом подвесе. — Прикладная механика, 1974, 10, вып. 4, с. 99—106.

Поступила в редколлегию 14.02.81.

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим вопрос о возможности применения метода усреднения для исследования поведения автоколебательной системы при периодическом возмущении в нерезонансных зонах и зонах субгармонических резонансов, где происходит синхронизация частоты автоколебаний с частотой возмущающего воздействия. Типичным и важным примером такого рода является система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля с дополнительным членом, соответствующим вынуждающему воздействию. Изучению решений уравнения Ван-дер-Поля посвящено значительное число работ, однако лишь немногие авторы [1, 3] исследуют захватывание частоты автоколебаний на частотах субгармоник.

Нас интересует автоколебательная система, описываемая выражением

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = F \cos \omega t + F_0, \quad (1)$$

левая часть которого — уравнение Ван-дер-Поля, а правая — периодическое возмущение с постоянной составляющей. Решение уравнения (1) представим как сумму двух решений $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$, где частное решение $x_0(t)$ описывает свободные колебания, а $x_1(t)$ — вынужденные колебания.

Вынужденные колебания будем считать невозмущенным движением системы (1) и вне зоны основного резонанса определять соотношениями

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \omega t + B; \quad A^2 [(1 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2 (A^2 - 1)^2] = F^2, \\ &B = F_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Возмущенное движение описывается уравнением

$$\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + \mu(x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2 - 1)(\dot{x}_0 + \dot{x}_1) + x_0 + x_1 = F \cos \omega t + F_0,$$

которое при учете соотношений (2) преобразуется в следующее:

$$\ddot{x}_0 + \Omega^2 x_0 = (\Omega^2 - 1)x_0 - \mu(x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2 - 1)\dot{x}_0 - \mu(x_0^2 + 2x_0x_1)\dot{x}_1.$$

Здесь Ω — частота искомого периодического решения. В первом приближении примем

$$x_0(t) = a \cos(\Omega t + \psi); \quad \dot{x}_0(t) = -a\Omega \sin(\Omega t + \psi),$$

рассматривая a и ψ как медленно меняющиеся функции времени.

Согласно методу усреднения a и ψ удовлетворяют системе стандартных уравнений вида [2]

$$\frac{da}{dt} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega t} \int_0^t f(t, a, \psi) \sin(\Omega t + \psi) dt;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a\Omega t} \int_0^t f(t, a, \psi) \cos(\Omega t + \psi) dt,$$
(3)

где

$$f(t, a, \psi) = (\Omega^2 - 1) a \cos \theta + \mu (a^2 \cos^2 \theta + A^2 \cos^2 \omega t + B^2 + 2aA \cos \theta \cos \omega t + 2aB \cos \theta + 2AB \cos \omega t - 1) a \Omega \sin \theta + \mu (a^2 \cos^2 \theta + 2aA \cos \theta \cos \omega t + 2aB \cos \theta) A \omega \sin \omega t, \quad \theta = \Omega t + \psi.$$

Выполняя процедуру усреднения уравнений (3), имеем

$$\frac{da}{dt} = \mu \frac{a}{2} [1 - a^2/4 - A^2/2 - B^2 - \delta_{2n} AB \cos 2\psi + \delta_{3n} aA/4 \times \times \cos 3\psi];$$
(4)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1 - \Omega^2}{2\Omega} + \frac{\mu}{2} [\delta_{2n} AB \sin 2\psi - \delta_{3n} aA/4 \sin 3\psi]$$

($n = \omega/\Omega$; δ_{2n} , δ_{3n} — символы Кронекера).

Слагаемые уравнений (4), содержащие символы Кронекера δ_{2n} и δ_{3n} , получим в процессе усреднения, если предположить, что неизвестная частота периодического решения $x_0(t)$ принимает значение $\Omega = \omega/n$, где n — целое число. Так как Ω определяет частоту свободных колебаний системы (1), то она должна быть в то же время близкой к единице. Следовательно, решение $x_0(t)$, соответствующее колебаниям с частотой $\Omega = \omega/n$, существуют только при значениях ω , близких к n . Таким образом, уравнения (4) содержат слагаемые, которые появляются в области субгармонических резонансов порядка $1/2$ и $1/3$. Соотношения для амплитуды и фазы стационарных колебаний находим, приравнявая к нулю правые части уравнений (4). Последние допускают несколько стационарных режимов. При любой частоте возмущающего воздействия может иметь место тривиальное решение $a_0 = 0$, которому соответствует моногармонический режим вынужденных колебаний системы (1) с частотой ω . Нетривиальные решения системы (4) определяют почти периодические колебания, когда в зависимости от частоты возмущающего воздействия наряду с вынужденными наблюдаются автоколебания или

