

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

№ 163

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

ВЫПУСК 2

Основан в 1979 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1980

Прикладная механика и процессы управления, вып. 2.
Вестн. Харьк. политехн. ин-та.— Харьков: Вища школа.
Изд-во при Харьк. ун-те. 1980. —76+5 с.

В вестнике освещаются проблемы прикладной механики, процессов управления и системного анализа. Исследуются механические свойства оболочек и колебания различных систем. Рассматриваются вопросы синтеза и оптимизации САР, оптимального проектирования сложных технических и экономических систем, управления ими. Для научных работников и специалистов в области прикладной механики, процессов управления и системного анализа.

Списки лит. в конце статей.

Редакционная коллегия: Е. Г. Голоскоков (отв. ред.),
Ю. Т. Костенко (отв. секр.), Н. И. Безменов,
В. Б. Гринев, А. В. Дабагян, В. Н. Карабан,
Ю. А. Фролов.

Адрес редакционной коллегии
310002, Харьков-2, ул. Фрунзе, 21, Политехнический институт, инженерно-физический факультет, тел. 40-04-75.

Редакция научно-технической литературы

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 163

**Прикладная механика
и процессы управления**
Выпуск 2

Редактор *Н. И. Юркевич*
Обложка художника *Л. Н. Шарыповой*
Художественный редактор *Т. П. Воробийко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *В. В. Арнаутова*

Сдано в набор 26.11.79. Подписано в печать 26.03.80. БЦ 09183.
Формат 60 × 90^{1/16}. Бумага типографская № 3. Лит. гарн. Выд.
печать. 5 усл. печ. л. 5,3, уч.-изд. л. Тираж 1000. Изд. № 615.
Зак. 9-422. Цена 75 к.

Издательство при Харьковском государственном университете
издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3,
ул. Университетская, 16.

Харьковская книжная фабрика «Коммунист» республиканского
производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата
УССР, 310012, Харьков-12, ул. Энгельса, 11.

П 30106 — 021
М226(04)—80

© Харьковский
политехнический
институт, 1980

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, д-р техн. наук
Ю. С. КОЗЬМИН

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Вопросам исследования динамической устойчивости однослойных оболочек, закономерностям процесса динамического выпучивания конструкций посвящен ряд работ, достаточно полный обзор которых приведен в монографии А. С. Вольмира [1]. В данной статье с помощью вариационного метода рассматривается поведение трехслойной оболочки, находящейся в условиях динамического нагружения, с учетом геометрической нелинейности. Принимается система гипотез [2]. Исследуется цилиндрическая трехслойная оболочка несимметричного по толщине строения, подверженная воздействию внешнего равномерно распределенного давления $q(t)$.

Недеформированную срединную поверхность заполнителя отнесем к криволинейной ортогональной системе координат x_1, x_2 . Координату, нормальную к срединной поверхности, обозначим z .

При построении геометрических уравнений для несущих слоев используем гипотезы Кирхгофа—Лява, для заполнителя — предположение о несжимаемости материала в поперечном направлении. Считаем, что деформация поперечного сдвига по толщине заполнителя распределена по нелинейному закону, вследствие чего тангенциальные перемещения в заполнителе можно представить в виде

$$u_i^3 = v_i + \alpha_i(x_1, x_2) f(z) - zw_{,i}, \quad (1)$$

где v_i — тангенциальные перемещения в срединной поверхности заполнителя; $\alpha_i(x_1, x_2)$ — функция сдвига; $f(z)$ — закон распределения тангенциальных перемещений по толщине заполнителя, $i = 1, 2$. Нижними индексами обозначаем направления координатных осей, верхними — номера оболочки. В работе применяем правило суммирования по повторяющимся индексам. Решение проводим на основании смешанного вариационного принципа [3] (варьируем перемещения и усиления в срединной поверхности).

В качестве исходного выбираем принцип возможных перемещений, например учитываем силы инерции в направлении, соответствующем прогибу оболочки [1]:

$$\delta A_1 + \delta \Pi - \iint_{\Omega} R \delta w dS = 0, \quad (2)$$

где δA_1 — вариация работы внешних контурных усилий; $\delta \Pi$ — вариация работы внутренних сил;

$$R = q - \frac{h_a \gamma_a}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Здесь h_a — толщина; γ_a — удельный вес α -го слоя оболочки, $\alpha = 1, 2, 3$.

Выражение для потенциальной энергии тела имеет вид [2]

$$\delta \Pi = \iint_{\Omega} (N_{ij} \delta e_{ij} + H_{ij} \delta \alpha_{ij} + M_{ij} \delta x_{ij} + Q_i^0 \delta \alpha_i) dS,$$

где N_{ij} , H_{ij} , M_{ij} , Q_i^0 — обобщенные усилия и моменты, соответствующие введенным перемещениям; e_{ij} , α_{ij} — функции деформаций, $i, j = 1, 2$. Интегралы берутся по площади срединной поверхности Ω . Допуская варьирование усилий в срединной поверхности N_{ij} и вводя функцию напряжений φ

$$N_{11} = \varphi_{,22}; \quad N_{22} = \varphi_{,11}; \quad N_{12} = -\varphi_{,12}, \quad (4)$$

после преобразований согласно методике работы [3] получаем вариационное уравнение смешанного типа:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [-\delta N_{ij} e_{ij} - (H_{ij,i} - Q_i^0) \delta \alpha_i + M_{ij} \delta x_{ij}] dS + \\ & + \delta \iint_{\Omega} \left[k_{ij} N_{ij} + \frac{1}{2} (N_{ij} w_{,i})_{,j} \right] w dS + \\ & + \delta \int_0^{l_1} [N_{1i} w_{,i} w + M_{11} w_{,1}^k + Q_1^k w] dx_2 \Big|_0^{l_1} + \\ & + \delta \int_0^{l_2} [N_{2i} w_{,i} w + M_{22} w_{,2}^k + Q_2^k w] dx_1 \Big|_0^{l_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

в котором независимо-варьируемыми функциями являются w , α_i , φ . Усилия N_{ij} , M_{ij} , H_{ij} , Q_i^0 выражаем через варьируемые функции на основе соотношений работы [2].

Полученное уравнение (5) приводим к задаче Коши с помощью вариационного метода: искомые функции представляем в виде ряда по координатным функциям с коэффициентами, зависящими от времени:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^M X_i(t) w_i(x_1, x_2); \quad \varphi = \sum_{i=1}^M Y_i(t) \varphi_i(x_1, x_2); \\ \alpha_k &= \sum_{i=1}^M Z_i^k \alpha_{ki}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где координатные функции w_i , α_{ki} , φ_i удовлетворяют главным граничным условиям; по индексу k не суммируем.

Подставим соотношения (6) в (5), выполним операцию варьирования и, приравнявая нулю коэффициенты при независимых

вариациях, получим систему дифференциальных уравнений, которую приводим к задаче Коши:

$$\ddot{\xi}_i = F_{0i}(t) + F_{1ij}X_j + F_{2ijm}X_jX_m + F_{3ijml}X_jX_mX_l; \quad \dot{X}_i = \xi_i, \quad (7)$$

где $i, j, m, l = 1, 2 \dots M$. Систему интегрируем с начальными условиями $X_i = 0; \dot{X}_i = 0$ при $t = 0$.

Расчет осесимметричной задачи проводили для трехслойной цилиндрической оболочки симметричного строения, свободно опер-

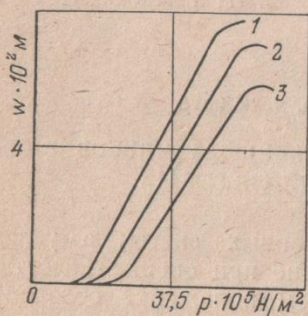


Рис. 1.

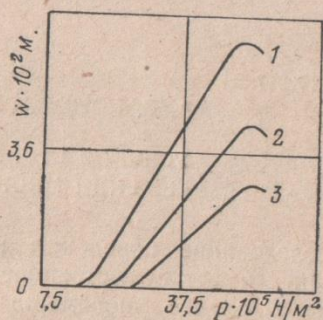


Рис. 2.

той по краям. Пусть по торцам установлена жесткая диафрагма, препятствующая относительно сдвигу несущих слоев вдоль края оболочки. Это соответствует граничным условиям $w = a_1 = a_2 = 0$ при $x_1 = 0; x_1 = l_1$. Координатные функции выберем в виде

$$w_i = \alpha_i^k = \sin \frac{i\pi x_1}{l_1}; \quad \varphi_i = (1 + x_2^2) \sin \frac{i\pi x_1}{l_1}, \quad (8)$$

где $i = 1 \dots M$.

Исходные данные при этом следующие: $E^1 = E^2 = 0,72 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $E^3 = 2,5 \cdot 10^2 \text{ Н/м}^2$; $\nu^1 = \nu^2 = 0,3$; $\nu^3 = 0,4$; $\gamma^1 = \gamma^2 = 0,27 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^3$; $\gamma^3 = 0,15 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^3$; $R = 1,12 \text{ м}$; $l_1 = 2,5 \text{ м}$.

Оболочка подвергается воздействию равномерно распределенного по всей поверхности внешнего давления, изменяющегося во времени по закону $q(t) = s \times t$, где $s = -0,2 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2 \cdot \text{с}$. Система интегрируется методом Кутте—Мерсона. Удержание семи членов ряда (6) дает достаточную для практических расчетов точность.

Приведены кривые изменения стрелы прогиба во времени при различных относительных толщинах заполнителя. Кривые 1, 2, 3 (рис. 1) построены для значений $H^3/(H^1 + H^2 + H^3) = 0,87; 0,85; 0,83$ соответственно при постоянной толщине пакета. Кривые 1, 2, 3 (рис. 2) построены для значений $H^3/(H^1 + H^2 + H^3) = 0,83; 0,68; 0,3$ соответственно при постоянном весе обо-

лочки. Постоянной считались толщина пакета (рис. 1) и вес оболочки (рис. 2). Из представленных зависимостей видно, что увеличение относительной толщины заполнителя приводит к более интенсивному выпучиванию конструкции.

Список литературы: 1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972. — 432 с. 2. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. — М.: Машиностроение, 1973. — 172 с. 3. Кантор Б. Я. Нелинейные задачи теории неоднородных полых оболочек. — Киев: Наук. думка, 1971. — 136 с.

Поступила 2 октября 1978 г.

УДК 517.917

А. С. ПОНОМАРЕВ, канд. техн наук

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ ВЕКОВЫХ ЧЛЕНОВ В ОБЩЕМ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

Исследование поведения вибрационных систем в условиях резонанса имеет существенное значение при оценке качества их работы. В случае многомерных систем положение осложняется наличием нескольких резонансов, соответствующих каждой из собственных частот. Наряду с классическим решением проблемы резонансно-опасных режимов методами отстройки [1, 2] можно ставить задачу их устранения путем уничтожения вековых членов в общих решениях соответствующей системы дифференциальных уравнений. Для одномерных систем это обеспечивается только тривиальным нулевым возбуждением. Действительно, в уравнении $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t)$ резонанс имеет место при $f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ и вековые члены отсутствуют только при $A = B \equiv 0$.

Для многомерных же систем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Ax = F(t), \quad (1)$$

где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $F(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$, резонансы имеют место при

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^n (p_{ij} \sin \omega_j t + q_{ij} \cos \omega_j t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где ω_j — собственные частоты системы (1), совпадающие с корнями характеристического уравнения

$$\det |A - E\omega^2| = 0, \quad (2)$$

если хотя бы один из коэффициентов, p_{ij} или q_{ij} , отличен от нуля. Покажем, что в этом случае вековые члены вида

$$t(C_{ij} \sin \omega_j t + D_{ij} \cos \omega_j t) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

лочки. Постоянной считались толщина пакета (рис. 1) и вес оболочки (рис. 2). Из представленных зависимостей видно, что увеличение относительной толщины заполнителя приводит к более интенсивному выпучиванию конструкции.

Список литературы: 1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972. — 432 с. 2. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. — М.: Машиностроение, 1973. — 172 с. 3. Кантор Б. Я. Нелинейные задачи теории неоднородных полых оболочек. — Киев: Наук. думка, 1971. — 136 с.

Поступила 2 октября 1978 г.

УДК 517.917

А. С. ПОНОМАРЕВ, канд. техн наук

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ ВЕКОВЫХ ЧЛЕНОВ В ОБЩЕМ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

Исследование поведения вибрационных систем в условиях резонанса имеет существенное значение при оценке качества их работы. В случае многомерных систем положение осложняется наличием нескольких резонансов, соответствующих каждой из собственных частот. Наряду с классическим решением проблемы резонансно-опасных режимов методами отстройки [1, 2] можно ставить задачу их устранения путем уничтожения вековых членов в общих решениях соответствующей системы дифференциальных уравнений. Для одномерных систем это обеспечивается только тривиальным нулевым возбуждением. Действительно, в уравнении $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t)$ резонанс имеет место при $f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ и вековые члены отсутствуют только при $A = B \equiv 0$.

Для многомерных же систем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Ax = F(t), \quad (1)$$

где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $F(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$, резонансы имеют место при

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^n (p_{ij} \sin \omega_j t + q_{ij} \cos \omega_j t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где ω_j — собственные частоты системы (1), совпадающие с корнями характеристического уравнения

$$\det |A - E\omega^2| = 0, \quad (2)$$

если хотя бы один из коэффициентов, p_{ij} или q_{ij} , отличен от нуля. Покажем, что в этом случае вековые члены вида

$$t(C_{ij} \sin \omega_j t + D_{ij} \cos \omega_j t) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

могут отсутствовать также при ненулевых векторах коэффициентов P , Q резонирующих гармоник внешнего возбуждения. Ограничимся предположением, что среди корней уравнения (2) нет кратных.

Поставленная задача полезна в случае анализа нелинейных систем автоматического управления и регулирования, а также в нелинейной механике и радиофизике. Действительно, с помощью ряда приближенных методов [3—5] интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений (или систем уравнений) удается свести к интегрированию некоторой последовательности линейных дифференциальных уравнений (или систем), находя таким образом последовательные приближения искомого решения. Часто при этом для выявления определенных свойств или параметров каждого предыдущего приближения необходимо выполнить условия отсутствия вековых членов в решениях соответствующего последующего приближения.

Решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $x|_{t=0} = x_0$; $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = \dot{x}_0$, может быть записано в виде

$$x = \cos(\sqrt{A}t) x_0 + (\sqrt{A})^{-1} \sin(\sqrt{A}t) \dot{x}_0 + (\sqrt{A})^{-1} \int_0^t \sin[\sqrt{A}(t-\tau)] F(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Здесь $\sqrt{A}$ — произвольное решение матричного уравнения $(\sqrt{A})^2 = A$. Тригонометрические функции от матрицы вводятся при помощи полиномов

$$\cos(\sqrt{A}t) = E - \frac{1}{2!} A t^2 + \frac{1}{4!} A^2 t^4 - \dots;$$

$$(\sqrt{A})^{-1} \sin(\sqrt{A}t) = Et - \frac{1}{3!} A t^3 + \frac{1}{5!} A^2 t^5 - \dots$$

Под производной от матрицы понимается матрица, получаемая из данной путем замены всех ее элементов их производными, под интегралом от матрицы — соответственно матрица, все элементы которой равны интегралам от элементов данной матрицы.

Выражение (3) описывает все многообразие возможных движений системы (1), поскольку начальные значения x_0 , $\dot{x}_0$ могут быть произвольны. При этом первые два слагаемых не содержат вековых членов.

Рассмотрим последнее слагаемое решения (3):

$$I = (\sqrt{A})^{-1} \int_0^t \sin[\sqrt{A}(t-\tau)] F(\tau) d\tau. \quad (4)$$

На основании теорем о свойствах функций от матриц [6] легко распространить справедливость ряда тригонометрических тождеств на случай матричных значений аргумента.

В качестве примера докажем справедливость формулы синуса разности. Пусть $G(u_1, \dots, u_5) = u_1 u_4 + u_2 u_3 - u_5$ — многочлен относительно переменных $u_1, \dots, u_5$; $f_1(\lambda) = \sin \lambda a$; $f_2(\lambda) = -\cos \lambda a$; $f_3(\lambda) = \sin \lambda b$; $f_4(\lambda) = \cos \lambda b$; $f_5(\lambda) = \sin \lambda (a - b)$ — функции, определенные на спектре матрицы A ; a, b — скалярные константы.

Составим многочлен

$$g(\lambda) \equiv G[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda), f_4(\lambda), f_5(\lambda)] = f_1 f_4 + f_2 f_3 - f_5,$$

тождественно равный нулю на основании известной тригонометрической формулы $\sin \lambda a \cos \lambda b - \cos \lambda a \sin \lambda b = \sin \lambda (a - b)$. Тогда из тождества $g(\Lambda_A) = 0$ следует $G[f_1(\lambda), \dots, f_5(\lambda)] = 0$, т. е. $\sin(Aa) \cos(Ab) - \cos(Aa) \sin(Ab) = \sin[A(a - b)]$.

Применяя полученную формулу, перепишем (4) в виде

$$I = (\sqrt{A})^{-1} \int_0^t [\sin(\sqrt{A}t) \cos(\sqrt{A}\tau) - \cos(\sqrt{A}t) \sin(\sqrt{A}\tau)] F(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Как отмечалось, опасность резонанса возникает, если

$$F(t) = \sin(\sqrt{A}t) P + \cos(\sqrt{A}t) Q. \quad (6)$$

Подставим это значение $F(t)$ в (5). Так как столбцовые матрицы P, Q коэффициентов резонирующих гармоник постоянны, они могут быть вынесены вправо за знак интеграла. Выполняя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} (\sqrt{A})^{-1} \sin^3(\sqrt{A}t) (\sqrt{A})^{-1} P + \frac{1}{2} (\sqrt{A})^{-1} \sin(\sqrt{A}t) [\sqrt{A}t + \\ & + \sin(\sqrt{A}t) \cos(\sqrt{A}t)] (\sqrt{A})^{-1} Q - \frac{1}{2} \times \\ & \times (\sqrt{A})^{-1} \cos(\sqrt{A}t) \sin^2(\sqrt{A}t) (\sqrt{A})^{-1} Q - \\ & - \frac{1}{2} (\sqrt{A})^{-1} \cos(\sqrt{A}t) [\sqrt{A}t - \sin(\sqrt{A}t) \cos(\sqrt{A}t)] (\sqrt{A})^{-1} P. \end{aligned}$$

В силу известных свойств действий над матрицами и коммутативности рассматриваемых функций от матрицы A полученное выражение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} (\sqrt{A})^{-1} [\sin(\sqrt{A}t) t Q + \sin^2(\sqrt{A}t) \cos(\sqrt{A}t) (\sqrt{A})^{-1} Q - \\ & - \cos(\sqrt{A}t) t P] + \frac{1}{2} (\sqrt{A})^{-1} \sin(\sqrt{A}t) [\cos^2(\sqrt{A}t) + \\ & + \sin^2(\sqrt{A}t)] (\sqrt{A})^{-1} P. \end{aligned}$$

Отсюда после очевидных преобразований получим окончательно

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \sin(\sqrt{A}t) (\sqrt{A})^{-1} P + \frac{1}{2} t [\sin(\sqrt{A}t) (\sqrt{A})^{-1} Q - \\ & - \cos(\sqrt{A}t) (\sqrt{A})^{-1} P]. \end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения условий отсутствия вековых членов в решении (3) системы (1) при внешнем возбуждении $F(t)$ вида (6) необходимо и достаточно удовлетворить равенства

$$(\sqrt{A})^{-1} Q = 0; \quad (\sqrt{A})^{-1} P = 0. \quad (7)$$

Обе полученные однородные системы допускают нетривиальные решения с $Q \neq 0$ и $P \neq 0$, так как матрица $(\sqrt{A})^{-1}$ является особенной именно в резонансном случае.

Поскольку P, Q представляют собой векторы коэффициентов произвольной резонирующей гармоник, условия (7) носят универсальный характер. Далее, в силу суперпозиции частных решений линейной системы легко осуществить синтез последней по критерию отсутствия любых вековых членов, т. е. по устранению всех резонансно-опасных режимов. При этом варьированию могут подлежать параметры системы (интегрально характеризующие здесь матрицей $(\sqrt{A})^{-1}$) и параметры возбуждения. Наконец, содержание полученных условий оказывается гораздо богаче рассмотренных здесь выводов, если привлечь еще и геометрический смысл матрицы $(\sqrt{A})^{-1}$, т. е. изучить зависимость решения (3) и условия отсутствия нерезонансного возбуждения системы (1) резонирующими гармониками от распределения собственных векторов матрицы A .

Список литературы: 1. Глазман И. М., Митин В. Н. Отстройка вибрационных систем как задача выпуклого программирования.— Докл. АН СССР, 1966, 169, № 5, с. 711—714. 2. Митин В. Н., Пономарев А. С., Штейнвольф Л. И. Синтез вибрационных систем при вынужденных колебаниях.— Динамика и прочность машин, 1973, вып. 18, с. 58—62. 3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.—410 с. 4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах.— М.: Мир, 1968.—432 с. 5. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем.— М.: Физматгиз, 1960.—384 с. 6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.—567 с.

Поступила 27 октября 1977 г.

УДК 534.1.

Е. П. ПЕТРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПАКЕТОВ ТУРБИННЫХ ЛОПАТОК С ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ НАРУШЕНИЯМИ ИХ ОДНОРОДНОСТИ

Нарушения однородности пакета турбинных лопаток происходят в результате производственного разброса геометрических характеристик лопаток, предусмотренных допусками на их изготовление, неточностей сборки пакетов. Исследования колебаний пакетов с замкнутыми на круг связями на основе упрощен-

Таким образом, для выполнения условий отсутствия вековых членов в решении (3) системы (1) при внешнем возбуждении $F(t)$ вида (6) необходимо и достаточно удовлетворить равенства

$$(\sqrt{A})^{-1} Q = 0; \quad (\sqrt{A})^{-1} P = 0. \quad (7)$$

Обе полученные однородные системы допускают нетривиальные решения с $Q \neq 0$ и $P \neq 0$, так как матрица $(\sqrt{A})^{-1}$ является особенной именно в резонансном случае.

Поскольку P, Q представляют собой векторы коэффициентов произвольной резонирующей гармоникой, условия (7) носят универсальный характер. Далее, в силу суперпозиции частных решений линейной системы легко осуществить синтез последней по критерию отсутствия любых вековых членов, т. е. по устранению всех резонансно-опасных режимов. При этом варьированию могут подлежать параметры системы (интегрально характеризующие здесь матрицей $(\sqrt{A})^{-1}$) и параметры возбуждения. Наконец, содержание полученных условий оказывается гораздо богаче рассмотренных здесь выводов, если привлечь еще и геометрический смысл матрицы $(\sqrt{A})^{-1}$, т. е. изучить зависимость решения (3) и условия отсутствия нерезонансного возбуждения системы (1) резонирующими гармониками от распределения собственных векторов матрицы A .

Список литературы: 1. Глазман И. М., Митин В. Н. Отстройка вибрационных систем как задача выпуклого программирования.— Докл. АН СССР, 1966, 169, № 5, с. 711—714. 2. Митин В. Н., Пономарев А. С., Штейнвольф Л. И. Синтез вибрационных систем при вынужденных колебаниях.— Динамика и прочность машин, 1973, вып. 18, с. 58—62. 3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.—410 с. 4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах.— М.: Мир, 1968.—432 с. 5. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем.— М.: Физматгиз, 1960.—384 с. 6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.—567 с.

Поступила 27 октября 1977 г.

УДК 534.1.

Е. П. ПЕТРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПАКЕТОВ ТУРБИННЫХ ЛОПАТОК С ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ НАРУШЕНИЯМИ ИХ ОДНОРОДНОСТИ

Нарушения однородности пакета турбинных лопаток происходят в результате производственного разброса геометрических характеристик лопаток, предусмотренных допусками на их изготовление, неточностей сборки пакетов. Исследования колебаний пакетов с замкнутыми на круг связями на основе упрощен-

ных моделей [1], а также исследование колебаний парных лопаток [2] показывают, что небольшое нарушение однородности пакета может привести к существенному перераспределению напряжений в лопатках.

Настоящая работа посвящена расчетному анализу влияния нарушений однородности на колебания пакета, состоящего из конечного числа лопаток (рис. 1). Для проведения исследований использовался разработанный ранее [3] метод и алгоритм расчета. В качестве модели лопатки принят естественно закрученный стержень несимметричного переменного сечения, для связи — плоский криволинейный стержень. В основу расчета положен метод начальных параметров в сочетании с дискретными моделями лопаток и связи. Для обеспечения требуемой точности расчета пакета с произвольным числом лопаток используется метод дискретной ортогонализации.

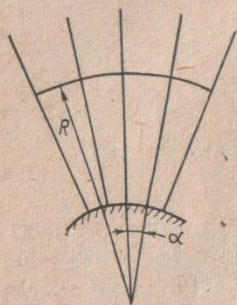


Рис. 1.

В работе рассматриваются неоднородные пакеты следующих типов: 1) пакеты с нарушениями однородности расстройкой характеристик лопаток (при этом рассматривались пакеты с симметричными и несимметричными нарушениями однородности). 2) пакеты с нарушениями однородности путем расстройки характеристик участков связи между лопатками.

Анализ проведен для пакета из пяти лопаток длиной 0,975 м без учета влияния центробежных сил. Лопатки жестко зашпелены в корневом сечении и связаны в пакет связью, жестко соединенной с лопатками на расстоянии 0,365 м от концевой сечения. Характеристики лопаток однородного пакета приведены ниже.

$z \cdot 10^2$ м	$l_x \cdot 10^2$ м	$l_y \cdot 10^2$ м	β град	$F \cdot 10^3$ м ²	$I_z \cdot 10^7$ м ⁴	$I_y \cdot 10^7$ м ⁴	$GT \cdot 10^{-3}$ Нм ²
0	-1,74	3,57	66	1,62	0,29	32,3	5,5
7,5	-1,84	3,37	63	1,80	0,50	35,2	7,8
27,5	-1,88	0,86	55	2,32	1,59	46,2	15,6
36,5	-1,98	-0,11	52	2,45	2,18	51,0	16,6
59,5	-2,03	-4,79	40	3,33	5,60	79,5	29,9
97,5	-2,36	-7,12	22	5,28	15,21	150,8	89,8

Здесь z — координата, отсчитываемая от концевой сечения лопатки, l_x , l_y — проекции эксцентриситета соответственно на аксиальную плоскость и плоскость диска; β — угол закрутки; J_z , J_y — главные моменты инерции сечения; GT — жесткость на кручение. Радиус связи $R = 1,5$ м, угол между лопатками пакета $\alpha = 5^\circ$; геометрические характеристики сечения связи: $J_z = 1,1 \times$

$\times 10^{-8} \text{ м}^4$; $J_\eta = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $F = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; характеристики материала лопаток и связи: $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Низшие собственные частоты однородного пакета (Гц): $P_1 = 68,9$; $p_2 = 135,6$; $p_3 = 146,5$; $p_4 = 164,9$. Первая частота — частота синфазных колебаний лопаток пакета; p_2 , p_3 , p_4 — частота внутрипакетных (несинфазных) колебаний. На рис. 2 приведены

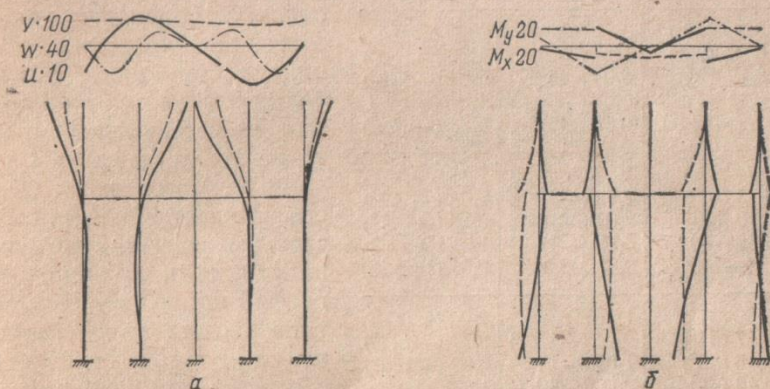


Рис. 2.

формы колебаний однородного пакета и распределения амплитуд на частоте p_4 . Здесь сплошной линией нанесены аксиальные перемещения, штриховой — тангенциальные, штрихпунктирной — радиальные и соответствующие проекции внутренних моментов в поперечных сечениях лопаток и связи.

Для рассмотренных примеров расчеты показывают, что у пакета из закрученных лопаток несимметричного поперечного сечения даже без нарушений однородности не наблюдается полной симметрии форм колебаний и распределений моментов. Это явление можно объяснить связанностью в таких пакетах тангенциальных, аксиальных и крутильных колебаний лопаток. Расчет показал также необходимость учета кривизны связи, которая является особенно существенной для пакетов из большого числа лопаток и больших углов α . Так, для данного пакета расчет без учета кривизны связи снижал первую собственную частоту на 10%. Влияние кривизны на частоты внутрипакетных колебаний менее значительно, однако распределение амплитуд моментов на некоторых собственных частотах существенно изменяется. Например, расчет без учета кривизны на частоте p_4 изменял направление вектора суммарного изгибающего момента в корневом сечении на 42° , амплитуды — на 10%.

Исследования колебаний пакетов с нарушениями однородности в результате изменения геометрических характеристик участков

связи между лопатками показали, что влияние небольших нарушений такого рода на собственные частоты и формы колебаний пакетов незначительно.

Нарушения однородности изменением геометрических характеристик лопаток мало влияют на собственные частоты колебаний, однако при этом происходит существенное перераспределение

	P_1	P_2	P_4
I	0,88 (35°)	1 (38°)	0,69 (54°)
	0,59 (33°)	0,21 (—140°)	0,69 (—115°)
	0,13 (32°)	0,94 (—145°)	0,04 (—176°)
	0,43 (146°)	0,53 (—144°)	1 (57°)
	1 (—144°)	0,68 (41°)	0,21 (—144°)
II	0,74 (32°)	1 (37°)	1,04 (49°)
	0,55 (34°)	0,12 (—136°)	0,95 (—117°)
	0,18 (32°)	0,83 (—142°)	0,29 (—141°)
	0,38 (—145°)	0,59 (—143°)	1 (61°)
	1 (—144°)	0,39 (43°)	0,31 (168°)
III	0,86 (35°)	1 (37°)	1,06 (49°)
	0,57 (34°)	0,26 (—139°)	0,71 (—111°)
	0,15 (33°)	1,01 (—142°)	0,09 (—154°)
	0,40 (—145°)	0,65 (—143°)	1 (60°)
	1 (—145°)	0,77 (40°)	0,66 (—148°)

амплитуд моментов на частотах внутривибрационных колебаний. В таблице показаны распределения амплитуд суммарных изгибающих моментов в корневых сечениях лопаток, а также углы между векторами моментов и плоскостью диска на низших собственных частотах внутривибрационных колебаний. В графе I приведены результаты расчета однородного пакета; в графе II — пакета с расстройкой по частоте, равной 3% одной крайней лопатки, за счет измене-

ния осевых моментов инерции сечений; в графе III — пакета с такой же расстройкой двух крайних лопаток.

Низшие частоты пакета с несимметричной расстройкой (Гц): $p_1 = 69,3$; $p_2 = 136,9$; $p_3 = 148,0$; $p_4 = 165,5$; пакета с симметричной расстройкой (Гц): $p_1 = 69,8$; $p_2 = 139,0$; $p_3 = 148,6$; $p_4 = 165,8$. Как симметричная, так и несимметричная расстройка вызывает перераспределение моментов. При этом изменяется не только распределение амплитуд моментов, но и направления их действия. Это, учитывая тонкостенность лопаток, является не менее важным обстоятельством, которое может значительно увеличить максимальные напряжения в сечении.

Список литературы: 1. Бауэр В. О., Шорр Б. Ф. Влияние расстройки частот лопаток на резонансные колебания. — Прочность и динамика авиационных двигателей, 1971, вып. 6, с. 75—98. 2. Воробьев Ю. С., Корсунский М. Л., Медведев Н. Г. Исследование колебаний систем парных лопаток с технологическими отклонениями. Препринт-60, Харьков, ИПМаш АН УССР, 1977. — 15 с. 3. Журавлева А. М., Петров Е. П. Расчет собственных колебаний пакетов турбинных лопаток с учетом различия их характеристик. — Динамика и прочность машин, 1979, вып. 30, с. 102—109.

Поступила 16 сентября 1978 г.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОТСТРОЙКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПНЫХ
ВИБРАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Задачи управления спектром собственных частот возникают при расчетном исследовании в процессе создания или модернизации установок различного назначения. Они имеют особую актуальность в силовых передачах транспортных машин с поршневыми ДВС [1—9]. Большой практический интерес представляет задача изменения уже сконструированной системы (реконструкция), так как в разработанном конструктором варианте учтены соображения по распределению масс и жесткостей в соответствии с решением задач геометрического и динамического синтеза [10], а также экономические и технологические соображения.

Задача оптимальной реконструкции системы с n степенями свободы заключается в таком изменении исходного вектора варьируемых параметров $q^0 = \{q_1^0, \dots, q_m^0\}$, при котором минимизируется некоторый функционал $\min_{\{q\}} I(q)$ и выполняется ряд усло-

вий, выражающих конструктивные ограничения на варьируемые параметры и требования относительно спектра собственных частот.

Функционал $I(q)$, зависящий от варьируемых параметров, чаще всего принимается в виде

$$I(q) = \sum_{\kappa=1}^m \gamma_{\kappa} (q_{\kappa} - q_{\kappa}^0)^2, \quad (1)$$

где γ_{κ} ($\kappa = 1, \dots, m$) — весовые коэффициенты.

Конструктивные ограничения на спектр частот имеют вид

$$q_i' \leq q_i \leq q_i'' \quad (i = 1, \dots, m) \quad (2)$$

или

$$\psi_i(q) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, p).$$

По требованиям к спектру различные задачи реконструкции можно классифицировать следующим образом.

1. Собственные частоты реконструированной системы не должны принадлежать заданным запретным диапазонам числовой оси:

$$\omega_j \in [\omega_j', \omega_j''] \quad (j = 1, \dots, l), \quad (3)$$

где ω_j' , ω_j'' — соответственно левая и правая границы j -го запретного диапазона.

2. s собственных частот реконструированной системы должны принимать фиксированные значения $\tilde{\omega}_j$:

$$\omega_{sj} = \tilde{\omega}_j \quad (j = 1, \dots, s). \quad (4)$$

3. s собственных частот должны удовлетворять требованиям (4), а на r других должны быть наложены ограничения типа (3).

Реконструкция требует решения задач нелинейного программирования, которые характеризуются наличием многих локальных экстремумов, достигаемых на границах многосвязных областей, допустимых в силу (2), (3). Хотя в некоторых частных случаях могут быть получены критерии возможности их решения [1—3], применяется обычно следующий прием: многократно реализуется некоторый алгоритм решения при различных начальных точках пространства варьируемых параметров. Время неудавшегося поиска считается пропорциональным вероятности отсутствия у задачи решения.

Решение задачи 1 состоит из следующих этапов: 1) определение опорной точки, удовлетворяющей (2), (3); 2) поиск ближайшего к ней локального минимума функционала (1); 3) анализ результата и организация нового цикла поиска. В эту же схему включаются графические методы [4], которые могут быть применены в случае варьирования небольшого числа параметров.

Для определения опорной точки часто используются методы случайного поиска с равномерным распределением в n -мерном кубе (2) [5,7—9], регулярные ЛП-последовательности [14]. Вопрос о выборе последовательности должен решаться с учетом простоты и удобства ее получения на данной цифровой ЭВМ, «качества» по следовательности и др.

Проверка неравенств (3) основана на решении прямой задачи отыскания собственных частот. В общем случае разветвленных и кольцевых цепных систем способы записи уравнения частот в матричном виде и в форме рекуррентных соотношений могут оказаться конкурирующими в зависимости от практического способа реализации их в алгоритмах для ЭЦВМ. Значительное сокращение объема вычислений достигается при записи уравнения частот в виде цепной дроби и замене прямой задачи простой процедурой подсчета числа знакоперемен в цепной дроби при значениях частот, равных $\omega_j, \omega_j'' (j=1, \dots, l)$ [5].

Процесс отыскания локального минимума функционала (1) может быть эффективно осуществлен сочетанием градиентного спуска с локальным случайным поиском. Такой подход к решению общей задачи (1) — (3) оказался весьма эффективным из-за быстрого действия и удобства реализации в программах для цифровых ЭВМ при решении практических задач отстройки силовых передач с ДВС [5].

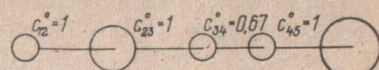
Эффективным методом решения задачи 2 является использование необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума [6]. Однако этот метод приводит к сравнительно сложному алгоритму, обладающему малым быстродействием.

Поиск других путей решения привел к способу, являющемуся модификацией алгоритма, примененного в работе [5] к задаче 1. Заменяем требования (4) следующими:

$$\tilde{\omega}_j - \varepsilon_j \leq \omega_{vj} \leq \tilde{\omega}_j + \varepsilon_j \quad (j = 1, s), \quad (5)$$

где ε_j — некоторые положительные числа.