субгармонические колебания. Амплитудно-частотные характеристики стационарных решений системы (4) находят из следующих уравнений:

а) при автоколебаниях вне зоны синхронизации частот

$$1 - a_0^2/4 - A^2/2 - B^2 = 0, \quad \Omega = 1; \quad (5)$$

б) при субгармонических колебаниях порядка 1/2

$$1 - a_0^2/4 - A^2/2 - B^2 - AB \cos 2\psi_0 = 0;$$

$$\frac{1 - \Omega^2}{\Omega} + \mu AB \sin 2\psi_0 = 0; \quad \Omega = \frac{\omega}{2};$$

в) при субгармонических колебаниях порядка 1/3

$$1 - a_0^2/4 - A^2/2 - B^2 + a_0 A/4 \cos 3\psi_0 = 0;$$

$$\frac{1 - \Omega^2}{\Omega} - \mu a_0 A/4 \sin 3\psi_0 = 0; \quad \Omega = \omega/3.$$

Об устойчивости названных режимов колебаний в случае различной частоты возмущающего воздействия можно судить по уравнениям в вариациях:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{3}{4} a_0^2 - A^2/2 - B^2 - \delta_{2n} AB \cos 2\psi_0 + \delta_{3n} a_0 A/2 \times \right. \\ & \left. \times \cos 3\psi_0 \right) u + \frac{\mu a_0}{2} \left(\delta_{2n} 2AB \sin 2\psi_0 - \delta_{3n} \frac{3}{4} a_0 A \sin 3\psi_0 \right) v; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & -\frac{\mu}{2} \delta_{3n} A/4 \cos 3\psi_0 u + \frac{\mu}{2} \left(\delta_{2n} AB \cos 2\psi_0 - \delta_{3n} 3/4 a_0 A \times \right. \\ & \left. \times \cos 3\psi_0 \right) v, \end{aligned}$$

где $u = a - a_0$; $v = \psi - \psi_0$. Анализ уравнений (5) позволяет сделать следующие выводы. Моногармонический режим вынужденных колебаний устойчив, если выполняются условия

$$A^2/2 - B^2 + \delta_{2n} AB \cos 2\psi_0 > 1; \quad \delta_{2n} AB \cos 2\psi_0 < 0.$$

В противном случае в системе (1) самовозбуждаются автоколебания и устанавливается режим почти периодических колебаний. В нерезонансных зонах частота автоколебаний $\Omega = 1$, в областях субгармонических резонансов порядка 1/2 и 1/3 происходит синхронизация частоты Ω с частотами субгармоник возмущающего воздействия $\omega/2$, $\omega/3$, а из автоколебаний возникают субгармонические колебания. Амплитуды устойчивых субгармонических колебаний больше амплитуд автоколебаний, вы-

численных по формуле (5). Это условие определяет границы областей существования устойчивых субгармонических колебаний порядка $1/2$ и $1/3$.

Список литературы: 1. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания деформируемых систем.— Киев: Наук. думка, 1977.— 336 с. 2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.— 488 с. 3. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах.— М.: Мир, 1968.— 432 с.

Поступила в редколлегию 29.08.78.

УДК 62—50

П. А. КОВАЛЕНКО, Ю. И. ЗАЙЦЕВ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЛОСКИМ ДВИЖЕНИЕМ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ

Повышение производительности современных грузоподъемных машин ограничено ростом динамических нагрузок в упругих соединениях и раскачиванием груза, пространственное перемещение которого осуществляется путем совмещения работы отдельных механизмов крана. Груз при этом рассматривается как материальная точка, подвешенная на гибкой нити переменной длины. Считая отклонения маятника от положения равновесия малым, плоское движение модели можно описать системой дифференциальных уравнений:

$$m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha} = u_1 - m_{\alpha} g \quad (1); \quad m_{\alpha} \ddot{y}_{\alpha} = u_1 (y_T - y_{\alpha}) / (L_0 - x_{\alpha}) \quad (2);$$

$$m_T \ddot{y}_T = u_2 - \nu (m_T g + m_{\alpha} g) - u_1 (y_T - y_{\alpha}) / (L_0 - x_{\alpha}) \quad (3),$$

где m_{α} — масса груза; m_T — масса тележки; u_1 — усилие в канатах механизма подъема; u_2 — движущее усилие тележки; L_0 — начальная длина каната; ν — коэффициент трения качения тележки; g — ускорение свободного падения. Положение груза в плоскости характеризуется вертикальной координатой x_{α} и горизонтальной y_{α} . Тележка совершает прямолинейное движение с горизонтальной координатой y_T .