Засеиваем куб (2) пространства параметров равномерно распределенными случайными точками до выполнения ограничений (5). Затем из полученной точки движемся по направлению к q^0 до пересечения границы (5). Вокруг точки пересечения описываем новую область поиска и вновь повторяем процедуру случайного поиска и движение к q^0 , и т. д. Поиск считаем оконченным, если N подряд взятых точек не попали в область (5). Затем сужаем область (5) вдвое:

$$\tilde{\omega}_j - \frac{\varepsilon_j}{2} \leq \omega_{vj} \leq \tilde{\omega}_j + \frac{\varepsilon_j}{2} \quad (6)$$


и повторяем процесс, однако начальную область поиска описываем вокруг решения, полученного в предыдущем цикле, что существенно повышает вероятность попадания в область (6). Главным здесь является выбор правильного соотношения между величиной ε_j и размерами области поиска. Многократно сужая область (5), выполняем равенства (4) с любой требуемой точностью.

Как показали расчеты, предложенный метод обладает достаточно высокой эффективностью: благодаря быстрдействию программы возможно проведение многократного поиска с различными точками, что придает алгоритму глобальный характер; возможность использования достаточно большого числа N с приемлемым временем счета позволяет «попадать» даже в очень маленькие по объему области отстройки. Программа, реализующая алгоритм, весьма проста и легко поддается модернизации; в частности, программы для решения задач 1 и 2 имеют лишь незначительные различия.

Преимущества предложенного метода становятся решающими при рассмотрении задачи 3. Здесь необходимо лишь небольшое изменение алгоритма задачи 2, включающее проверку дополнительных ограничений, в то время как решение другими способами становится практически трудно осуществимым.

Приведем пример решения задачи 2, выполненного на цифровые ЭВМ «Минск-32». В исходной системе (рисунок), имеющей спектр собственных частот $\omega_1^0 = 0$; $\omega_2^0 = 0,50$; $\omega_3^0 = 1,03$; $\omega_4^0 = 1,43$; $\omega_5^0 = 1,70$, варьировали все жесткости в целях получения $\omega_3 = 0,9$ и $\omega_5 = 1,6$ при одновременной минимизации функционала $I = \sum_{i=1}^4 (c_{i, i+1} - c_{i, i+1}^0)^2$; частоты отыскивали с относительной точно-

стью 0,01; в неравенствах (5) для обеих частот $\epsilon = 0,05$. Результаты расчета сведены в таблицу.

N	№ цикла	C_{12}	C_{23}	C_{34}	C_{45}	ω_3	ω_5	I
100	1	0,58	1,07	0,58	0,84	0,904	1,598	0,223
	2	Решение не найдено						
	3	Решение не найдено						
1000	1	0,57	1,01	0,63	0,90	0,903	1,605	0,196
	2*	0,58	0,98	0,63	0,97	0,914	1,610	0,179
	3	0,57	0,94	0,63	0,97	0,905	1,595	0,197

* — Точность не достигнута

Время расчета одного цикла при $N=100$ составляет менее 1 мин, при $N=1000$ — около 5 мин.

Итак, для решения рассмотренных задач управления спектром крутильных вибрационных систем наиболее целесообразным представляется использование алгоритмов, основанных на случайном поиске в пространстве варьируемых параметров с многократным решением прямой задачи. Основные преимущества этих алгоритмов — их простота, хорошая «приспособленность» к машинному счету, обеспечивающая быстроту отладки и высокую скорость работы программ. Из предложенных в настоящее время методов только они обеспечивают решение различных задач отстройки при наиболее общих ограничениях.

Список литературы: 1. Глазман И. М., Штейнвольф Л. И. Освобождение резонансно-опасных зон собственных частот вибрационной системы варьированием ее параметров. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4, с. 126—128. 2. Глазман И. М., Митин В. Н. Отстройка вибрационных систем как задача выпуклого программирования. — Докл. АН СССР, 1969, 169, № 5, с. 1026—1029. 3. Глазман И. М., Митин В. Н. Оптимальная отстройка крутильных вибрационных систем. — Динамика и прочность машин, 1967, вып. 6, с. 100—105. 4. Карабан В. Н. К задаче отстройки от резонансов многомассовых цепных систем. — Динамика и прочность машин, 1974, вып. 20, с. 16—22. 5. Карабан В. Н., Червинский С. И. Уменьшение динамических нагрузок при установившихся колебаниях варьированием параметров механических передач. — Теория механизмов и машин, 1975, вып. 18, с. 70—76. 6. Гринев В. Б., Филиппов А. П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. — Киев: Наук. думка, 1975. — 293 с. 7. Оптимизация в теории машин ЛП-поиском / Артоболевский И. И., Генкин М. Д., Гринкевич В. К. и др. — Докл. АН СССР, 200, № 6, 1971, с. 1287—1290. 8. Соболев И. М., Статников Р. Б. ЛП-поиск и задачи оптимального конструирования. — В кн.: Проблемы случайного поиска, 1972, Рига, с. 117—135. 9. Гальперин Е. А., Медник А. Н. Оптимизация спектра собственных частот механических систем методом случайного поиска. — В кн.: Автоматизация решения задач динамики машин, 1973, с. 12—23. 10. Геронимус Я. Л. Динамический синтез механизмов по методу Чебышева. — Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1958. — 136 с. 11. Терских В. П. Метод цепных дробей. Т. 1. — Л.: Судпромгиз, 1955. — 375 с. 12. Дондошанский В. К. Расчет колебаний упругих систем на ЭЦВМ. — М. — Л.: Машиностроение, 1965. — 367 с. 13. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970. — 564 с. 14. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973. — 311 с.

Поступила 2 ноября 1977 г.

А. И. ПАВЛОВ

ДИНАМИКА ПЕРЕДАЧИ С ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ
ПЕРЕДАТОЧНОГО ОТНОШЕНИЯ

Прочность и долговечность передачи определяется в основном передаваемой нагрузкой в зацеплении, которая состоит из статистической и динамической составляющих. Если значение первой задается при проектировании, то значение второй неизвестно и зависит от многих факторов (точность изготовления, скорость вращения и т. д.).

Рассмотрим динамику «точной» передачи с заданной функцией передаточного отношения. Как известно, для определения динамической составляющей, вызываемой крутильными колебаниями передачи, записываются уравнения движения:

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + CR_1(R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2) = M_1, \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 - CR_2(R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2) = -M_2, \quad (1)$$

где I_1, I_2 — осевые моменты инерции; C — жесткость зацепления; M_1, M_2 — внешние моменты; R_1, R_2 — радиусы окружностей контактных точек; φ_1, φ_2 — углы поворота колес за счет крутильных колебаний.

Функция передаточного отношения определяет отношение мгновенных угловых скоростей колес

$$u(t) = \omega_1/\omega_2. \quad (2)$$

Если колеса имеют крутильные колебания, то значения угловых скоростей

$$\omega_1 = \omega_{10} + \dot{\varphi}_1; \quad \omega_2 = \omega_{20} - \dot{\varphi}_2. \quad (3)$$

Представим функцию передаточного отношения как сумму постоянной и переменной составляющих:

$$u(t) = u_0 + u. \quad (4)$$

При этом номинальные значения угловых скоростей связаны соотношением

$$u_0 = \omega_{10}/\omega_{20} = R_2/R_1. \quad (5)$$

Подставив (3), (4), (5) в (2) и выполнив преобразование и дифференцирование, имеем $\dot{u}\omega_{20} = \ddot{\varphi}_1 + u(t)\ddot{\varphi}_2 + \dot{u}\dot{\varphi}_2$. Положим $\dot{u}\dot{\varphi}_2 = 0$. Тогда

$$\ddot{\varphi}_1 = \dot{u}\omega_{10} \cdot R_1/R_2 - u(t)\ddot{\varphi}_2. \quad (6)$$

Сложим оба уравнения (1) и подставим (6), получим

$$\ddot{\varphi}_2 = I_1 \dot{u}\omega_{10} R_1 / [I_2 - I_1 u(t)] R_2.$$

Динамическая составляющая нагрузки в передаче

$$P_d = I_2 \ddot{\varphi}_2 / R_2 = I_1 I_2 \dot{u}\omega_{10} R_1 / [I_2 - I_1 u(t)] R_2^2. \quad (7)$$

Для «точных» передач с мало отличающейся функцией передаточного отношения динамическая нагрузка

$$P_d = I_1 I_2 \dot{\omega}_{10} / [I_2 R_1 - I_1 R_2] u_0^2. \quad (8)$$

Из анализа формул (7) и (8) можно сделать следующие выводы.

1. Динамическая нагрузка в передаче зависит от соотношения осевых моментов инерции, окружной скорости и заданной функции передаточного отношения.

2. Меньшие динамические нагрузки свойственны передачам, где значение функции передаточного отношения как можно больше отличается от соотношения осевых моментов инерции.

3. Для «точных» передач с мало изменяющейся функцией передаточного отношения значение динамической нагрузки тем меньше, чем больше передаточное отношение.

Поступила 29 августа 1978 г.

УДК 62-501.7

А. Г. НИКУЛЬЧЕНКО,
Л. В. ШИПУЛИНА, канд. техн. наук

КОНЕЧНО-ШАГОВЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ РАВНОВЕСНОГО ПОЛОЖЕНИЯ САР

Одна из актуальных задач идентификации — определение параметров системы, которую в общем случае можно назвать системой авторегулирования (САР) по результатам измерения выходного сигнала. Для ряда задач идентификации, когда к решению предъявляются жесткие требования по объему запоминаемой в ЭВМ информации и времени обработки, применение классических методов (наименьших квадратов, фильтра Калмана и др.) не может быть оправдано. В связи с этим актуальна разработка метода, который позволял бы идентифицировать объекты некоторого класса за небольшое количество измерений (т. е. за небольшой промежуток съема информации) и быстро по времени обработки (следовательно, алгоритм вычислений должен быть достаточно простым). Рассмотрим объекты, изменение измеряемого выходного сигнала $\alpha(t)$ у которых описывается в общем случае следующей формулой:

$$\alpha(t) = R + \sum_{k=1}^n (a_{k, m_k} t^{m_k} + \dots + a_{k, 1} t + a_{k, 0}) \times \\ \times e^{-(c_k + i b_k) t} \sin(\omega_k t + \psi_k). \quad (1)$$

Назовем нахождение R для объектов, описываемых формулой (1), основной задачей идентификации. Разработанный конечно-шаговый метод позволяет решать основную задачу типа (1) за конечное, наперед заданное число шагов при отсутствии какой-

Для «точных» передач с мало отличающейся функцией передаточного отношения динамическая нагрузка

$$P_d = I_1 I_2 \dot{\omega}_{10} / [I_2 R_1 - I_1 R_2] u_0^2. \quad (8)$$

Из анализа формул (7) и (8) можно сделать следующие выводы.

1. Динамическая нагрузка в передаче зависит от соотношения осевых моментов инерции, окружной скорости и заданной функции передаточного отношения.

2. Меньшие динамические нагрузки свойственны передачам, где значение функции передаточного отношения как можно больше отличается от соотношения осевых моментов инерции.

3. Для «точных» передач с мало изменяющейся функцией передаточного отношения значение динамической нагрузки тем меньше, чем больше передаточное отношение.

Поступила 29 августа 1978 г.

УДК 62-501.7

А. Г. НИКУЛЬЧЕНКО,
Л. В. ШИПУЛИНА, канд. техн. наук

КОНЕЧНО-ШАГОВЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ РАВНОВЕСНОГО ПОЛОЖЕНИЯ САР

Одна из актуальных задач идентификации — определение параметров системы, которую в общем случае можно назвать системой авторегулирования (САР) по результатам измерения выходного сигнала. Для ряда задач идентификации, когда к решению предъявляются жесткие требования по объему запоминаемой в ЭВМ информации и времени обработки, применение классических методов (наименьших квадратов, фильтра Калмана и др.) не может быть оправдано. В связи с этим актуальна разработка метода, который позволял бы идентифицировать объекты некоторого класса за небольшое количество измерений (т. е. за небольшой промежуток съема информации) и быстро по времени обработки (следовательно, алгоритм вычислений должен быть достаточно простым). Рассмотрим объекты, изменение измеряемого выходного сигнала $\alpha(t)$ у которых описывается в общем случае следующей формулой:

$$\alpha(t) = R + \sum_{k=1}^n (a_{k, m_k} t^{m_k} + \dots + a_{k, 1} t + a_{k, 0}) \times \\ \times e^{-(c_k + i b_k) t} \sin(\omega_k t + \psi_k). \quad (1)$$

Назовем нахождение R для объектов, описываемых формулой (1), основной задачей идентификации. Разработанный конечно-шаговый метод позволяет решать основную задачу типа (1) за конечное, наперед заданное число шагов при отсутствии какой-

либо итерационной процедуры. При этом математически такое решение — точное.

Возьмем на оси времени ряд произвольных равноотстоящих точек t_i (расстояние между ними обозначим Δt) и вычислим значения интегралов $\beta(t_i) = \int_0^{t_i} \alpha(t) dt$ в этих точках ($\alpha(t)$ определяются (1)):

$$\begin{aligned} \beta(t_i) = & R t_i + \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^{m_k} t_i^r e^{-c_k t_i} [A_{k,r}^1 \sin(\omega_k t_i + \psi_k) \times \\ & \times \sin b_k t_i + A_{k,r}^2 \sin(\omega_k t_i + \psi_k) \cos b_k t_i + \\ & + A_{k,r}^3 \cos(\omega_k t_i + \psi_k) \sin b_k t_i + A_{k,r}^4 \cos(\omega_k t_i + \psi_k) \cos b_k t_i] + C, \end{aligned}$$

где $A_{k,r}^j$ ($k = \overline{1, n}$; $r = \overline{0, m_k}$; $j = \overline{1, 4}$); C — некоторые неизвестные постоянные. Выберем некоторую точку t_c (условно назовем ее «средней точкой») и составим следующую разность:

$$\beta_N^+ = \beta(t_c + N\Delta t) - \beta(t_c - N\Delta t). \quad (2)$$

Опуская промежуточные выкладки, получаем:

$$\begin{aligned} \beta_N^+ = & 2N\Delta t R + \sum_{k=1}^{n_1} [C_{0,k}^1 \sin Nx_{1,k} + \dots + C_{0,k}^4 \sin Nx_{4,k} + \\ & + C_{1,k}^1 N \cos Nx_{1,k} + \dots + C_{1,k}^4 N \cos Nx_{4,k} + \dots + C_{m_k,k}^1 N^{m_k} \sin Nx_{1,k} + \\ & + \dots + C_{m_k,k}^4 N^{m_k} \sin Nx_{4,k}] + \sum_{k=n_1+1}^n [C_{0,k}^1 \sin Nx_{1,k} + \dots + \\ & + C_{0,k}^4 \sin Nx_{4,k} + \dots + C_{m_k,k}^1 N^{m_k} \sin Nx_{1,k} + \\ & + \dots + C_{m_k,k}^4 N^{m_k} \sin Nx_{4,k}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $C_{i,k}^j$ ($i = \overline{0, m_k}$; $k = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, 4}$) — неизвестные, которые зависят от t_c и не зависят от N :

$$x_{1,k} = \Delta t (ic_k + b_k + \omega_k); \quad x_{2,k} = \Delta t (ic_k - b_k + \omega_k);$$

$$x_{3,k} = \Delta t (ic_k + b_k - \omega_k); \quad x_{4,k} = \Delta t (ic_k - b_k - \omega_k);$$

n_1 — число слагаемых, для которых m_k четно. Выражение (3) представляет собой уравнение относительно M неизвестных R и $C_{i,k}^j$, где $M = \sum_{k=1}^n 4(m_k + 1) + 1$. Коэффициенты при этих неизвестных также неизвестны и зависят от N . Меняя в (2) N от 1

до M , получаем M линейных уравнений относительно M неизвестных:

$$\beta_N^+ - 2N\Delta t R = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m_k} \sum_{j=1}^4 C_{i,k}^j N^i \sin \{ [2^{(-1)^i} \Pi + x_{i,k}] N \}, \quad (4)$$

где $N = \overline{1, M}$.

Пусть $\beta_N^+ - 2N\Delta t R$ — коэффициент в N -м уравнении при «неизвестном», которое равно единице. Тогда (4) — система однородных уравнений, имеющая нетривиальное решение (одно из неизвестных = 1). Следовательно, определитель системы (4) должен быть равен нулю:

$$B^+ = \begin{vmatrix} \beta_M^+ - 2M\Delta t R & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{M-1}^+ - 2(M-1)\Delta t R & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_N^+ - 2N\Delta t R & \cdot & N^{2i} \sin Nx_{1,1} & N^{2i+1} \cos Nx_{1,1} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_2^+ - 2 \cdot 2\Delta t R & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1^+ - 2\Delta t R & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь i меняется от 0 до $\left[\frac{m_1}{2}\right]$. Из-за громоздкости определителя приведены только столбцы, соответствующие $x_{1,1}$. Раскроем теперь данный определитель по элементам 1-го столбца: $\sum_{i=1}^M (\beta_i^+ -$

$$- 2M\Delta t R) A_{M+1-i,1} = 0 \quad \text{или} \quad 2M\Delta t R - \beta_M^+ = \sum_{i=1}^{M-1} (\beta_i^+ - 2i\Delta t R) Z_i,$$

где $Z_i = \frac{A_{M+1-i,1}}{A_{1,1}}$. Отсюда

$$R = 1/2\Delta t \times \left(\beta_M^+ + \sum_{i=1}^{M-1} \beta_i^+ Z_i \right) / \left(M + \sum_{i=1}^{M-1} i Z_i \right). \quad (5)$$

Чтобы по формуле (5) определить R , необходимо найти Z_i ($i = \overline{1, M-1}$). Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned} \beta_N^- &= \beta [t_c + (N+1)\Delta t] + \beta [t_c - (N+1)\Delta t] - \beta [t_c + (N-1)\Delta t] - \\ &- \beta [t_c - (N-1)\Delta t] = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m_k} \sum_{j=1}^4 D_{i,k}^j \{ (N+1)^i \times \\ &\times \cos [(2^{(-1)^i} \Pi + x_{j,k}) (N+1)] - \cos [(2^{(-1)^i} \Pi + x_{j,k}) (N-1)] (N-1)^i \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $D_{i,k}^j$ ($i = \overline{0, m_k}$; $k = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, 4}$) — снова некоторые неизвестные, которые зависят от t_c и не зависят от N . (6) представляет собой линейное уравнение относительно $M-1$ неизвестных.

Меняя в (6) N от 1 до M , получаем систему из M линейных уравнений относительно $D_{i,k}^j$:

$$\beta_N^- = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m_k} \sum_{j=1}^4 D_{i,k}^j \{ (N+1)^i \cos [(N+1) (2^{(-1)^i} \Pi + x_{j,k})] - \cos [(N-1) (2^{(-1)^i} \Pi + x_{j,k})] (N-1)^i \}, \quad (7)$$

где $N = \overline{1, m}$.