Для объекта, фазовое состояние которого описывается системой уравнений (1) — (3), ставится задача определить законы оптимального изменения $u_1(t)$, $u_2(t)$, переводящих его из начального состояния $z_0 = (x_{\alpha} = x_{\alpha} = y_{\alpha} = y_{\alpha} = y_T = y_T = 0)$ в конечное $z_1 = (x_{\alpha} = a, \dot{x}_{\alpha} = \dot{y}_{\alpha} = y_T = 0, y_{\alpha} = y_T = b)$ за минимальное время. На изменение управляющих параметров и фазовых переменных объекта наложены ограничения

$$u_1^-(t) \leq u_1(t) \leq u_1^+(t); \quad u_2^-(t) \leq u_2(t) \leq u_2^+(t); \\ |x_{\alpha}| \leq v_y(t); \quad |\dot{y}_T| \leq v_T(t); \quad |y_T - y_{\alpha}| \leq \delta. \quad (4)$$

Здесь δ — наибольшее допустимое отставание груза от тележки. Ряд близких по постановке задач рассмотрен в работе [1] для двухмассовых моделей с двумя степенями свободы и без учета ограничений на раскачивание груза. Чтобы решить сформулированную задачу оптимального быстрогодействия, используется метод, основанный на сведении исходной проблемы к задаче математического программирования [2]. Варьируемое время перехода системы из z_0 в z_1 разбиваем на N участков постоянной длины T , на каждом из которых параметры управлений u_1 и u_2 можно считать постоянными. Таким образом, ищем кусочно-постоянную аппроксимацию управлений. Ограничения (4) накладываются в дискретные моменты времени — один раз на каждом интервале разбиения.

Вычислительная схема поиска решения состоит из двух этапов. На первом определяется закон оптимального управления и траектории системы при вертикальном перемещении груза. Если $u_1^-(t) = \text{const}$, $u_1^+(t) = \text{const}$, то задачу можно решить, используя принцип максимума Л. С. Понтрягина [3]. Учет ограничений на скорость подъема \dot{x}_a потребовал применение регулярного синтеза оптимальных траекторий. Тогда оптимальное изменение усилия в канатах определяется зависимостью

$$u_1(t) = \begin{cases} (u_1^+, a > 0) \vee (u_1^-, a < 0), & t \leq t_p; \\ -m_a g, & t_p < t < t_y; \\ (u_1^-, a > 0) \vee (u_1^+, a < 0), & t_y < t < t_f, \end{cases} \quad (5)$$

где $t_p = m_a g / |u_1(t) v_y \text{sign } a|$; $t_f = -m_a g / |u_1(t) v_y \text{sign } a|$;

$$t_y = \left(a - \frac{u_1(t) t_p^2}{2m_a g} - \frac{u_1(t) t_f^2}{2m_a g} - v_y t_f \right) / v_y + t_p; \quad t_f = t_y + t_p.$$

Изменение вертикальной координаты груза x_a при оптимальном подъеме можно получить, интегрируя уравнение (1) с учетом выражения (5). Если $u_1^-(t)$ и $u_1^+(t)$, то задача определения оптимального закона управления $u_1(t)$ решается на основе методов линейного программирования [2].

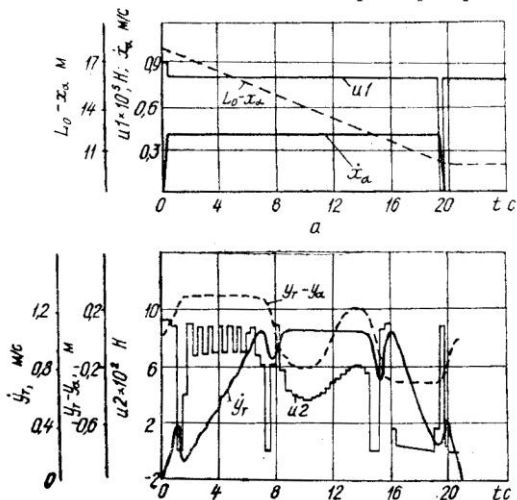
На втором этапе решения основной задачи, чтобы получить оптимальный закон изменения $u_2(t)$, вводят предположение о постоянстве длины каната $L_0 - x_a(t)$ на каждом интервале дискретизации управлений. В этом случае система уравнений движения горизонтального перемещения маятника (2), (3) является кусочно-линейной. Строя матрицы перехода через участки дискретизации [4], можно выразить в каждый момент времени jT , $j = \overline{1, N}$ состояние системы через последовательность управлений $u_2(j)$ и конечное состояние $y(l_h)$. Допустимые траектории исходят из начальных состояний, лежащих внутри множества достижимости на прямой, заданной уравнением $Ey(0) = 0$ (6), где E — (3×4) -мерная матрица с линейно-независимыми стро-

ками, определяемая из условия $E_p=0$; p — единичный вектор, направленный в заданную точку начального состояния y^0 [2]. Тогда полная совокупность ограничений (5), (7) объединяется в одно матричное неравенство и на основе понятия множества достижимости приходим к задаче линейного программирования

$$\min \{z = p^T y(0) = c^T u_c / A_i u_c \leq U_A\}, \quad (7)$$

где $u_c^T = [y(t_h), u_2(1), u_2(2), \dots, u_2(N)]$. Задача (7) решается симплекс-методом с использованием положений теории двойственности.

Предлагаемый алгоритм позволяет всесторонне исследовать оптимальные траектории маятниковых систем при одномерном и двумерном движении. В качестве примера рассматривалась



задача оптимального по быстродействию перемещения системы, если $m_a=8300$ кг; $m_T=11400$ кг; $v=0,0284$; $a=8$ м; $b=15$ м; $u_1^-(t)=0$; $u_1^+(t)=903000$ Н; $u_2^-(t)=0$; $u_2^+(t)=900$ Н; $v_T(t)=1,05$ м/с; $\delta=0,3$ м; $N=60$; $L_0=18$ м. Изменения основных параметров, характеризующих протекание переходного процесса, представлены на рисунке. Оптимальное время движения определяется соотношением времени работы механизмов системы. Особый интерес представляет изменение управляющего параметра $u_2(t)$. На участке пуска $\dot{y}_T < v_T$ груз вблизи границы раскачивания удерживается импульсами управления вблизи u_2^+ . При торможении в связи с уменьшением длины каната и малым начальным отклонением груза от вертикали для точного попадания в конечную точку z_1 и удовлетворения условий отставания груза от тележки потребовалось два скачка управления. В случае движения с установившейся скоростью $\dot{y}_T = v_T$ изменение $u_2(t)$ определяется взаимным положением груза и тележки.

Список литературы: 1. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями.— М.: Наука, 1980.— 384 с. 2. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование.— М.: Наука, 1975.— 280 с. 3. Математическая теория оптимальных процессов/Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко.— М.: Наука, 1976.— 392 с. 4. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление.— М.: Машиностроение, 1968.— 764 с.

Поступила в редколлегию 10.12.80.

УДК 518.51

Ю. Ф. СЕНЧУК, канд. физ.-мат. наук

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Сеточные методы решения уравнений эллиптического типа подробно освещены в работах [1, 2]. Некоторые прямые методы, основанные на динамическом программировании, даны в монографии [3]. Однако авторы этой монографии рассматривают только равномерную квадратную сетку, что недостаточно для целого ряда задач. В статье один из методов, изложенных в работе [3], обобщается на случай неравномерной прямоугольной сетки. Пусть требуется решить уравнение Лапласа $\nabla^2 u(x, y) = 0$ в прямоугольнике $D = \{(x, y) : 0 < x < a; 0 < y < b\}$. Граничное условие $u(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y)$. Исходное уравнение — это уравнение Эйлера для функционала $I(u) = \int_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy$ (1). Покроем прямоугольник D сеткой прямых $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и $y = y_j$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$). Обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$, $l_j = y_j - y_{j-1}$. Тогда вместо уравнения (1) можно рассматривать функционал

$$I(u) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m \alpha_j^2 (u_{ij} - u_{i,j-1})^2 + \beta_i^2 \sum_{j=1}^{m-1} (u_{ij} - u_{i-1,j})^2 \right], \quad (2)$$

где α_j , β_i обратно пропорциональны l_j , h_i . Введем квадратную матрицу $Q(m-1)$ -го порядка с элементами

$$q_{ij} = \begin{cases} \alpha_i^2 + \alpha_{i+1}^2, & j = i; \\ -\alpha_{\max\{i,j\}}^2, & |i - j| = 1; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

и $(m-1)$ -мерные векторы $u_k = (u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{k, m-1})$, $r_k = (\alpha_1^2 u_{k0}, 0, \dots, 0, \alpha_m^2 u_{km})$, $k = 1, 2, \dots, n$, а также положим $s_k = \alpha_1^2 u_{k0}^2 + \alpha_m^2 u_{km}^2$. Тогда выражение (2) примет вид

$$J(u) = \sum_{k=1}^n [(Qu_k, u_k) - 2(r_k, u_k) + s_k + \beta_k^2 |u_k - u_{k-1}|^2]. \quad (3)$$