Пусть β_N^- — коэффициент в N -м уравнении при «неизвестном», равном единице. Тогда (7) — система однородных уравнений, имеющая нетривиальное решение, следовательно, ее определитель должен быть равен нулю:

$$B^- =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_M^- & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{M-1}^- & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & & \\ \beta_N^- & \cdot & (N+1)^{2i} \cos(N+1)x_{1,1} - (N+1)^{2i+1} \sin(N+1)x_{1,1} - \\ & \cdot & -(N-1)^{2i} \cos(N-1)x_{1,1} - (N-1)^{2i-1} \sin(N-1)x_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & & \\ \beta_2^- & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1^- & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь i меняется от 0 до $\left[\frac{m_1}{2} \right]$. Так же, как и для B^+ , выписаны только столбцы для $x_{1,1}$. Оказывается, что все столбцы определителя B^- (не считая 1-го) могут быть преобразованы в соответствующие столбцы B^+ . Рассмотрим элементы $(2i+2)$ -го и $(2i+3)$ -го столбцов B^- , стоящие в N -й строке:

$$\begin{aligned} & (N+1)^{2i} \cos(N+1)x_{1,1} - (N-1)^{2i} \cos(N-1)x_{1,1} = \\ & = 2 \left[1 + \frac{2i(i-1)}{2!} N^2 + \dots + N^{2i} \right] \sin Nx_{1,1} \sin x_{1,1} + \\ & \quad + (2iN + \dots + 2iN^{2i-1}) \cos Nx_{1,1} \cos x_{1,1}; \\ & (N+1)^{2i+1} \sin(N+1)x_{1,1} - (N-1)^{2i+1} \sin(N-1)x_{1,1} = \\ & = 2 \left[1 + \frac{(2i+1)2i}{2!} N^2 + \dots + N^{2i} \cdot 2i \right] \sin Nx_{1,1} \cos x_{1,1} + \\ & \quad + (2iN + \dots + N^{2i+1}) \cos Nx_{1,1} \sin x_{1,1}. \end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что если все предыдущие столбцы B^- (от 1 до $(2i+1)$ -го включительно) преобразованы в столбцы B^+ , то это преобразование выполнимо также для $(2i+2)$ -го и $(2i+3)$ -го столбцов B^- (достаточно из этих столбцов вычесть предыдущие, домноженные на определенные коэффициенты). Для 2-го и 3-го столбцов B^- ($i=0$) возможность преобразования во 2-й и 3-й

столбцы B^+ доказывается легко, а затем по индукции доказывается возможность такого преобразования для всего определителя B^- . Раскрыв преобразованный определитель B^- по элементам 1-го столбца, получим уравнение относительно тех Z_i , которые фигурируют в (5): $\sum_{i=1}^{M-1} \beta_i^- Z_i = -\beta_M^-$; Z_i зависят от N и не зависят от t_c . Меняя теперь t_c (сдвигая ее каждый раз на Δt вправо по оси времени), получаем нужные нам $(M-1)$ -уравнения относительно неизвестных Z_i :

$$\sum_{i=1}^{M-1} \beta_{1,i}^- Z_i = -\beta_{1,M}^-; \dots \sum_{i=1}^{M-1} \beta_{M-1,i}^- Z_i = -\beta_{M-1,M}^-.$$

Здесь первый индекс при β^- — номер «средней точки». Решив эту систему уравнений, найдем Z_i , а затем по формуле (5) вычислим R . Основная задача решена. Аналогично может быть построен алгоритм идентификации, который использует просто измерения $\alpha(t)$ в равноотстоящих точках, а не интегралы измерений. Однако «интегральный» метод менее подвержен погрешностям и флуктуациям при измерениях.

Потупила 14 ноября 1978 г.

УДК 621.372

С. Д. ГЕРАСИМОВ, Н. Г. КИРЕЕВ, канд. техн. наук

ДИСКРЕТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЙ ФИЛЬТР НИЖНИХ ЧАСТОТ

Постановка задачи. При решении задачи определения возмущений, действующих на объект, задач идентификации, оптимального управления и целого ряда других возникает необходимость численного дифференцирования дискретного сигнала, зашумленного высокочастотной помехой. В работе предлагается использовать для этой цели дискретный дифференцирующий фильтр нижних частот (ДДФНЧ). Синтез указанного фильтра осуществлен на основе эллиптического рекурсивного фильтра, построенного с помощью теории сплайнов [2].

Важнейшими характеристиками эллиптического рекурсивного фильтра являются: конец полосы пропускания f_c полезного сигнала и начало полосы запрета f_r , а также параметры ϵ , A , которые определяют величину пульсации амплитудно-частотной характеристики фильтра в полосе пропускания и в полосе запрета соответственно. Смысл этих параметров показан на рис. 1, а. Выбор значений параметров ϵ , A , $(f_r - f_c)$ сильно влияет на

столбцы B^+ доказывается легко, а затем по индукции доказывается возможность такого преобразования для всего определителя B^- . Раскрыв преобразованный определитель B^- по элементам 1-го столбца, получим уравнение относительно тех Z_i , которые фигурируют в (5): $\sum_{i=1}^{M-1} \beta_i^- Z_i = -\beta_M^-$; Z_i зависят от N и не зависят от t_c . Меняя теперь t_c (сдвигая ее каждый раз на Δt вправо по оси времени), получаем нужные нам $(M-1)$ -уравнения относительно неизвестных Z_i :

$$\sum_{i=1}^{M-1} \beta_{1,i}^- Z_i = -\beta_{1,M}^-; \dots \sum_{i=1}^{M-1} \beta_{M-1,i}^- Z_i = -\beta_{M-1,M}^-.$$

Здесь первый индекс при β^- — номер «средней точки». Решив эту систему уравнений, найдем Z_i , а затем по формуле (5) вычислим R . Основная задача решена. Аналогично может быть построен алгоритм идентификации, который использует просто измерения $\alpha(t)$ в равноотстоящих точках, а не интегралы измерений. Однако «интегральный» метод менее подвержен погрешностям и флуктуациям при измерениях.

Потупила 14 ноября 1978 г.

УДК 621.372

С. Д. ГЕРАСИМОВ, Н. Г. КИРЕЕВ, канд. техн. наук

ДИСКРЕТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЙ ФИЛЬТР НИЖНИХ ЧАСТОТ

Постановка задачи. При решении задачи определения возмущений, действующих на объект, задач идентификации, оптимального управления и целого ряда других возникает необходимость численного дифференцирования дискретного сигнала, зашумленного высокочастотной помехой. В работе предлагается использовать для этой цели дискретный дифференцирующий фильтр нижних частот (ДДФНЧ). Синтез указанного фильтра осуществлен на основе эллиптического рекурсивного фильтра, построенного с помощью теории сплайнов [2].

Важнейшими характеристиками эллиптического рекурсивного фильтра являются: конец полосы пропускания f_c полезного сигнала и начало полосы запрета f_r , а также параметры ϵ , A , которые определяют величину пульсации амплитудно-частотной характеристики фильтра в полосе пропускания и в полосе запрета соответственно. Смысл этих параметров показан на рис. 1, а. Выбор значений параметров ϵ , A , $(f_r - f_c)$ сильно влияет на

порядок N_1 -фильтра, системная функция которого записывается в виде $W_1(z) = \sum_{i=1}^{N_1} a_i z^i / \sum_{i=0}^{N_1} b_i z^i$.

Уменьшение параметра ε , переходной полосы ($f_r - f_c$) и увеличение параметра A влечет за собой повышение порядка фильтра. Поэтому для синтеза эллиптического рекурсивного фильтра

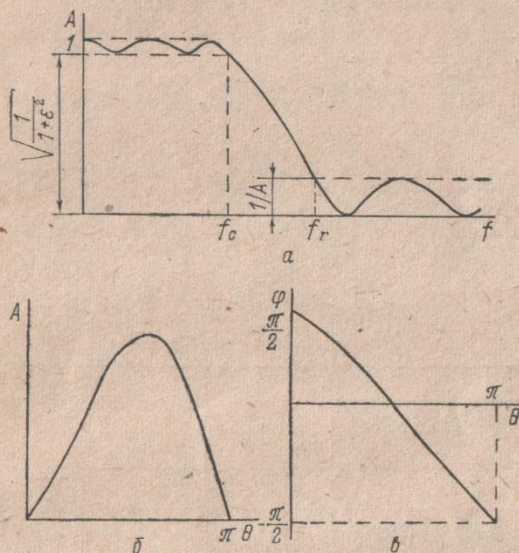


Рис. 1.

невысокого порядка необходимо, например, при уменьшении ε и увеличении A одновременно расширить переходную полосу ($f_r - f_c$).

Для построения дифференцирующего фильтра при синтезе ДДФНЧ используются как наклоны, так и моменты [3]. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики для фильтра порядка $N_2 = 3$, построенного с помощью наклонов, приведены на рис. 1, б, в. Системная функция этого фильтра имеет вид

$$W_2(z) = \sum_{i=0}^{N_2} c_i z^i / z^{N_2}.$$

Благодаря быстрой сходимости сплайнов дифференцирующий фильтр даже низкого (третьего) порядка обладает хорошими дифференцирующими свойствами. В предположении, что частота полезного сигнала, который необходимо дифференцировать, не превышает 0,1 Гц, получено, что максимальная относительная погрешность дифференцирования для фильтра третьего порядка не превышает 2,7%, для четвертого — 2,6%. Как видно из этих

данных, повышение порядка фильтра не дает значительного улучшения точности дифференцирования.

Синтез дискретного дифференцирующего фильтра нижних частот. Системная функция ДДФНЧ, состоящего из последовательно соединенных фильтра нижних частот (эллиптического рекурсивного фильтра) и дифференцирующего фильтра имеет вид

$$W(z) = \sum_{i=0}^N l_i z^i / \sum_{i=0}^N d_i z^i, \quad (1)$$

где $N = N_1 + N_2$.

Обозначив вход ДДФНЧ $X[nT]$, а выход $Y[nT]$, можно записать

$$\sum_{i=0}^N d_{N-i} Y[(n-i)T] = \sum_{i=0}^N l_{N-i} X[(n-i)T]. \quad (2)$$

Отсюда очевиден смысл коэффициентов l_i , d_i . В таблице приведены результаты расчета коэффициентов системной функции (1) для значений параметров фильтра: $f_c = 0,1$ Гц; $f_{r_1} = 0,2$ Гц; $\varepsilon = 0,32$; $A = 5$; $f_c = 0,1$ Гц; $f_{r_2} = 0,25$ Гц; $\varepsilon = 0,32$; $A = 6$.

Коэффициент ДДФНЧ	$f_{r_2} = 0,2$ Гц; N_2			$f_{r_2} = 0,25$ Гц; N_2		
	для наклонов		для моментов	для наклонов		для моментов
	3	4	3	3	4	3
l_0	-0,1523	0,0452	-0,0250	-0,1523	0,0452	-0,0250
l_1	0,6059	-0,1797	0,1995	0,6040	-0,1791	0,1992
l_2	-0,1458	0,5400	-0,6218	-0,1420	0,5389	-0,6200
l_3	-1,2052	-0,2642	0,5936	-1,1977	-0,2603	0,5899
l_4	0,7549	-0,7101	0,3218	0,7511	-0,7028	-0,3200
l_5	0,5994	0,8052	-0,7931	0,5937	0,8008	0,7891
l_6	-0,4568	0,6217	0,3250	-0,4568	0,6156	0,3250
l_7	—	-0,4968	—	—	-0,4968	—
d_0	0	0	0	0	0	0
d_1	0	0	0	0	0	0
d_2	0	0	0	0	0	0
d_3	-0,9196	0	-0,9196	-0,9100	0	-0,9100
d_4	2,8328	-0,9196	2,8323	2,8129	-0,9100	2,8129
d_5	-2,9131	2,8328	-2,9131	-2,9026	2,8129	-2,9026
d_6	1	-2,9131	1	1	-2,9026	1
d_7	—	1	—	—	1	—
A_n/A_c	25,02%	21,74%	29,63%	18,07%	15,31%	21,65%

В таблице также даны максимальные уровни пропускаемой помехи в процентах от максимальных уровней полезного сигнала на выходе ДДФНЧ в предположении, что $f_c = 0,1$ Гц, а максимальная частота полезного сигнала $f_{\max} = 0,07$ Гц. Из таблицы видно, что чем выше порядок дифференцирующего фильтра, использованного при синтезе ДДФНЧ, тем меньше отношение A_n/A_c . Однако более эффективно на это отношение влияет по-

вышение порядка фильтра нижних частот, так как оно, не увеличивая искажения в полосе пропускания, при том же значении $(f_r - f_c)$ дает возможность сильнее подавить высокочастотную помеху. Но если накладываются ограничения на порядок ДДФНЧ, то, как видно из таблицы, можно, увеличив f_r , уменьшить A_n/A_c . Следовательно, использование наклонов предпочтительнее, чем использование моментов.

На рис. 2 показаны амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики ДДФНЧ. Как видим, использованный при синтезе ДДФНЧ эллиптический рекурсивный фильтр вносит запаз-

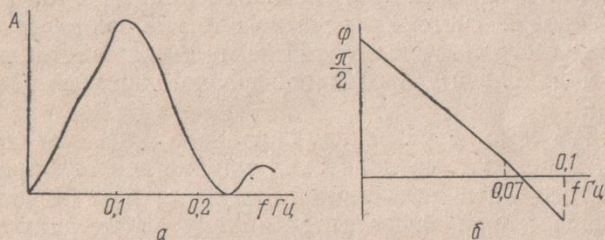


Рис. 1.

дывание $\tau_i = \varphi_i / 2\pi f_i$ при прохождении сигнала с частотой f_i . Нелинейная фазочастотная характеристика аппроксимируется линейной характеристикой на участке 0—0,1 Гц с максимальной относительной погрешностью 8%, а на участке 0—0,07 Гц — с погрешностью 1,08%. Из этого следует, что значение параметра f_c необходимо выбрать большим, чем значение максимальной частоты полезного сигнала. Чтобы обеспечить линейность фазочастотной характеристики синтезированного фильтра в диапазоне частот 0—0,07 Гц, необходимо иметь значение параметра $f_c = 0,1$ Гц. Для всех сигналов с этими частотами задержка τ_i одинакова, что позволяет точно учесть отличие фазочастотной характеристики ДДФНЧ от фазочастотной характеристики идеального дифференцирующего фильтра и определить момент времени, в который вычисляется производная сигнала.

Список литературы. 1. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. — М.: Сов. радио, 1973. — 367 с. 2. Литвинов В. Н., Несвояль А. Г. Об использовании теории сплайнов для построения дискретных дифференцирующих алгоритмов. — Математическая физика, 1975, вып. 17, с. 137—142. 3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972. — 320 с.

Поступила 25 октября 1978 г.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ГАШЕНИЯ КАЧАНИЙ РОТОРА СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ В СИСТЕМЕ ПРОКАТНЫЙ СТАН — ДВИГАТЕЛЬ

Переходные процессы в системе прокатный стан — двигатель, связанные с захватом валками прокатываемого металла, являются одной из главных причин появления динамических перегрузок в силовой системе прокатного стана, которые приводят к выходу из строя узлов главного привода в станах горячей прокатки и появлению продольной разнотолщинности в готовой продукции.

Известные методы устранения данного явления сводятся, в частности, к подбору механических параметров валопровода либо материала стержней демпферной клетки [1]. Указанные меры хотя и способствуют более интенсивному затуханию колебаний ротора двигателя и уменьшению коэффициентов динамичности на участках валопровода, однако динамические перегрузки остаются достаточно велики.

Пусть номинальному режиму работы синхронного двигателя (СД) (до захвата валками прокатываемого металла) соответствует некоторый угол Θ_1 между ротором и полем статора. При этом существует соответствие между нагрузочным моментом на валу СД M_T и электромагнитным моментом двигателя M_Ψ .

При набросе нагрузки на СД (захват валками прокатываемого металла) равновесие между нагрузочным и электромагнитным моментами нарушается $M_T > M_\Psi$, вследствие чего начинается рост угла Θ . Возникают затухающие колебания ротора СД вокруг значения $\Theta = \Theta_2$, соответствующего новой нагрузке.

Смысл предлагаемого метода заключается в том, чтобы путем управления возбуждением СД к моменту наброса нагрузки установить ротор СД в положение, соответствующее новой нагрузке. При этом, чем за более короткое время будет осуществлена эта установка, тем меньшую погрешность будет вносить неравномерность скорости движения прокатываемого металла. Сформулируем задачу математически.

Поведение синхронной машины описывается известными уравнениями Парка — Горева [2]:

$$\dot{\Psi}_d = \Psi_q(1 + S) - r_d i_d - e_d; \quad \dot{\Psi}_q = e_q - \Psi_d(1 + S) - r_q i_q;$$

$$\dot{\Psi}_f = e_f - r_f i_f; \quad \dot{\Psi}_{3d} = -r_{3d} i_{3d}; \quad \dot{\Psi}_{3q} = -r_{3q} i_{3q};$$

$$\dot{S} = \frac{1}{H_i} (M_T - \Psi_q i_d + \Psi_d i_q); \quad \dot{\Theta} = S. \quad (1)$$

Здесь Ψ_d, Ψ_q — потокосцепления обмотки статора соответственно по продольной и поперечной осям; $\Psi_{\varnothing d}, \Psi_{\varnothing q}$ — потокосцепления демпферной обмотки по продольной оси d и поперечной оси q ; Ψ_f — потокосцепление обмотки возбуждения; S — скольжение ротора относительно поля статора; e_f — напряжение на обмотке возбуждения; e_d, e_q — продольная и поперечная составляющие напряжения сети; i_d, i_q — продольная и поперечная составляющие тока статора; i_f — ток возбуждения; $i_{\varnothing d}, i_{\varnothing q}$ — продольная и поперечная составляющие тока эквивалентной демпферной обмотки; r — активное сопротивление обмотки статора; r_f — активное сопротивление обмотки возбуждения; $r_{\varnothing d}$ — активные сопротивления продольного и поперечного демпферных контуров; H_f — инерциальная постоянная.