Требуется найти векторы u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , доставляющие минимум функционалу (3). Следуя идее, изложенной Р. Беллманом и Э. Энджелом [3], обозначим

$$f_k(v) = \min_{\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{n-1}\}} \sum_{i=k}^n [(Qu_i, u_i) - 2(r_i, u_i) + s_i + \beta_i^2 |u_i - u_{i-1}|^2], \quad (4)$$

где $v = u_{k-1}$. Тогда

$$f_k(v) = \min_{u_k} [(Qu_k, u_k) - 2(r_k, u_k) + s_k + \beta_k^2 |u_k - v|^2 + f_{k+1}(u_k)]. \quad (5)$$

Будем искать $f_k(v)$ в виде

$$f_k(v) = (A_k v, v) - 2(b_k, v) + c_k. \quad (6)$$

Подставим это выражение в предыдущее и решим уравнение $\nabla f_k(v) = 0$. Получим

$$u_k = (Q + \beta_k^2 E + A_{k+1})^{-1} (\beta_k^2 v + r_k + b_{k+1}). \quad (7)$$

Преобразуем с помощью этой формулы выражение (5) и сравним результат с равенством (6). Придем к формулам

$$A_k = \beta_k^2 [E - \beta_k^2 (Q + \beta_k^2 E + A_{k+1})^{-1}]; \quad b_k = (E - A_k / \beta_k^2) (r_k + b_{k+1}). \quad (8)$$

Далее, используя равенства (4) при $k=n$ и (6), легко найдем

$$A_n = \beta_n^2 E; \quad b_n = \beta_n^2 u_n. \quad (9)$$

Наконец, из выражения (7), учитывая формулы (8), имеем

$$u_k = (E - A_k / \beta_k^2) u_{k-1} + b_k / \beta_k^2. \quad (10)$$

Итак, исходя из выражений (9) по формулам (8) находим $A_{n-1}, b_{n-1}; A_{n-2}, b_{n-2}; \dots; A_1, b_1$. Затем берем из граничного условия вектор u_0 , по формуле (10) вычисляем u_1, u_2, \dots, u_{n-1} . Докажем теперь, что все матрицы $Q + \beta_k^2 E + A_{k+1}$ неособенны. Прежде всего легко увидеть, что матрица Q — положительно определенная ($Q > 0$). Далее, в силу формул (8), (9)

$$A_{n-1} = \beta_{n-1}^2 \{E - \beta_{n-1}^2 [Q + (\beta_{n-1}^2 + \beta_n^2) E]\}. \quad (11)$$

Поскольку $Q + (\beta_{n-1}^2 + \beta_n^2) E > 0$, матрица $Q + \beta_{n-1}^2 E + A_n$ обратима. Далее,

$$[Q + (\beta_{n-1}^2 + \beta_n^2) E]^{-1} < E / \beta_{n-1}^2,$$

а это согласно выражению (11) значит, что $A_{n-1} > 0$. Следовательно, $0 < A_{n-1} < \beta_{n-1}^2 E$. Применяя метод индукции, предположим, что и при некотором $k < n-1$

$$0 < A_k < \beta_k^2 E. \quad (12)$$

Тогда $0 < (Q = \beta_{k-1}^2 E + A_k)^{-1} < E/\beta_{k-1}^2$.

Отсюда и из выражения (8) имеем $0 < A_{k-1} < \beta_{k-1}^2 E$. Таким образом, $A_k > 0$ для всех k , а значит, $Q + \beta_k^2 E + A_{k+1} >$

> 0 для всех k . Следовательно, все матрицы, подлежащие обращению в ходе процесса, неособенны.

Исследуем теперь описанный алгоритм на устойчивость по отношению к малым ошибкам промежуточных вычислений. Пусть на некотором шаге вместо матрицы A_{k+1} была вычислена матрица $\tilde{A}_{k+1} = A_{k+1} + \Delta_{k+1}$. Тогда легко получить

$\Delta_k = (E - \tilde{A}_k/\beta_k^2) \Delta_{k+1} (E - A_k/\beta_k^2)$. Если $\|\Delta_{k+1}\|$ достаточно мало, то $\tilde{A}_k \approx A_k$. Тогда $\|\Delta_k\| \leq \|E - A_k/\beta_k^2\|^2 \|\Delta_{k+1}\|$.

Возьмем в качестве нормы матрицы ее спектральный радиус. В силу неравенства (12) $\|E - A_k/\beta_k^2\| < 1$. Значит, $\|\Delta_k\| < \|\Delta_{k+1}\|$. Это и доказывает, что ошибка, возникшая в ходе промежуточных вычислений, в дальнейшем не возрастает. Данный факт верен и для вычисления b_k и u_k .

Список литературы: 1. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 591 с. 2. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы решения эллиптических уравнений.— М.: Наука, 1976.— 352 с. 3. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных.— М.: Мир, 1974.— 207 с.

Поступил в редколлегию 04.12.81.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Дабаян А. В., Заруба В. Я., Выпинашко И. Н., Гладышевская Г. Н., Огурцов В. П.</i> Вопросы автоматизации встречного планирования в условиях АСУ гражданской авиацией	3
<i>Лисицкий В. Л., Гужва В. А., Ходько А. М.</i> Модель тематического планирования разработок на основе рационального использования трудовых ресурсов	6
<i>Голоскоков А. Е., Капустина В. А.</i> Определение решающих распределений параметров модели перспективного планирования	8
<i>Гамбаров Л. А.</i> Итеративный алгоритм решения одного класса задач линейного программирования	11
<i>Годлевский М. Д.</i> Об одном алгоритме оптимизации обликковых характеристик модели парка пассажирских магистральных самолетов	15
<i>Шевченко С. В.</i> О задаче реконструкции сети авиационно-технических баз по обслуживанию вертолетного парка	18
<i>Гладкий П. М., Зелинский П. М., Марганя Ю. В., Чернышева Н. П.</i> Решение задачи об оптимальном использовании самолетов для перевозки грузов	21
<i>Макаренко А. В., Голобокова С. В.</i> Алгоритм дихотомии при оптимизации типоразмерного ряда КТС и его динамики	23
<i>Конonenko И. В., Горохова Е. А.</i> Идентификация в условиях помех с неизвестным законом распределения	25
<i>Сиренко А. Н., Тупас Н. Ю.</i> Сравнительный анализ методов идентификации сложных систем	28
<i>Ткачук Н. В.</i> Математическая модель структуры данных для управления диалогом в системах автоматизированного проектирования	30
<i>Сафроненко С. А., Фомина Е. Ю., Баженов В. Г., Ярох А. И.</i> Информационные и программное обеспечение автоматизированной системы нормативов	32
<i>Голоскоков Е. Г., Пикур Э. А., Северин В. П.</i> Сравнение методов одномерной минимизации, не использующих аналитические производные	35
<i>Захаренко П. И., Киреев Н. Г.</i> Модификация алгоритма аналитического синтеза оптимального управления с прогнозирующей моделью	38
<i>Никольченко А. Г.</i> Метод определения передаточной функции и сокращения порядка модели линейных динамических систем	41
<i>Герасимов С. Д.</i> Об одном подходе к задаче построения дискретных моделей систем автоматического регулирования	44
<i>Карачун В. В., Дидковский В. С., Колосов В. Н., Ковалев М. С.</i> Гироскоп направления с автокомпенсацией влияния помех на качающемся основании	47
<i>Овчарова Д. К.</i> Почти периодические колебания автоколебательной системы	49
<i>Коваленко П. А., Зайцев Ю. И.</i> Оптимальное управление плоским движением маятниковой системы	52
<i>Сенчук Ю. Ф.</i> Обобщение одного конечно-разностного метода решения уравнения Лапласа	55

**ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

№ 199

Прикладная механика и процессы управления

Выпуск 3

Редакторы *А. М. Видмиш, Н. И. Юркевич*
Художественный редактор *В. Е. Петренко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Л. П. Пипенко*

Сдано в набор 28.08.82. Подп. в печать 26.01.83.
БЦ 09034. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 1. Лит.
гарн. Выс. печать. 4 печ. л. 4,25 кр.-отт. 4,5 уч.-изд. л.
Тираж 500 экз. Изд. № 1043. Зак. 1220. Цена 65 к.

Издательство при Харьковском государственном универ-
ситете издательского объединения «Вища школа»
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Харьковская городская типография № 16, 310003,
Харьков-3, ул. Университетская, 16.

РЕФЕРАТЫ

УДК 656

Вопросы автоматизации встречного планирования в условиях АСУ гражданской авиацией. Дабагян А. В., Заруба В. Я., Выпинашко И. Н. и др.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 3—6.