Потокосцепления обмоток синхронной машины связаны с токами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\Psi_d &= x_d i_d + x_{afd} i_f + x_{a\varnothing d} i_{\varnothing d}; & \Psi_q &= x_q i_q + x_{a\varnothing q} i_{\varnothing q}; \\ \Psi_f &= x_{afd} i_d + x_f i_f + x_{f\varnothing d} i_{\varnothing d}; & \Psi_{\varnothing d} &= x_{a\varnothing d} i_d + x_{f\varnothing d} i_f + x_{\varnothing d} i_{\varnothing d}; \\ & & \Psi_{\varnothing q} &= x_{a\varnothing q} i_q + x_{\varnothing q} i_{\varnothing q}.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $x_d, x_q, x_{afd}, x_{a\varnothing d}, x_{a\varnothing q}, x_{f\varnothing d}, x_{\varnothing d}, x_{\varnothing q}$ — реактивности СД. Разрешим систему (2) относительно токов. Пределав необходимые преобразования, получим

$$\begin{aligned}\Delta &= x_{a\varnothing q} (x_q x_{\varnothing q} - x_{a\varnothing q}^2) (x_f x_d x_{\varnothing d} - x_d x_{f\varnothing d} - \\ &\quad - x_{a\varnothing d}^2 x_{\varnothing d} + 2x_{afd} x_{a\varnothing d} x_{f\varnothing d} - x_f x_{a\varnothing d}^2),\end{aligned}$$

где Δ — определитель системы (2);

$$\begin{aligned}i_d &= A_1 \Psi_d + A_2 \Psi_f + A_3 \Psi_{\varnothing d}; & i_q &= A_4 \Psi_q + A_5 \Psi_{\varnothing q}; \\ i_f &= A_3 \Psi_d + A_6 \Psi_f + A_7 \Psi_{\varnothing d}; & i_{\varnothing d} &= A_8 \Psi_d + A_7 \Psi_f + A_3 \Psi_{\varnothing d}; \\ i_{\varnothing q} &= A_9 \Psi_q - A_{10} \Psi_q.\end{aligned}\quad (3)$$

При этом A_i ($i = 1, \dots, 10$) можно выразить через реактивности машины:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{x_f x_{\varnothing d} - x_{f\varnothing d}^2}{\Delta}; & A_2 &= \frac{x_{a\varnothing d} x_{f\varnothing d} - x_{\varnothing d} x_{afd}}{\Delta}; \\ A_3 &= \frac{x_{afd} x_{f\varnothing d} - x_f x_{a\varnothing d}}{\Delta}; & A_4 &= \frac{x_{\varnothing q}^2}{x_{a\varnothing q} (x_q x_{\varnothing q} - x_{a\varnothing q}^2)}; \\ A_5 &= \frac{x_{\varnothing q}}{x_{a\varnothing q}^2 - x_q x_{\varnothing q}}; & A_6 &= \frac{x_d x_{\varnothing d} - x_{a\varnothing d}^2}{\Delta}; \\ A_7 &= \frac{x_{a\varnothing d} x_{afd} - x_d x_{f\varnothing d}}{\Delta}; & A_8 &= \frac{x_d x_f - x_{afd}^2}{\Delta}; \\ A_9 &= \frac{x_q}{x_q x_{\varnothing q} - x_{a\varnothing q}^2}; & A_{10} &= \frac{x_{a\varnothing q}}{x_q x_{\varnothing q} - x_{a\varnothing q}^2}.\end{aligned}\quad (4)$$

Пусть

$$\begin{aligned}\Psi_d = x_1, \Psi_q = x_2, \Psi_f = x_3, \Psi_{\partial d} = x_4, \Psi_{\partial q} = x_5, \\ S = x_6, \Theta = x_7, e_f = U.\end{aligned}\quad (5)$$

Подставляя (3) в (1) с учетом (4) и (5), получим

$$\begin{aligned}\dot{x}_{11} = x_2 (1 + x_6) - r (A_1 x_1 + A_2 x_3 + A_3 x_4) - e \sin x_7; \\ \dot{x}_2 = e \cos x_7 - x_1 (1 + x_7) - r (A_4 x_2 + A_5 x_5); \quad \dot{x}_3 = U - r_f (A_3 x_1 + \\ + A_6 x_3 + A_7 x_4); \quad \dot{x}_4 = -r_{\partial d} (A_8 x_1 + A_7 x_3 + A_3 x_4); \\ \dot{x}_5 = -r_{\partial q} (A_9 x_5 - A_{10} x_2); \quad \dot{x}_6 = -\frac{1}{H_1} [M_T + x_2 (A_1 x_1 + A_2 x_3 + \\ + A_3 x_4) - x_1 (A_4 x_2 + A_5 x_5)]; \quad \dot{x}_7 = x_6.\end{aligned}\quad (6)$$

Таким образом, задачу можно сформулировать следующим образом. Необходимо найти допустимое управление U , переводящее систему (6) из начального состояния

$$\begin{aligned}X_0 (x_1 = \Psi_{d0}, \quad x_2 = \Psi_{q0}, \quad x_3 = \Psi_{f0}, \quad x_4 = \Psi_{\partial d0}, \quad x_5 = \Psi_{\partial q0}, \quad x_6 = 0, \\ x_7 = \Theta_1),\end{aligned}\quad (7)$$

а заданное конечное состояние

$$X_k (x_7 = \Theta_2) \quad (8)$$

за минимальное время.

Под допустимым будем понимать управляющее воздействие, удовлетворяющее условию

$$|U(t)| \leq e_{f \max}, \quad (9)$$

где $e_{f \max}$ — потолок возбуждения СД.

Составим функцию Гамильтона для системы (6):

$$\begin{aligned}H = p_1 [x_2 (1 + x_6) - r (A_1 x_1 + A_2 x_3 + A_3 x_4) - e \sin x_7] + \\ + p_2 (e \cos x_7 - x_1 (1 + x_7) - r (A_4 x_2 + A_5 x_5)) + p_3 [U - r_f (A_3 x_1 + \\ + A_6 x_3 + A_7 x_4)] + p_4 [-r_{\partial d} (A_8 x_1 + A_7 x_3 + A_3 x_4)] + p_5 [-r_{\partial q} (A_9 x_5 - \\ - A_{10} x_2)] + p_6 \left\{ -\frac{M_T}{H_1} - \frac{1}{H_1} x_2 (A_1 x_1 + A_2 x_3 + A_3 x_4) - \right. \\ \left. - x_1 (A_4 x_2 + A_5 x_5) \right\} + p_7 x_6.\end{aligned}\quad (10)$$

Из (8) получим уравнения сопряженной системы:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 = r A_1 p_1 + (1 + x_7) p_2 + r_f A_3 p_3 + r_{\partial d} A_8 p_4 + \frac{(A_1 + A_4) x_2}{H_1} p_6; \\ \dot{p}_2 = -(1 + x_6) p_1 + r A_4 p_2 - r_{\partial q} A_{10} p_5 + \frac{(A_1 - A_4) x_1 + A_2 x_3 + A_3 x_4}{H_1} p_6;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_3 &= rA_2p_1 - A_6p_3 + r_{3d}A_7p_4 + \frac{A_2}{H_1}p_6; \quad \dot{p}_4 = rA_3p_1 + r_1A_7p_3 + \\ &+ r_{3d}A_3p_4 + \frac{A_3}{H_1}p_6; \quad \dot{p}_5 = rA_5p_2 + r_{3q}A_9p_5 - \frac{A_5x_1}{H_1}p_6; \\ \dot{p}_6 &= -x_2p_1 - p_7; \quad \dot{p}_7 = (e \cos x_7)p_1 + (x_1 + e \sin x_7)p_2.\end{aligned}\quad (11)$$

Из (8) можно получить условие максимума функции H :

$$H = e_{f \max} \operatorname{sign} p_3. \quad (12)$$

Из условий трансверсальности [3] имеем граничные условия для сопряженных переменных

$$\begin{aligned}p_{i0}(t = t_k) &= 0, \quad (i = 1, \dots, 6); \quad (H - 1)|_{t=t_k} = 0; \\ p_8(t = t_k) &= -1.\end{aligned}\quad (13)$$

В результате проблема свелась к решению краевой задачи (6)—(9), (11)—(13) известными методами.

Список литературы: 1. Дабалян А. В., Дудко В. Ф. Динамические нагрузки в черновой клетке широкополосного стана.— Динамика и прочность машин. 1976, вып. 23, с. 138—142. 2. Важнов А. И. Основы теории переходных процессов синхронной машины.— М.—Л.: Госэнергоиздат. 1960.—312 с. 3. Летоз А. М. Динамика полета и управление.— М.: Наука, 1969.—360 с. 4. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев А. В. Механика космического полета с малой тягой.— М.: Наука, 1966.—540 с.

Поступила 25 октября 1978 г.

УДК 62—503

Э. А. ПИКUR, канд. техн. наук, В. П. СЕВЕРИН,
В. В. ГРУЗДЫНЬ, Г. Ю. ТРОФИМЧЕНКО

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Для уменьшения затрат времени на подготовку к решению и решение задач оптимизации параметров систем автоматического регулирования (САР) необходимо создать пакет прикладных программ с модульным принципом организации. В пакет должны входить самые эффективные алгоритмы. Эффективность алгоритма определяется его характеристиками: абсолютной погрешностью решения, временем решения (числом операций), памятью ЦВМ. Оптимизация алгоритмов, улучшение их характеристик расширяют возможности применения методов теории автоматического регулирования при решении практических задач. Здесь важную роль играют вычислительные эксперименты.

Если дан алгоритм вычисления критерия качества САР по значениям параметров, которые варьируются в некоторой об-

$$\begin{aligned}\dot{p}_3 &= rA_2p_1 - A_6p_3 + r_{3d}A_7p_4 + \frac{A_2}{H_1}p_6; \quad \dot{p}_4 = rA_3p_1 + r_1A_7p_3 + \\ &+ r_{3d}A_3p_4 + \frac{A_3}{H_1}p_6; \quad \dot{p}_5 = rA_5p_2 + r_{3q}A_9p_5 - \frac{A_5x_1}{H_1}p_6; \\ \dot{p}_6 &= -x_2p_1 - p_7; \quad \dot{p}_7 = (e \cos x_7)p_1 + (x_1 + e \sin x_7)p_2.\end{aligned}\quad (11)$$

Из (8) можно получить условие максимума функции H :

$$H = e_{f \max} \operatorname{sign} p_3. \quad (12)$$

Из условий трансверсальности [3] имеем граничные условия для сопряженных переменных

$$\begin{aligned}p_{i0}(t = t_k) &= 0, \quad (i = 1, \dots, 6); \quad (H - 1)|_{t=t_k} = 0; \\ p_8(t = t_k) &= -1.\end{aligned}\quad (13)$$

В результате проблема свелась к решению краевой задачи (6)–(9), (11)–(13) известными методами.

Список литературы: 1. Дабагян А. В., Дудко В. Ф. Динамические нагрузки в черновой клетке широкополосного стана.— Динамика и прочность машин. 1976, вып. 23, с. 138–142. 2. Важнов А. И. Основы теории переходных процессов синхронной машины.— М.—Л.: Госэнергоиздат. 1960.—312 с. 3. Летоз А. М. Динамика полета и управление.— М.: Наука, 1969.—360 с. 4. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев А. В. Механика космического полета с малой тягой.— М.: Наука, 1966.—540 с.

Поступила 25 октября 1978 г.

УДК 62—503

Э. А. ПИКУР, канд. техн. наук, В. П. СЕВЕРИН,
В. В. ГРУЗДЫНЬ, Г. Ю. ТРОФИМЧЕНКО

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Для уменьшения затрат времени на подготовку к решению и решение задач оптимизации параметров систем автоматического регулирования (САР) необходимо создать пакет прикладных программ с модульным принципом организации. В пакет должны входить самые эффективные алгоритмы. Эффективность алгоритма определяется его характеристиками: абсолютной погрешностью решения, временем решения (числом операций), памятью ЦВМ. Оптимизация алгоритмов, улучшение их характеристик расширяют возможности применения методов теории автоматического регулирования при решении практических задач. Здесь важную роль играют вычислительные эксперименты.

Если дан алгоритм вычисления критерия качества САР по значениям параметров, которые варьируются в некоторой об-

ласти, задача оптимизации параметров сводится к задаче математического программирования. Задавая точность решения по аргументам и по функциям 10^{-4} , можно произвести оптимизацию алгоритмов по времени решения (числу операций).

Среди численных методов решения задач математического программирования один из самых эффективных — метод скользящего допуска [1]. В этом методе величина, характеризующая размер исходного многогранника в поиске допустимой точки, определяется как $0,05\Phi$, где Φ — значение критерия допуска. Целесообразность коэффициента 0,05 исследовали при минимизации функции

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2; \quad x_{10} = x_{20} = 2 \quad (1)$$

с ограничениями

$$x_1 - 2x_2 + 1 = 0; \quad 0,25x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0; \quad (2)$$

$$x_1^2 - x_2 \leq 0; \quad x_1 + x_2 - 2 \leq 0. \quad (3)$$

Оказалось, что эффективнее брать коэффициент 0,2, при котором время минимизации функции (1) с ограничениями (2) уменьшается на 20%, количество вычислений ограничений — на 30%, а при минимизации функции (1) с ограничениями (3) время уменьшается на 9%, количество вычислений ограничений — на 38%.

Комплекс-метод [2] решения задач с ограничениями типа неравенств при минимизации функции (1) с ограничениями (3) оказался эффективнее метода скользящего допуска по времени решения на 22%, по количеству вычислений функции — на 62%, по количеству вычислений ограничений — на 51%. Однако для плохо обусловленной функции

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, \quad x_{10} = -1, 2; \quad x_{20} = 1,$$

а в оптимизации параметров САР в основном встречаются плохо обусловленные функции, скользящий допуск, обладающий более гибкой стратегией поиска, эффективнее комплекс-метода по количеству вычислений функции на 40%.

Оптимизация алгоритмов вычисления критерия качества САР — неотъемлемая часть повышения эффективности пакета оптимизации САР. Для линейаризованной модели САР на основании статьи [3] разработан оптимальный по числу операций алгоритм вычисления обобщенной интегральной квадратичной оценки

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^l \alpha_i [y^{(i)}(t)]^2 dt \quad (4)$$

по коэффициентам передаточной функции

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n},$$

где $y(t) = x(\infty) - x(t)$ — отклонение регулируемой величины $x(t)$ в переходном процессе; $a_i (i = 0, 1, \dots, l)$ — заданные коэффициенты критерия; $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$, $b_j (j = 0, 1, \dots, m)$ — функции варьируемых и постоянных параметров САР. Известный алгоритм [4] вычисления частного вида ($l = 0$) оценки (4) также создан на основании формул из [3], но в отличие от нового алгоритма в нем определители раскрываются не по строкам, а по столбцам. Это отличие приводит к большей эффективности нового, более универсального алгоритма, которая повышается с ростом порядка САР. Так, при $n = 6$ по алгоритму [4] требуется проведение 66 операций, по новому алгоритму — 60, при $n = 10$ — 228 и 160 соответственно.

Для нелинейной САР значения оптимальных параметров линеаризованной модели САР могут быть уточнены, если в вычислении интегральной оценки (4) использовать численные методы интегрирования системы дифференциальных уравнений САР, учитывающей существенные нелинейности и дополненной уравнением вычисления интегральной квадратичной оценки. Метод Мерсона — лучший среди одношаговых методов по точности [5]. Если применить метод Мерсона с автоматическим увеличением или уменьшением, в зависимости от текущей погрешности, шага в два раза, процесс интегрирования станет протекать на 20% быстрее [6]. Чтобы исследовать эффективность непрерывного изменения шага [7], интегрировали систему дифференциальных уравнений, описывающую работу основного звена электрогидравлической системы регулирования турбины:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2,5x_2; \quad \dot{x}_2 = 10x_3; \quad \dot{x}_3 = 20(2 - 4x_1 - 2,64x_2 - x_3); \\ \dot{x}_4 &= (x_1 - 0,5)^2 + 0,16\dot{x}_1^2 + 0,0625\dot{x}_2^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$; интервал интегрирования $[0; 2]$

$$x_4(\infty) = \int_0^{\infty} (y^2 + 0,16\dot{y}^2 + 0,01\ddot{y}^2) dt = 0,059635390,$$

$y(t) = 0,5 - x_1(t)$ — отклонение регулируемой величины $x_1(t)$ в переходном процессе. При достижении одинаковой требуемой абсолютной точности определения оценки качества, которая задавалась в пределах $(5 \div 20) \times 10^{-6}$, алгоритм с непрерывным изменением шага использовал на 30% меньше вычислений правых частей системы (5), чем алгоритм с дискретным изменением шага.

Итак, в пакет оптимизации параметров САР предлагается включить в качестве основных программных модулей метод скользящего допуска с коэффициентом 0,2, характеризующим размер исходного симплекса при нахождении допустимой точки, программу вычисления обобщенной интегральной квадратичной оценки линейной САР, метод Мерсона с непрерывным изменением величины шага. Оптимизация алгоритмов — непрерывный процесс, поэтому содержание пакета следует совершенствовать.

Список литературы: 1. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.—М.: Мир, 1975.—534 с. 2. Ермуратский П. В. Комплекс-метод. Планирование эксперимента.—Тр. Моск. энерг. ин-та, 1970, вып. 76, с. 89—94, 156—157. 3. Кац А. М. К вопросу о вычислении квадратичного качества регулирования.—Прикл. математика и механика, 1952, 16, с. 362—364. 4. Littlewood P. G. Algorithm 48. Procedure for the Evaluation of an Integral Occurring in the Mean Square Response Analysis of Linear Systems.—The Computer Journal, 1970, 13, № 2, p. 207—208. 5. Королев В. К. Сравнение некоторых методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—Вычислительные системы, 1975, вып. 64, с. 108—126. 6. Ланс. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—390 с. 7. Christiansen J. Algorithm 77. Solving a system of simultaneous ordinary differential equations of the first order using a method for automatic step change.—The Computer Journal, 1973, 16, № 2, p. 187—188.

Поступила 17 октября 1978 г.

УДК 62—503

В. П. СЕВЕРИН, И. Н. ПЕТРОВА

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА

Выбирая параметры системы автоматического регулирования по минимуму интегральной квадратичной оценки качества

$$I_l = \int_0^{\infty} [T_0 x^2 + T_1 \dot{x}^2 + \dots + T_l x^{(l)^2}] dt, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения, можно приблизить переходной процесс к заданной кривой, определяемой решением дифференциального уравнения

$$\tau_l x^{(l)} + \tau_{l-1} x^{(l-1)} + \dots + \tau_1 \dot{x} + \tau_0 x = 0. \quad (2)$$

При этом чем выше порядок оценки l , тем сложнее кривая и тем точнее задается желаемый вид переходного процесса [1]. Коэффициенты τ_i ($i = 0, 1, \dots, l$) могут быть определены, например, по нормированным переходным характеристикам [2].