Рассмотрены проблемы организации встречного планирования в отрасли гражданской авиации. Разработана процедура коллективного принятия решений, основанная на теоретико-игровом алгоритме «аукцион». Предложены возможные формы автоматизации встречного планирования в условиях АСУ ГА.

Список лит.: 3 назв.

УДК 001.89

Модель тематического планирования разработок на основе рационального использования трудовых ресурсов. Лисицкий В. Л., Гужва В. А., Ходько А. М.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 6—8.

Освещены вопросы планирования разработок в условиях ограниченности трудовых ресурсов. Предложена математическая модель планирования, обеспечивающая экономию живого труда за счет наилучшего выбора моментов завершения типовых этапов разработок на заданном интервале планирования.

УДК 62—50

Определение решающих распределений параметров модели перспективного планирования. Голоскоков А. Е., Капустина В. А.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 8—11.

Рассмотрен один из подходов определения статистических данных параметра модели в зависимости от информированной структуры задачи. Методика, основанная на теореме Каратеодора позволяет свести исходную задачу к эквивалентной. Оптимальное решение последней представляет искомый статистический материал для нахождения закона распределения параметра модели.

Список лит.: 3 назв.

УДК 519.3

Итеративный алгоритм решения одного класса задач линейного программирования. Гамбаров Л. А.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 11—15.

Рассматривались вопросы декомпозиции четырехиндексной задачи линейного программирования со специальной структурой матрицы ограничений. Предложен итеративный алгоритм, обеспечивающий сходимость рассматриваемого процесса децентрализованного планирования.

УДК 629.734

Об одном алгоритме оптимизации обликочных характеристик модели парка пассажирских магистральных самолетов. Годлевский М. Д.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 115—18.

Представлен алгоритм, основанный на совместном использовании одного из подходов последовательного анализа вариантов и двух градиентных мето-

дов, который был применен для оптимизации модели парка пассажирских магистральных самолетов с многоэкстремальной целевой функцией. Модель содержит восемь переменных. Конкретная реализация алгоритма осуществлена на примере сети, состоящей из 1930 авиалиний.

Ил. 1. Список лит.: 3 вызв.

УДК 629.734

О задаче реконструкции сети авиационно-технических баз по обслуживанию вертолетного парка. Шевченко С. В.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 19—21.

Рассмотрена проблема реконструкции сети авиационно-технических баз совместно с распределением парка вертолетов, выполняющих авиационное обслуживание заказчиков по районам работ, на периодическое техническое обслуживание. Приведена математическая постановка задачи, которая сводится к задаче дискретного программирования.

Библиогр. ссылка в подстр. примеч.

УДК 656

Решение задачи об оптимальном использовании самолетов для перевозки грузов. Гладкий П. М., Зелянский П. М., Марганя Ю. В., Чернышева Н. П.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 22—24.

Решена задача оптимальной загрузки грузовых самолетов при перевозке партии разнотипных грузов. Оптимизация осуществляется по критерию максимальной загрузки при ограничениях на грузоподъемность и объемную вместимость самолета. Разработан алгоритм решения задачи более простой по сравнению с существующими.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 330.115

Алгоритм дихотомии при оптимизации типоразмерного ряда КТС и его динамики. Макаренко А. В., Голобокова С. В.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 24—25.

Представлена задача оптимальной дихотомии при построении типоразмерного ряда комплексов технических средств, обслуживающего динамическое поле требований. Поле имеет вид гиперпараллелепипеда, каждая из интегральных стоимостных характеристик записывается в виде экспоненты линейной формы параметров. Задача формализована, изложен и обоснован алгоритм ее решения.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 62—50

Идентификация в условиях помех с неизвестным законом распределения. Кононенко И. В., Горохова Е. А.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 26—28.

Изложены вопросы идентификации в условиях действия помех с неизвестным законом распределения. Описано трехпараметрическое семейство помехоустойчивых оценок. Предложен алгоритм, позволяющий использовать эти оценки для решения регрессионных задач.

Библиогр.: 2 назв.

Сравнительный анализ методов идентификации сложных систем. Сиренко А. Н., Тулас Н. Ю.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 29—31.

Предложен алгоритм, позволяющий получать аналитические зависимости на основе статистических данных. Алгоритм отличается удобством реализации на цифровой ЭВМ. Приведен иллюстративный пример, на основе которого сделан сравнительный анализ результатов аппроксимации по методу наименьших квадратов и по предлагаемой методике.

Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 656

Математическая модель структуры данных для управления диалогом в системах автоматизированного проектирования. Ткачук Н. В.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 31—33.