Выясним, каким образом, зная эти коэффициенты, можно вычислить коэффициенты T_i ($i = 0, 1, \dots, l$) оценки (1). Для краткости преобразований введем обозначение

$$I_{kl} = \int_0^{\infty} x^{(k)} x^{(l)} dt, \quad k \geq l.$$

Минимизируя интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} [\tau_l x^{(l)} + \tau_{l-1} x^{(l-1)} + \dots + \tau_1 \dot{x} + \tau_0 x]^2 dt = \\ & = \int_0^{\infty} [\tau_0^2 x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \dots + \tau_l x^{(l)^2}] dt + 2 \sum_{k=1}^l \tau_k \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i I_{ki}, \end{aligned} \quad (3)$$

Список литературы: 1. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.—М.: Мир, 1975.—534 с. 2. Ермуратский П. В. Комплекс-метод. Планирование эксперимента.—Тр. Моск. энерг. ин-та, 1970, вып. 76, с. 89—94, 156—157. 3. Кац А. М. К вопросу о вычислении квадратичного качества регулирования.—Прикл. математика и механика, 1952, 16, с. 362—364. 4. Littlewood P. G. Algorithm 48. Procedure for the Evaluation of an Integral Occurring in the Mean Square Response Analysis of Linear Systems.—The Computer Journal, 1970, 13, № 2, p. 207—208. 5. Королев В. К. Сравнение некоторых методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—Вычислительные системы, 1975, вып. 64, с. 108—126. 6. Ланс. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—390 с. 7. Christiansen J. Algorithm 77. Solving a system of simultaneous ordinary differential equations of the first order using a method for automatic step change.—The Computer Journal, 1973, 16, № 2, p. 187—188.

Поступила 17 октября 1978 г.

УДК 62—503

В. П. СЕВЕРИН, И. Н. ПЕТРОВА

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА

Выбирая параметры системы автоматического регулирования по минимуму интегральной квадратичной оценки качества

$$I_l = \int_0^{\infty} [T_0 x^2 + T_1 \dot{x}^2 + \dots + T_l x^{(l)^2}] dt, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения, можно приблизить переходной процесс к заданной кривой, определяемой решением дифференциального уравнения

$$\tau_l x^{(l)} + \tau_{l-1} x^{(l-1)} + \dots + \tau_1 \dot{x} + \tau_0 x = 0. \quad (2)$$

При этом чем выше порядок оценки l , тем сложнее кривая и тем точнее задается желаемый вид переходного процесса [1]. Коэффициенты τ_i ($i = 0, 1, \dots, l$) могут быть определены, например, по нормированным переходным характеристикам [2].

Выясним, каким образом, зная эти коэффициенты, можно вычислить коэффициенты T_i ($i = 0, 1, \dots, l$) оценки (1). Для краткости преобразований введем обозначение

$$I_{kl} = \int_0^{\infty} x^{(k)} x^{(l)} dt, \quad k \geq l.$$

Минимизируя интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} [\tau_l x^{(l)} + \tau_{l-1} x^{(l-1)} + \dots + \tau_1 \dot{x} + \tau_0 x]^2 dt = \\ & = \int_0^{\infty} [\tau_0^2 x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \dots + \tau_l x^{(l)^2}] dt + 2 \sum_{k=1}^l \tau_k \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i I_{ki}, \end{aligned} \quad (3)$$

мы приблизим переходный процесс к экстремали (2).

Вид интегралов I_{ki} существенно зависит от разности $\delta = k - i$. Установим эту зависимость. Применяя формулу интегрирования по частям для определенного интеграла, учитывая, что для установившегося переходного процесса при $t \rightarrow \infty$ $x^{(k)}(t) \rightarrow 0$, и для ясности формул полагая $x^{(k)}(0) = x_k$, получим соотношения

$$\delta = 1: I_{10} = -x_0^2/2, \quad I_{21} = -x_1^2/2, \quad I_{32} = -x_2^2/2, \quad \dots;$$

$$\delta = 2: I_{20} = -x_0x_1 - I_{11}, \quad I_{31} = -x_1x_2 - I_{22}, \quad I_{42} = -x_2x_3 - I_{33}, \dots;$$

$$\delta = 3: I_{30} = -x_0x_2 + x_1^2/2, \quad I_{41} = -x_1x_3 + x_2^2/2, \dots;$$

$$\delta = 4: I_{40} = -x_0x_3 + x_1x_2 + I_{22}, \quad I_{51} = -x_1x_4 + x_2x_3 + I_{33}, \dots;$$

$$\delta = 5: I_{50} = -x_0x_4 + x_1x_3 - x_2^2/2, \quad I_{61} = -x_1x_5 + x_2x_4 - x_3^2/2, \dots$$

Подставляя эти выражения в (3) и приводя подобные члены, для оценки (1) имеем

$$I_l = \int_0^\infty [\tau_l x^{(l)} + \tau_{l-1} \dot{x}^{(l-1)} + \dots + \tau_1 \dot{x} + \tau_0 x]^2 dt + C_l,$$

где C_l — значение минимума минимума оценки качества, т. е. наименьшее из всех возможных ее значений, которое достигается лишь при выполнении (1). При этом коэффициенты оценки вычисляются так:

$$l = 0: T_0 = \tau_0^2; \quad l = 1: T_0 = \tau_0^2, \quad T_1 = \tau_1^2; \quad l = 2: T_0 = \tau_0^2,$$

$$T_1 = \tau_1^2 - 2\tau_0\tau_2, \quad T_2 = \tau_2^2; \quad l = 3: T_0 = \tau_0^2, \quad T_1 = \tau_1^2 - 2\tau_0\tau_2,$$

$$T_2 = \tau_2^2 - 2\tau_1\tau_3, \quad T_3 = \tau_3^2; \quad l = 4: T_0 = \tau_0^2, \quad T_1 = \tau_1^2 - 2\tau_0\tau_2,$$

$$T_2 = \tau_2^2 - 2\tau_1\tau_3 + 2\tau_0\tau_4, \quad T_3 = \tau_3^2 - 2\tau_2\tau_4, \quad T_4 = \tau_4^2;$$

Эти соотношения позволяют выявить закономерность вычисления T_k ($k = 0, 1, \dots, l$) и написать общие формулы для произвольного l : $T_k = \tau_k^2$ при $k = 0, l$;

$$T_k = \tau_k^2 + 2 \sum_{i=1}^w (-1)^i \tau_{k-i} \tau_{k+i} \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, l-1,$$

где $w = \min \{k, l-k\}$.

Для C_l проще написать рекуррентные выражения:

$$C_0 = 0; \quad C_1 = C_0 + \tau_1 \{x_0 [\tau_0 x_0]\}; \quad C_2 = C_1 + \tau_2 \{x_1 [\tau_1 x_1 + 2\tau_0 x_0]\};$$

$$C_3 = C_2 + \tau_3 \{x_2 [\tau_2 x_2 + 2(\tau_1 x_1 + \tau_0 x_0)] - x_1 [\tau_0 x_1]\};$$

$$C_4 = C_3 + \tau_4 \{x_3 [\tau_3 x_3 + 2(\tau_2 x_2 + \tau_1 x_1 + \tau_0 x_0)] - x_2 [\tau_1 x_2 + 2\tau_0 x_1]\};$$

$$C_5 = C_4 + \tau_5 \{x_4 [\tau_4 x_4 + 2(\tau_3 x_3 + \tau_2 x_2 + \tau_1 x_1 + \tau_0 x_0)] - x_3 [\tau_2 x_3 +$$

$$+ 2(\tau_1 x_2 + \tau_0 x_1)] + x_2 [\tau_0 x_2]\}; \quad C_6 = C_5 + \tau_6 \{x_5 [\tau_5 x_5 + 2(\tau_4 x_4 +$$

$$+ \tau_3 x_3 + \tau_2 x_2 + \tau_1 x_1 + \tau_0 x_0)] - x_4 [\tau_3 x_4 + 2(\tau_2 x_3 + \tau_1 x_2$$

$$+ \tau_0 x_1)] + x_3 [\tau_1 x_3 + 2\tau_0 x_2]\}.$$

Эти соотношения не позволяют написать общую формулу вычисления C_l , однако по ним составлен алгоритм вычисления C_l для произвольного l .

Алгоритм вычисления C_l .

1. Определить $v = \{l/2$ при l четном; $(l+1)/2$ при l нечетном $\}$. Положить $k=0$, $C_k=0$; $d_i=s_i=0$ для $i=1, 2, \dots, v$.
2. Положить $k=k+1$. Определить $w = \{k/2$ при k четном; $(k+1)/2$ при k нечетном $\}$.
3. Для $i=1, 2, \dots, w$ положить $s_i = s_i + d_i$, вычислить $d_i = \tau_{k-2i+1} x_{k-i}$, положить $s_i = s_i + d_i$.
4. Вычислить

$$C_k = C_{k-1} + \tau_k \sum_{i=1}^v (-1)^{i+1} x_{k-i} s_i.$$

5. Если $k < l$, идти к 2.

Список литературы: 1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 632 с. 2. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. — М.: Госэнергоиздат, 1962. — 326 с.

Поступила 17 октября 1978 г.

УДК 621.397

Л. Б. КАЩЕЕВ

МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ТЕЛЕВИЗИОННЫМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ ПУТЕМ ТРАНСФОРМАЦИИ РАСТРА

Техническое совершенствование средств вычислительной техники и расширение диапазона задач, решаемых с помощью ЭВМ, в значительной степени повысили требования, предъявляемые к системам связи оператора и машины. Значительное распространение получили телевизионные системы отображения информации (ТСОИ) благодаря своему быстрдействию и наглядности представления данных.

Для обеспечения быстрого и точного восприятия информации иногда необходимо переместить на экране ТСОИ весь кадр (т. е. изображение вместе с фоном). Это позволит обеспечить оперативный контроль за положением и состоянием объекта управления и привлечь к процессу обмена информацией весь экран, включая его периферийные зоны, играющие, как правило, пассивную роль. Для некоторых специфических случаев данная проблема решена и соответствующие системы созданы [1, 2], однако все они отличаются строгой специализацией и мало универсальны. Изучение вопроса показывает, что решение поставленной задачи распадается на два значительных этапа — математическое описание

Эти соотношения не позволяют написать общую формулу вычисления C_l , однако по ним составлен алгоритм вычисления C_l для произвольного l .

Алгоритм вычисления C_l .

1. Определить $v = \{l/2$ при l четном; $(l+1)/2$ при l нечетном $\}$. Положить $k=0$, $C_k=0$; $d_i=s_i=0$ для $i=1, 2, \dots, v$.
2. Положить $k=k+1$. Определить $w = \{k/2$ при k четном; $(k+1)/2$ при k нечетном $\}$.
3. Для $i=1, 2, \dots, w$ положить $s_i = s_i + d_i$, вычислить $d_i = \tau_{k-2i+1} x_{k-i}$, положить $s_i = s_i + d_i$.
4. Вычислить

$$C_k = C_{k-1} + \tau_k \sum_{i=1}^v (-1)^{i+1} x_{k-i} s_i.$$

5. Если $k < l$, идти к 2.

Список литературы: 1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 632 с. 2. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. — М.: Госэнергоиздат, 1962. — 326 с.

Поступила 17 октября 1978 г.

УДК 621.397

Л. Б. КАЩЕЕВ

МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ТЕЛЕВИЗИОННЫМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ ПУТЕМ ТРАНСФОРМАЦИИ РАСТРА

Техническое совершенствование средств вычислительной техники и расширение диапазона задач, решаемых с помощью ЭВМ, в значительной степени повысили требования, предъявляемые к системам связи оператора и машины. Значительное распространение получили телевизионные системы отображения информации (ТСОИ) благодаря своему быстрдействию и наглядности представления данных.

Для обеспечения быстрого и точного восприятия информации иногда необходимо переместить на экране ТСОИ весь кадр (т. е. изображение вместе с фоном). Это позволит обеспечить оперативный контроль за положением и состоянием объекта управления и привлечь к процессу обмена информацией весь экран, включая его периферийные зоны, играющие, как правило, пассивную роль. Для некоторых специфических случаев данная проблема решена и соответствующие системы созданы [1, 2], однако все они отличаются строгой специализацией и мало универсальны. Изучение вопроса показывает, что решение поставленной задачи распадается на два значительных этапа — математическое описание

управления телевизионным изображением и создание соответствующей схемы на основе избранных принципов управления.

Изображение на экране ТСОИ получают путем перемещения в трубке модулированного по яркости луча двумя взаимно-перпендикулярными магнитными полями. Развернутая таким образом совокупность строк (растр) занимает в обычном случае весь экран. В некоторых системах (проекционное телевидение, телеигры и др.) возникает необходимость перемещения или изменения положения всего раstra на экране ТСОИ. В соответствии с предъявленными требованиями речь может идти об изменении размеров, повороте или перемещении изображения. В известных системах подобные эффекты достигаются применением механических разверток, переключением или механическим перемещением отклоняющих систем [1], а также другими комбинированными электронно-механическими способами [2]. Схемы управления изображением без применения механических элементов сложны в практической реализации и не позволяют осуществлять гибкое управление перемещениями раstra. Всякое применение механических элементов в ТСОИ ведет к искажению и потере информации.

Предлагаемый вниманию метод использует стандартные отклоняющие катушки, что существенно облегчает процесс формирования раstra. При определенных углах отклонения отклоняющую систему телевизора можно рассматривать как линейную систему [3, 4]. Таким образом, положение луча на экране можно однозначно описать мгновенными значениями токов в катушках. пилообразный ток развертки за один период записывается двумя уравнениями (1), где i_{1c} — ток прямого хода луча и i_{2c} — ток обратного хода луча строчной развертки. Аналогичными уравнениями описываются перемещения луча под действием кадровой развертки (2), где i_{1k} и i_{2k} — токи прямого и обратного хода луча кадровой развертки соответственно:

$$i_{1c} = \frac{I_{mc}}{T_{пс}} t, \quad 0 \leq t \leq T_{пс};$$

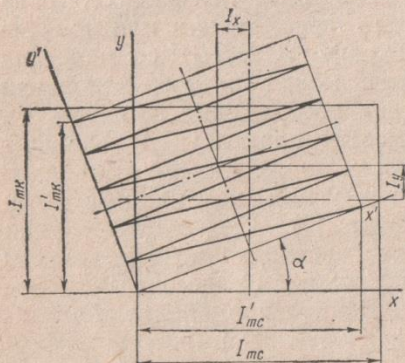
$$i_{2c} = \frac{I_{mc}}{T_{с} - T_{пс}} (T_{с} - t), \quad T_{пс} \leq t \leq T_{с}; \quad (1)$$

$$i_{1k} = \frac{I_{mk}}{T_{пк}} t, \quad 0 \leq t \leq T_{пк};$$

$$i_{2k} = \frac{I_{mk}}{T_{к} - T_{пк}} (T_{к} - t), \quad T_{пк} \leq t \leq T_{к}, \quad (2)$$

где $T_{с}$, $T_{к}$ — периоды строчной и кадровой разверток; $T_{пс}$, $T_{пк}$ — длительности прямого хода луча строчной и кадровой разверток; I_{mc} , I_{mk} — амплитудные значения токов разверток; t — текущее время.

В случае трансформирования раstra токи, проходящие по отклоняющим катушкам, имеют более сложные формы. Рассматривая в качестве примера один из наиболее общих случаев трансформирования раstra — поворот изображения, на основании приведенного рисунка можно записать токи, протекающие через строчные i_x и кадровые i_y отклоняющие катушки в виде суммы трех составляющих:



$$i_x = c_1 i_c + c_2 i_k + I_x;$$

$$i_y = c_3 i_c + c_4 i_k + I_y, \quad (3)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — масштабные коэффициенты; I_y, I_x — постоянные токи для вертикального и горизонтального смещений.

Из рисунка видно, что при повороте изображения амплитуды токов строчной I'_{mc} и кадровой I'_{mk} разверток уменьшаются в зависимости от угла поворота:

$$c_1 = c_4 = \cos \alpha. \quad (4)$$

Путем геометрических построений можно получить и значения коэффициентов c_2, c_3 :

$$c_2 = \sin \alpha; \quad c_3 = -\sin \alpha. \quad (5)$$

Изменяя значения масштабных коэффициентов и постоянных составляющих в формулах (3), имеем всевозможные виды трансформирования изображения. Однако непосредственная реализация формул (3) и управляющих воздействий (4) и (5) встречает на своем пути непреодолимые трудности, связанные с величинами токов разверток и напряжениями обратных ходов развертывающих лучей.

Экспериментальные исследования показали, что данное препятствие можно преодолеть, применяя не два, а четыре генератора разверток и два генератора постоянного смещения (что соответствует количеству переменных в уравнении (3)). Значительная разница в частотах токов разверток позволяет легко разделить их при помощи фильтров. Линейность отклоняющих систем в интересующих нас пределах позволяет просуммировать непосредственно в катушках развертывающие токи от различных генераторов разверток в соответствии с (3).

Таким образом, получая из ЭВМ значения коэффициентов в соответствии с уравнениями (4), (5), можно через цифро-аналоговые преобразователи воздействовать на генераторы разверток и получать необходимые эффекты. Ограниченное количество управляющих величин позволяет легко состыковать данную ТСОИ с различными ЭВМ.

Проведенные экспериментальные исследования подтвердили правомерность приведенных выше выкладок и принципиальную работоспособность метода.

Список литературы: 1. Appariel utilisant un dispositif de te'le'vision pour L'obervation vers L'arriere dans tes auto. Pat. France № 1568329, cl. B 60 r, 1969. 2. Tkachenko N. B. Rotary special effects generator Pat. USA, cl. 178—6.8, 1974. 3. Кирилло Л. Р., Бродский М. А. Телевидение.—Минск: Вышейшая школа, 1977.—303 с. 4. Бриллиантов Д. П. Проектирование эффективных систем магнитного отклонения.—М.: Связь, 1975.—248 с.

Поступила 6 сентября 1978 г.

УДК 62—50

И. В. КОНОНЕНКО, В. В. ГОРОХОВ

АЛГОРИТМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СИГНАЛОВ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

При анализе функционирования сложных динамических систем (механических, электромагнитных, электромеханических) подход, основанный на описании физической системы с помощью сложной системы дифференциальных уравнений, часто неприменим в силу большой сложности физического объекта, значительного числа переменных и связей между ними. Кроме того, последние часто не известны с достаточной степенью точности и построенная модель не может описать объект с требуемой степенью адекватности. Задача осложняется тем, что процессы, происходящие в сложных системах, как правило, случайны, что обусловлено случайными флуктуациями как в самих системах, так и во внешней среде.

В связи с этим возникает необходимость создания достаточно простых эмпирических моделей, адекватно описывающих объект в узких диапазонах функционирования и позволяющих экстраполировать экспериментальные данные на близкие окрестности исследуемых режимов.

Построение такой модели сводится к анализу «черного ящика», на входе которого действуют детерминированные процессы, сопровождаемые значительным по величине стохастическим воздействием. Предлагается следующий многоуровневый алгоритм обработки информации, полученной в результате серии испытаний динамической системы на различных режимах работы.