Рассмотрена математическая модель структуры данных для реализации диалогового режима в системах автоматизированного проектирования, адекватная альтернативному, иерархическому и итерационному характеру процесса конструирования технических объектов. Математический аппарат модели основан на использовании понятий класса контекстно-зависимых грамматик порождения, что позволяет в режиме диалога передать САПР ряд дополнительных функций и повысить ее эффективность и комфорт для пользователя.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 658.012

Информационное и программное обеспечение автоматизированной системы нормативов. Сафроненко С. А., Фомина Е. Ю., Баженов В. Г., Ярох А. И.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 33—35.

Рассмотрены проблемы разработки и эксплуатации автоматизированной системы материальных нормативов на отраслевом уровне. Предложен общий подход к разработке информационного языка описания технико-экономических показателей, описанию концептуальной модели базы данных средствами языка отношений. Освещены вопросы автоматизации программирования средств обработки входных информационных потоков и поиска информации в базе данных с применением СУБД «БАНК-ОС».

УДК 517.27

Сравнение методов одномерной минимизации, не использующих аналитические производные. Голоскоков Е. Г., Пикур Э. А., Северин В. И.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 35—39.

Рассмотрены методы золотого сечения, квадратичной и кубической интерполяции для одномерной минимизации. Приведены результаты вычислительных экспериментов, позволяющие выбрать наиболее эффективный метод в зависимости от конкретного вида функции.

Табл. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 62.505

Модификация алгоритма аналитического синтеза оптимального управления с прогнозирующей моделью. Захаренко П. И., Киреев Н. Г.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 39—41.

Рассмотрен алгоритм совместного оценивания и управления некоторым объектом. Предложено за «свободное» принимать движение с некоторым наперед заданным управлением. Это дает возможность с меньшими отклонениями синтезировать оптимальное управление объекта по сравнению с методом, в котором за «свободное» движение объекта принимается движение с нулевым управлением. Дан пример.

Ил. 1. Список лит.: 3 назв.

УДК 681.5.01

Метод определения передаточной функции и сокращения порядка модели линейных динамических систем. Никульченко А. Г. Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 41—44.

Рассмотрена задача определения передаточной функции системы и сокращения порядка модели на основе аппроксимации экспериментально снятого переходного процесса. Предложен конечно-шаговый метод, позволяющий решать поставленную задачу как для устойчивых линейных динамических систем, так и для неустойчивых при малом интервале снятия измерений.

Библиогр. ссылка в подстроч. примеч.

УДК 62—50

Об одном подходе к задаче построения дискретных моделей систем автоматического регулирования. Герасимов С. Д. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 44—47.

Для решения задачи построения дискретной модели САР предложен новый метод вычисления матричной экспоненты и ее интеграла, основанный на теореме Кели—Гамильтона. Основное преимущество предлагаемого метода в быстрой реализации, что позволяет применять его для задач исследования САР в реальном масштабе времени. Приведено математическое обоснование метода.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 531.383

Гироскоп направления с автокомпенсацией влияния помех на качающемся основании. Карачун В. В., Дидковский В. С., Колосов В. Н., Ковалев М. С.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 48—49.

Рассмотрен гироскоп направления на базе трехстепенного свободного гироскопа с автокомпенсацией влияния внешних механических помех методом двухканальности. Показана эффективность схемы при регулярной качке основания.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 534.1

Почти периодические колебания автоколебательной системы. Овчарова Д. К. Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 50—53.

При помощи метода усреднения исследовались почти периодические колебания автоколебательной системы при действии периодического внешнего возмущения. Определены условия возникновения автоколебаний и субгармонических колебаний в системе, описываемой уравнением Ван-дер-Поля. Получены формулы для нахождения амплитудно-частотных характеристик системы и выведены критерии устойчивости различных видов колебаний.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 62—50

Оптимальное управление плоским движением маятниковой системы. Коваленко П. А., Зайцев Ю. И. Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 53—56.

Рассмотрен метод численного решения задач оптимального по быстродействию управления плоским движением маятниковой системы с учетом ограничений на движущие силы, скорости и отклонения масс.

Ил. 1. Библиогр.: 4 назв.

УДК 518.61

Обобщение одного конечно-разностного метода решения уравнения Лапласа. Сенчук Ю. Ф.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикладная механика и процессы управления, вып. 3, с. 56—58.

Обобщен сеточный метод решения уравнения Лапласа, предложенный Р. Беллманом и Э. Энджелом, на случай неравномерной прямоугольной сетки. Приведены формулы, реализующие алгоритм решения. Доказана устойчивость метода относительно малых ошибок промежуточных вычислений.

Библиогр.: 3 назв.