Статистический анализ выходных процессов. По записям реализаций выходных сигналов динамической системы на каждом из режимов работы при стационарном внешнем воздействии определяются оценки спектральной плотности (СП) выходного процесса.

Проведенные экспериментальные исследования подтвердили правомерность приведенных выше выкладок и принципиальную работоспособность метода.

Список литературы: 1. Appariel utilisant un dispositif de te'le'vision pour L'obervation vers L'arriere dans tes auto. Pat. France № 1568329, cl. B 60 r, 1969. 2. Tkachenko N. B. Rotary special effects generator Pat. USA, cl. 178—6.8, 1974. 3. Кирилло Л. Р., Бродский М. А. Телевидение.—Минск: Высшая школа, 1977.—303 с. 4. Бриллиантов Д. П. Проектирование эффективных систем магнитного отклонения.—М.: Связь, 1975.—248 с.

Поступила 6 сентября 1978 г.

УДК 62—50

И. В. КОНОНЕНКО, В. В. ГОРОХОВ

АЛГОРИТМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СИГНАЛОВ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

При анализе функционирования сложных динамических систем (механических, электромагнитных, электромеханических) подход, основанный на описании физической системы с помощью сложной системы дифференциальных уравнений, часто неприменим в силу большой сложности физического объекта, значительного числа переменных и связей между ними. Кроме того, последние часто не известны с достаточной степенью точности и построенная модель не может описать объект с требуемой степенью адекватности. Задача осложняется тем, что процессы, происходящие в сложных системах, как правило, случайны, что обусловлено случайными флуктуациями как в самих системах, так и во внешней среде.

В связи с этим возникает необходимость создания достаточно простых эмпирических моделей, адекватно описывающих объект в узких диапазонах функционирования и позволяющих экстраполировать экспериментальные данные на близкие окрестности исследуемых режимов.

Построение такой модели сводится к анализу «черного ящика», на входе которого действуют детерминированные процессы, сопровождаемые значительным по величине стохастическим воздействием. Предлагается следующий многоуровневый алгоритм обработки информации, полученной в результате серии испытаний динамической системы на различных режимах работы.

Статистический анализ выходных процессов. По записям реализаций выходных сигналов динамической системы на каждом из режимов работы при стационарном внешнем воздействии определяются оценки спектральной плотности (СП) выходного процесса.

Моделирование спектра. Поскольку СП выходных сигналов многих динамических систем имеет ярко выраженные пики, то полученные оценки СП могут быть аппроксимированы суммой колоколообразных кривых:

$$G(f) = \sum_{i=1}^n \gamma_i / ((f - \alpha_i)^2 + \beta_i^2), \quad (1)$$

где f — текущая частота спектра; $\gamma_i, \alpha_i, \beta_i$ — параметры модели спектра; n — число выделяемых пиков СП. Аппроксимация СП суммой пиков позволяет представить выходной сигнал сложной системы как суперпозицию сигналов некоторых элементарных вибраторов с одной степенью свободы, каждый из которых характеризуется тремя параметрами и может исследоваться самостоятельно. Аппроксимация СП дает возможность компенсировать флуктуации оценок СП и сократить размерность задачи дальнейшей обработки данных, которая теперь сводится к экстраполяции параметров пиков на неиспытанные режимы. Аппроксимация СП может осуществляться по методу наименьших квадратов, для чего одним из методов нелинейного программирования минимизируется функционал (2)

$$L(x) = \sum_{k=j}^m \left(\sum_{i=1}^n \gamma_{il} (k\Delta f - \alpha_i)^2 + \beta_i^2 \right) - G_k)^2, \quad (2)$$

где $x = \{\gamma_1, \alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_n, \alpha_n, \beta_n\}$ — вектор параметров; Δf — дискретность по частоте; G_k — оценка СП на частоте $k\Delta f$. Числа j и m определяют интервал аппроксимации.

Начальное приближение x_0 находится специальной программой выделения пиков, определяющей участки спектра, на которых сумма оценок в окне заданной ширины значительно превышает аналогичные суммы на соседних участках.

Построение прогнозирующей модели объекта. Сложность задачи нахождения модели, отражающей зависимость параметров пиков СП выходного сигнала от режима работы, во многом зависит от степени априорной осведомленности о свойствах исследуемой системы.

В наиболее абстрактном виде модель системы есть отношение на непустых множествах $V_1, V_2, \dots, V_r$ значений, которые могут принимать входные и выходные характеристики, а также внутренние параметры системы. Это отношение определяет множество $A \subset V_1 \times \dots \times V_r$.

Задача идентификации в наиболее общем виде состоит в определении этого отношения по некоторому экспериментально полученному подмножеству $B \subset A$. При отсутствии других сведений об объекте задача идентификации в такой общей постановке неразрешима.

Следующим уровнем априорной осведомленности может считаться знание причинно-следственных связей в системе, на основе

которых возможна ориентация абстрактного объекта. Семейство множеств может быть разбито на следующие подмножества: а) константы объекта — семейство множеств, состоящих из единственного элемента; б) измеряемые выходы; в) измеряемые входы — семейство множеств, элементами которых являются известные воздействия на систему со стороны внешней среды; г) скрытые входы — семейство множеств, характеризующих внешние воздействия, значения которых не поддаются непосредственному измерению; д) состояния системы — семейство переменных, характеризующих некоторые внутренние свойства системы, зависящие от входов и состояний в предыдущие моменты времени и устанавливающие однозначное соответствие между входами и выходами; е) скрытые выходы — неизмеряемые переменные, зависящие от входов и состояний системы.

После проведения ориентации задача идентификации может быть упрощена. Если опыты производить при неизменных внешних условиях и одинаковых начальных состояниях, скрытые входы могут считаться стационарными случайными процессами, характеристики которых суть константы. Поэтому задача идентификации ограничивается нахождением отношения, определяющего не все множество A , а лишь подмножество $C \subset A$, являющееся сечением A при фиксированных состояниях и скрытых входах. Данное отношение может быть найдено в виде некоторого оператора R , действующего из множества входов в множество выходов так, что для всех допустимых входов u : $\{u, R(u)\} \subset C$. Определение этого оператора по множеству $B \subset C$ включает нахождение его структуры и параметров. Наиболее приемлемым в данном случае методом структурной идентификации является метод группового учета аргументов, позволяющий селективировать модель оптимальной сложности по небольшому числу экспериментальных данных. При этом скорость селекции и надежность результатов могут быть существенно повышены при учете априорной и апостериорной информации о функционировании системы. Апостериорную информацию можно получить при использовании в качестве пробных сигналов для идентификации естественных шумовых внешних воздействий. Широкополосные шумы позволяют выделить резонансные частоты системы. В случае приближения гармоник входных сигналов к этим частотам следует ожидать резонанс, выражающийся в возрастании амплитуды пиков СП. Отсюда следует вывод, что зависимость амплитуды пика от режима работы механизма следует искать в классе резонансных кривых.

При селекции модели изменения параметров α , β полезно использовать МНК с весом, пропорциональным амплитуде пиков $\alpha = \gamma/\beta^2$, поскольку пики малой амплитуды значительно искажаются шумами, что обуславливает значительные флуктуации их ширины и центральной частоты. При этом для отсева заведомо

неправдоподобных прогнозов целесообразно включить в проверочную последовательность с малым весом априорные оценки прогноза.

Рассмотренный алгоритм был применен для прогнозирования СП ускорений одного из узлов транспортной машины на четырех режимах работы (наивысших скоростях движения) по результатам испытаний на 11 предыдущих режимах. Оценки СП ускорений аппроксимировались одним пиком типа (1), полученные

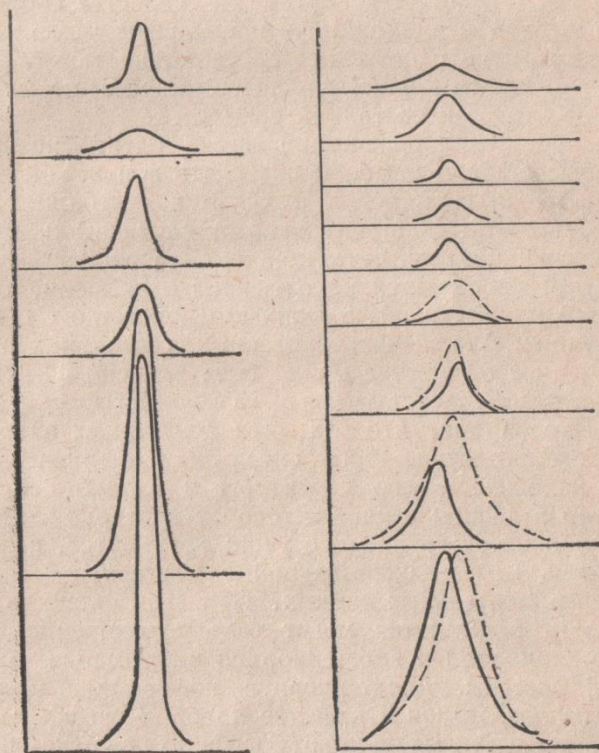


Рис. 1

кривые приведены на рис. 1. Зависимости параметров этого пика от средней скорости движения v показаны на рис. 2.

Поскольку изменение a от режима к режиму находится в пределах точности измерений и вычислений, был сделан вывод о том, что выделенный пик СП обуславливается резонансными свойствами системы и следует ожидать резонанс при совпадении частоты внешнего воздействия и ее высших гармоник с a . Зависимость $a(v)$ была найдена в классе кривых (1):

$$a(v) = 0,014/((v - 4,16)^2 + 0,003) + 0,17/((v - 8,58)^2 + 1,04).$$

Зависимость $\beta(v)$ находили в классе линейных комбинаций v^{-1} , v , v^2 , $v^{3/2}$, $v^{1/2}$ по многорядному селективному алгоритму МГУА с линейными частными описаниями. В качестве критерия селекции принят критерий минимума средневзвешенной квадратичной ошибки:

$$\Delta = \sum_{i \in I} a_i (\beta_i^2 - \beta^2(v_i))^2 + P_{\text{пр}} (\beta_{\text{пр}}^2 - \beta^2(v_{\text{пр}}))^2,$$

где a_i — амплитуда пика на i -м режиме; v_i — скорость на этом режиме; $v_{\text{пр}}$ — максимальная скорость, для которой осуществля-

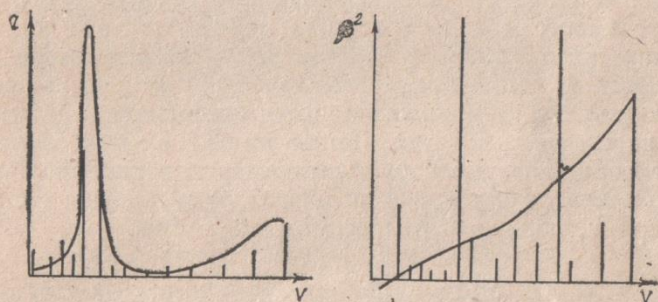


Рис. 2.

ется прогноз; $\beta_{\text{пр}}^2$ — грубая оценка β^2 при этой скорости (выбрано $\beta_{\text{пр}} = \max_i \beta_i$, что соответствует наиболее пессимистичному прогнозу); $P_{\text{пр}}$ — вес ошибки на прогнозе (в 10 раз меньше минимального веса на экспериментальных данных); I — множество индексов проверочной последовательности.

Оптимальной в смысле минимума критерия $\Delta \rightarrow \min$ оказалась функция

$$\beta^2(v) = -0,48 - 1,48v^{3/2} + 6,89v^2.$$

На рис. 2 сплошными линиями показаны найденные зависимости. Прогноз СП на последних четырех режимах на рис. 1 — пунктиром. Приведенный пример подтверждает работоспособность предлагаемого подхода к анализу сложных стохастических систем по небольшому числу экспериментальных данных.

Поступила 1 ноября 1978 г.

А. В. ДАБАГЯН, д-р техн. наук,
С. В. ШЕВЧЕНКО

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА МЕТОДОВ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

При описании поведения различных экономических подсистем широко используются функции типа Кобба — Дугласа и позиномы [1] — [4]. Это вызвано тем, что математические модели, построенные на базе данных функций, более адекватно отражают реальные процессы при сравнительной простоте и стройности математического аппарата. В частности, использование производственных функций при оптимальном проектировании сложных иерархических систем (оптимальность понимается как минимум затрат на создание и эксплуатацию проектируемой системы) позволяет хорошо формализовать рассматриваемую проблему [3, 4]. При этом для любых двух уровней системы, начиная с нижних по иерархии, должна быть рассмотрена задача

$$S(x) = \sum_{i=1}^n A_i \prod_{j=1}^m x_j^{a_{ij}} \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$y_l = B_l \prod_{j=1}^m x_j^{b_{lj}}, \quad l = \overline{1, p}, \quad p < m; \quad (2)$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Здесь функция S_x представляет собой стоимость подсистемы, состоящую из стоимостей отдельных элементов, выраженных функциями их основных параметров x_j . Стоимость понимается в смысле затрат на создание и эксплуатацию подсистемы. Соотношения (2) выражают связь параметров подсистемы с параметрами составляющих элементов; (3) — необходимые ограничения на область изменения параметров.

Решая задачу (1) — (3) для последовательно задаваемых значений y_l , получаем зависимость стоимости подсистемы от ее основных параметров. Последние можно получить для всех элементов данного уровня иерархии. Аппроксимируя их производственными функциями, рассматриваем аналогичные задачи на следующем уровне иерархии и т. д. В конечном итоге получается зависимость стоимости системы от ее основных параметров. Теперь приступаем к решению обратной задачи: зная предъявляемые к системе требования по уровню ее основных параметров, находим значения параметров на всех уровнях иерархии. Таким образом, решение задачи (1) — (3) является одним из главных вопросов проблемы оптимального проектирования в предлагаемой интерпретации.

По своему виду задача (1) — (3) относится к классу задач нелинейного программирования. Ее можно несколько упростить, выразив p переменных x_j из соотношений (2) через остальные и подставив их в целевую функцию. При этом за счет изменения нижней и верхней границы значений y_l , добиваемся неактивности ограничений типа (3) для исключаемых переменных. Для этого из каждого l -го соотношения в (2) находим выражения для x_l , $l = \overline{1, p}$ и подставляем в него граничные значения остальных переменных x_j ($j \neq l$), доставляющих минимум x_l при фиксированном значении y_l . В качестве нижней границы значения y_l выбираем такое, при котором выполняется равенство

$$x_{l \min}(y_l) = a_l, \quad l = \overline{1, p}.$$

Аналогично для определения верхней границы y_l в полученные выражения подставляют другие значения переменных x_j ($j \neq l$). В качестве верхней границы значения y_l выбирается такое, при котором выполняется равенство

$$x_{l \max}(y_l) = b_l, \quad l = \overline{1, p}.$$

Исключение тех или иных переменных приводит к тем или иным инвариантным задачам по отношению ко всей системе и производится на основании опыта исследователя.

Таким образом, задача (1) — (3) сводится к следующей:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n A_i \prod_i x_j^{\alpha_{ij}} \rightarrow \min; \quad (4)$$

$$\forall j: a_j \leq x_j \leq b_j. \quad (5)$$

Из всех методов решения задач нелинейного программирования рассмотрим следующие, на наш взгляд, наиболее показательные: метод прямого поиска как простейший, метод сопряженного градиента как более общий, метод геометрического программирования как специальный.

Метод прямого поиска [5] сводится к одномерной минимизации функции $g(x)$ в допустимой области, в то время как остальные координаты фиксированы. К достоинствам его следует отнести прежде всего простоту машинной реализации, к недостаткам — малая скорость сходимости, плохая работа алгоритма при наличии взаимодействия между переменными.

Метод сопряженного градиента [5] — эффективный метод нелинейного программирования для задач с полными «овражными» целевыми функциями. Целенаправленный поиск позволяет более быстро найти экстремум функции, а учет предыдущего направления поиска — избавиться от колебаний вокруг нужного направления, что может быть при использовании метода наискорейшего спуска.

Геометрическое программирование предназначено для изучения и решения определенного класса задач оптимизации, т. е. задач геометрического программирования [6]:

$$g_0(x) \rightarrow \min; \quad (6) \quad g_i(x) \leq 1; \quad (7) \quad x > 0, \quad (8)$$

где $g_i(x)$ задана выражением (4). Очевидно, задача (4) — (5) может быть сведена к задаче (6) — (8).

Согласно теории геометрического программирования решение исходной задачи можно заменить на решение специальной двойственной задачи, которая значительно упрощается применительно к задаче (4) — (5). Поэтому для решения возможно применение линейного программирования при условии предварительной линеаризации всегда вогнутой двойственной целевой функции. Достоинством метода является то, что получаемое решение всегда глобально, независимо от исходной задачи. Первые два метода этим качеством не обладают.

Оценить работоспособность методов можно на примере специально построенной тестовой задачи с заранее известной точкой минимума целевой функции.

В качестве тестовой задачи выберем следующую:

$$g(x) = 3x_1^{-1,15} x_2^{-1,5} x_3^{-2} + 2x_1^{-2} x_2^{-3} x_3^{-2} + \\ + 0,5x_1^{-1,3} x_2^{-2} x_3^3 + 40x_1^{-0,225} x_2^{0,2875} x_3^{0,2875} \rightarrow \min; \\ 0,8 \leq x_1 \leq 20; \quad 0,01 \leq x_2 \leq 4; \quad 0,5 \leq x_3 \leq 2.$$

Минимум функции достигается в точке (1, 1, 1) и равен 45,5. Согласно [7] задача невыпукла. Все методы программно реализованы на языке «Алгол-60». Результаты счета сведены в таблицу.

Метод	Время счета, с	Значение функции	Значения аргументов		
			x_1	x_2	x_3
Прямой поиск	47 (124)	45,529446 (45,500326)	0,80000 (1,01199)	1,11833 (0,98714)	1,00005 (1,00513)
Сопряженный градиент	150	46,105337	7,08418	1,03157	1,13145
Геометрическое программирование	180	45,500011	1,00023	0,99989	0,99999

Проанализируем полученные результаты. Метод прямого поиска в основном справился с задачей, но точность результата невысокая. Ее можно несколько повысить, увеличив число вычислений функции. В скобках приведены результаты счета при числе вычислений функции, равном 50. Остальные результаты соответствуют 10 вычислениям.

Метод сопряженного градиента не справился с задачей, очевидно, потому, что задача невыпукла и возможно существование локальных экстремумов. Геометрическое программирование позволило получить решение с высокой степенью точности за сравнительно небольшой промежуток времени.

Все сказанное ранее говорит о следующем: для решения задач типа (4)—(5) с высокой точностью наиболее целесообразно применение метода геометрического программирования. В ряде случаев для ускорения расчетов, особенно если исходная задача выпукла, а также при невысоких требованиях к точности более предпочтительным является применение прямого поиска.

Список литературы. 1. Терехов Л. Л. Экономико-математические методы.—М.: Статистика, 1977.—189 с. 2. Виунев С. М. Экономические параметры.—М.: Наука, 1966.—189 с. 3. Дабагян А. В., Королев В. Н. Метод оптимального проектирования сложных систем.—В кн.: IV Всесоюз. совещ. по проблемам управления. Ч. I.—М.: Наука, 1974, с. 223—236. 4. Дабагян А. В., Годлевский М. Д. Иерархический метод оптимизации сложных систем.—В кн.: Оптимизация технических систем. Новосибирск, 1976. с. 52—57. 5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.—М.: Мир, 1975.—532 с. 6. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование.—М.: Мир, 1972.—312 с. 7. Дабагян А. В., Макаренко А. В. О наличии единственного экстремума у производственных функций и позиномов.—В кн.: Автоматизированное проектирование промышленных производств.—Киев: Изд. АН УССР, 1977, с. 13—30.

Поступила 23 октября 1978 г.

УДК 658.512

В. Я. ЗАРУБА

**ПРОЦЕСС РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО
РЕСУРСА В ЧАСТИЧНО СОГЛАСОВАННОЙ АКТИВНОЙ
СИСТЕМЕ ЦЕНТР — ЭЛЕМЕНТ
ПРИ НЕИНФОРМИРОВАННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
ОБ ИМЕЮЩЕМСЯ ОБЪЕМЕ РЕСУРСОВ**

При распределении ресурса в экономических системах, состоящих из центрального планирующего органа (центра) и нескольких хозяйственных элементов, иногда целесообразно использовать активное планирование, при котором элементам в разработке плана отводится активная роль. В этой связи возникает необходимость учитывать такие моменты, как степень информированности сторон друг о друге и наличие у них собственных интересов.

Ниже будет рассмотрен игровой процесс, основанный на схеме аукциона. Его основное содержание заключается в следующем. Предполагается, что центр не имеет информации о производственных возможностях элементов, а элементы не знают общего объема распределяемого в системе ресурса. Каждый эле-

Метод сопряженного градиента не справился с задачей, очевидно, потому, что задача невыпукла и возможно существование локальных экстремумов. Геометрическое программирование позволило получить решение с высокой степенью точности за сравнительно небольшой промежуток времени.

Все сказанное ранее говорит о следующем: для решения задач типа (4)—(5) с высокой точностью наиболее целесообразно применение метода геометрического программирования. В ряде случаев для ускорения расчетов, особенно если исходная задача выпукла, а также при невысоких требованиях к точности более предпочтительным является применение прямого поиска.

Список литературы. 1. Терехов Л. Л. Экономико-математические методы.—М.: Статистика, 1977.—189 с. 2. Виунев С. М. Экономические параметры.—М.: Наука, 1966.—189 с. 3. Дабагян А. В., Королев В. Н. Метод оптимального проектирования сложных систем.—В кн.: IV Всесоюз. совещ. по проблемам управления. Ч. I.—М.: Наука, 1974, с. 223—236. 4. Дабагян А. В., Годлевский М. Д. Иерархический метод оптимизации сложных систем.—В кн.: Оптимизация технических систем. Новосибирск, 1976. с. 52—57. 5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.—М.: Мир, 1975.—532 с. 6. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование.—М.: Мир, 1972.—312 с. 7. Дабагян А. В., Макаренко А. В. О наличии единственного экстремума у производственных функций и позиномов.—В кн.: Автоматизированное проектирование промышленных производств.—Киев: Изд. АН УССР, 1977, с. 13—30.

Поступила 23 октября 1978 г.

УДК 658.512

В. Я. ЗАРУБА

**ПРОЦЕСС РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО
РЕСУРСА В ЧАСТИЧНО СОГЛАСОВАННОЙ АКТИВНОЙ
СИСТЕМЕ ЦЕНТР — ЭЛЕМЕНТ
ПРИ НЕИНФОРМИРОВАННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
ОБ ИМЕЮЩЕМСЯ ОБЪЕМЕ РЕСУРСОВ**

При распределении ресурса в экономических системах, состоящих из центрального планирующего органа (центра) и нескольких хозяйственных элементов, иногда целесообразно использовать активное планирование, при котором элементам в разработке плана отводится активная роль. В этой связи возникает необходимость учитывать такие моменты, как степень информированности сторон друг о друге и наличие у них собственных интересов.

Ниже будет рассмотрен игровой процесс, основанный на схеме аукциона. Его основное содержание заключается в следующем. Предполагается, что центр не имеет информации о производственных возможностях элементов, а элементы не знают общего объема распределяемого в системе ресурса. Каждый эле-

мент должен сообщить запрашиваемый объем ресурса и значение эффективности, с которой он будет его использовать. Такого рода план-заявку элемент может корректировать, учитывая информацию, сообщаемую другими элементами. При этом в новых заявках эффективность использования ресурса должна возрастать, быть может, за счет уменьшения запрашиваемого объема ресурса. После окончания процесса формирования заявок элементы обеспечиваются ресурсом в порядке убывания предложенных значений эффективности. Если ресурс оказывается распределенным не полностью, а элементы испытывают в нем потребность, остаток ресурса дораспределяется аналогичным образом.

Центр обычно располагает информацией о фактическом объеме производства хозяйственных элементов и «наказывает» их за невыполнение плана. В этой связи можно предположить, что планы-заявки, предлагаемые элементами, являются реализуемыми, т. е. не существует возможности блефа со стороны элементов.

Положим, что зависимость максимального объема производства u_q каждого q -го элемента системы, $q \in Q = \{1, 2, \dots, K\}$, от объема θ_q выделенного ему ресурса описывается непрерывной кусочно-линейной выпуклой вверх функцией $u_q(\theta_q)$, определенной на интервале $[0, a_0]$ изменения аргумента θ_q . Здесь a_0 — имеющийся в системе объем ресурса.

Дифференциальной эффективностью (ДЭ) использования ресурса q -м элементом при наличии у него ресурса в объеме θ_q назовем величину

$$u_q^0(\theta_q) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow +0} (u_q(\theta_q + \Delta\theta) - u_q(\theta_q)) / \Delta\theta.$$

Из свойств функции $u_q(\theta_q)$ следует, что интервал $[0, a_0]$ может быть разбит на подынтервалы

$$[\mu_q^h, \mu_q^{h+1}), \quad h = 1, 2, \dots, H_q, \quad \mu_q^1 = 0, \quad \mu_q^{H_q+1} = a_0,$$

в которых

$$u_q^0(\theta_q) = \alpha_q^h = \text{const} (\theta_q \in [\mu_q^h, \mu_q^{h+1})), \quad h = 1, 2, \dots, H_q.$$

При этом, если $g > h$, то $\alpha_q^g < \alpha_q^h$.

Назовем локальной эффективностью (ЛЭ) использования дополнительного объема $\Delta\theta$ ресурса q -м элементом при наличии у него ресурса в объеме θ_q величину

$$\pi_q(\Delta\theta, \theta_q) = (u_q(\theta_q + \Delta\theta) - u_q(\theta_q)) / \Delta\theta,$$

где $\Delta\theta > 0$, $\theta_q + \Delta\theta \leq a_0$.

Пусть при выборе планового варианта своей производственной деятельности каждый элемент системы стремится максимизировать свой объем производства ($u_q \rightarrow \max$), а центр в ходе процесса распределения ресурса стремится назначить такие реализуемые плановые задания, при которых максимальным

общий объем производства будет в системе $\left(\sum_{q \in Q} u_q \rightarrow \max\right)$. Системы с указанным соотношением целей элементов и центра назовем частично согласованными.

Пусть $\theta = (\theta_q, q \in Q)$ — вектор выделенных элементам объемов ресурса, причем $a_0^0 = a_0 - \sum_{q \in Q} \theta_q > 0$, а элементы представили по-

казатели планов использования дополнительных объемов ресурса. Предположим, что центр в ходе игрового процесса руководствуется принципом необратимости получаемых распределений, в соответствии с которым никакая часть из однажды выделенного элементу объема ресурса в последующем у него не будет изъята. Тогда, исходя из имеющихся показателей планов, центр выберет такое распределение $f^0 = (f_q^0, q \in Q)$ остатка a_0^0 ресурса, которое будет представлять собой оптимальное решение задачи

$$\sum_{q \in Q} \zeta_q f_q \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{q \in Q} f_q \leq a_0^0; \quad (2) \quad 0 \leq f_q \leq \chi_q \quad (q \in Q), \quad (3)$$

где $\zeta_q = (u_q(\theta_q + \chi_q) - u_q(\theta_q)) / \chi_q$, χ_q — запрашиваемый q -м элементом дополнительный объем ресурса.

Предположим, что $\zeta_1 > \zeta_2 > \dots > \zeta_K$. Достаточно очевидно, что тогда оптимальные решения задачи (1) — (3) определяются соотношениями

$$f_1^0 = \min(\chi_1, a_0^0), \quad f_k^0 = \min\left(\chi_k, a_0^0 - \sum_{q=1}^{k-1} f_q^0\right), \quad k = 2, 3, \dots, K.$$

Таким образом, элементы обеспечиваются ресурсом в порядке убывания предложенных значений эффективности.

Пусть S, T, U — непересекающиеся множества элементов, причем $|T| > 1$, $S \cup T \cup U = Q$. Положим, что

$$\zeta_s > \zeta_t = \alpha = \text{const} \quad (s \in S) \quad (t \in T),$$

$$\sum_{s \in S} \chi_s < a_0^0 < \sum_{s \in S} \chi_s + \sum_{t \in T} \chi_t, \quad \zeta_u < \alpha \quad (u \in U).$$

В этом случае объемы f_t ($t \in T$), которые получают элементы из множества T , будут удовлетворять соотношению

$$\sum_{t \in T} f_t = a_0^0 - \sum_{s \in S} \chi_s.$$

Поскольку элементы не знают, каков общий объем ресурса, они не знают и каков его остаток. В связи с тем, что остаток может оказаться малым и элементы, предложившие наибольшие значения эффективности, могут забрать его полностью, элементы, предложившие меньшие значения эффективности, рискуют не

получить добавочных порций ресурса. Поэтому каждый элемент системы для получения гарантированного результата будет стремиться предложить значение эффективности большее, чем у остальных элементов.

Подпроцесс формирования установившихся значений эффективности, в ходе которого выявляются элементы, предложившие наибольшие значения эффективности, при рациональном поведении элементов происходит по схеме, весьма напоминающей схему действия участников аукциона.

Опишем r -й шаг общего процесса распределения ресурса в частично согласованной системе при неинформированности элементов об объеме распределяемого ресурса.

1. Имеется допустимое распределение ресурса $\theta^r = (\theta_q^r, q \in Q)$ такое, что $a_0^{\theta^r} = a_0 - \sum_{q \in Q} \theta_q^r > 0$. На 1-м шаге процесса $\theta^1 = 0$.

2. В ходе подпроцесса формирования установившихся значений эффективности выявляется множество S элементов, для которых $\beta_{sr} = \text{const} > \beta_{tr}$ ($t \in Q \setminus S$), где β_{qr} ($q \in Q$) — установившиеся (максимальные) значения эффективности, предложенные элементами. В ходе этого подпроцесса определяются также объемы ε_{sr} ($s \in S$) ресурса: $\varepsilon_{sr} = (u_s(\theta_s^r + \varepsilon_{sr}) - u_s(\theta_s^r)) / \beta_{sr}$ ($s \in S$).

3. Если $|S| = 1$, $S = s$, то s -й элемент получит ресурс в объеме $\Delta \theta_s^r = \min(a_0^{\theta^r}, \varepsilon_{sr})$. Если $|S| > 1$, $\sum_{s \in S} \varepsilon_{sr} \leq a_0^{\theta^r}$, каждый s -й элемент из множества S получит дополнительный объем ε_{sr} ресурса: $\Delta \theta_s^r = \varepsilon_{sr}$ ($s \in S$). Если $|S| > 1$, $\sum_{s \in S} \varepsilon_{sr} > a_0^{\theta^r}$, объемы $\Delta \theta_s^r$ ($s \in S$) ресурса, которые получают элементы из множества S , будут удовлетворять соотношению $\sum_{s \in S} \Delta \theta_s^r = a_0^{\theta^r}$. В остальном они

могут быть произвольными, и для их доопределения можно воспользоваться одним из принципов исключения неоднозначности.

4. Находится новое допустимое распределение $\theta^{r+1} = (\theta_q^{r+1}, q \in Q)$, где $\theta_s^{r+1} = \theta_s^r + \Delta \theta_s^r$ ($s \in S$), $\theta_t^{r+1} = \theta_t^r$ ($t \in Q \setminus S$). Процесс будет завершен, если $u_q^0(\theta_q^{r+1}) < 0$ ($q \in Q$) или $\sum_{q \in Q} \theta_q^{r+1} = a_0$. Не-

трудно видеть, что, поскольку на каждом шаге процесса распределяется конечный объем ресурса, а общий объем ресурса в системе ограничен, рассмотренный процесс распределения ресурса сходится к некоторому равновесному распределению за конечное число шагов.

При определении поведения центра использован принцип необратимости получаемых на каждом шаге распределений. Возникает вопрос, не происходит ли в связи с применением этого принципа уменьшение выигрыша центра.

Пусть некоторый q -й элемент получал ресурс на $i_1, i_2, \dots, i_{N_q}$ шагах процесса. Индексы $1, 2, \dots, N_q$ назовем номерами ша-

гов получения ресурса. Пусть на n -м шаге получения ресурса β_q^n — предложенное q -м элементом значение эффективности использования ресурса, а Δ_q^n — объем полученного при этом ресурса. Определим кусочно-линейную функцию:

$$\omega_q(\theta_q) = \begin{cases} \sum_{l=1}^n \beta_q^l \Delta_q^l + \beta_q^n \left(\theta_q - \sum_{l=1}^n \Delta_q^l \right), & \sum_{l=1}^n \Delta_q^l \leq \theta_q \leq \sum_{l=1}^{n+1} \Delta_q^l; \\ n = 1, 2, \dots, N_q - 1. \end{cases}$$

Она является выпуклой вверх функцией.

Пусть на $r-1$ -м шаге рассматриваемого процесса получено распределение ресурса $\theta^r = (\theta_q^r, q \in Q)$, причем $\sum_{q \in Q} \theta_q^r = \theta_{0r} \leq a_0$.

Можно показать, что вектор θ^r является оптимальным решением задачи: найти $\max_{\theta} \omega(\theta)$, где $\theta = (\theta_q; q \in Q)$, $\omega(\theta) = \sum_{q \in Q} \omega_q(\theta_q)$ при ограничениях $\sum_{q \in Q} \theta_q \leq \theta_{0r}$, $\theta_q \geq 0$ ($q \in Q$). Отсюда непосредственно

следует, что использование принципа необратимости распределений, получаемых на каждом шаге процесса, не уменьшает выигрыш центра.

Поступила 13 сентября 1978 г.

УДК 62—50

Ю. Т. КОСТЕНКО, канд. техн. наук, Н. И. БЕЗМЕНОВ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ДЕКОМПОЗИЦИИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ НА СЛАБО СВЯЗАННЫЕ МЕЖДУ СОБОЙ ПОДСИСТЕМЫ

Во многих прикладных задачах возникает необходимость разбиения некоторой системы на определенное число подсистем. Подобная задача может, например, возникнуть при синтезе системы управления сложным технологическим процессом, так как подобная система управления обычно строится в виде совокупности определенным образом координирующих свою работу подсистем, каждая из которых осуществляет управление определенной подсистемой объекта управления. Естественным является стремление построить систему управления таким образом, чтобы связь между ее подсистемами была минимальной. В связи с этим объект управления также должен быть представлен в виде совокупности слабо связанных между собой подсистем. Так как технологический процесс можно считать совокупностью связанных друг с другом параметров, мы приходим к задаче группировки параметров, формулируемой следующим образом.

гов получения ресурса. Пусть на n -м шаге получения ресурса β_q^n — предложенное q -м элементом значение эффективности использования ресурса, а Δ_q^n — объем полученного при этом ресурса. Определим кусочно-линейную функцию:

$$\omega_q(\theta_q) = \begin{cases} \sum_{l=1}^n \beta_q^l \Delta_q^l + \beta_q^n \left(\theta_q - \sum_{l=1}^n \Delta_q^l \right), & \sum_{l=1}^n \Delta_q^l \leq \theta_q \leq \sum_{l=1}^{n+1} \Delta_q^l; \\ n = 1, 2, \dots, N_q - 1. \end{cases}$$

Она является выпуклой вверх функцией.

Пусть на $r-1$ -м шаге рассматриваемого процесса получено распределение ресурса $\theta^r = (\theta_q^r, q \in Q)$, причем $\sum_{q \in Q} \theta_q^r = \theta_{0r} \leq a_0$.

Можно показать, что вектор θ^r является оптимальным решением задачи: найти $\max_{\theta} \omega(\theta)$, где $\theta = (\theta_q; q \in Q)$, $\omega(\theta) = \sum_{q \in Q} \omega_q(\theta_q)$ при ограничениях $\sum_{q \in Q} \theta_q \leq \theta_{0r}$, $\theta_q \geq 0$ ($q \in Q$). Отсюда непосредственно

следует, что использование принципа необратимости распределений, получаемых на каждом шаге процесса, не уменьшает выигрыш центра.

Поступила 13 сентября 1978 г.

УДК 62—50

Ю. Т. КОСТЕНКО, канд. техн. наук, Н. И. БЕЗМЕНОВ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ДЕКОМПОЗИЦИИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ НА СЛАБО СВЯЗАННЫЕ МЕЖДУ СОБОЙ ПОДСИСТЕМЫ

Во многих прикладных задачах возникает необходимость разбиения некоторой системы на определенное число подсистем. Подобная задача может, например, возникнуть при синтезе системы управления сложным технологическим процессом, так как подобная система управления обычно строится в виде совокупности определенным образом координирующих свою работу подсистем, каждая из которых осуществляет управление определенной подсистемой объекта управления. Естественным является стремление построить систему управления таким образом, чтобы связь между ее подсистемами была минимальной. В связи с этим объект управления также должен быть представлен в виде совокупности слабо связанных между собой подсистем. Так как технологический процесс можно считать совокупностью связанных друг с другом параметров, мы приходим к задаче группировки параметров, формулируемой следующим образом.

Пусть задана система переменных $S = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$. Необходимо на основании матрицы наблюдений вида

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

представить систему S в виде K слабо связанных между собой подсистем $S_i = \{X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{si}\}$ таких, что $S_i \cap S_j = \emptyset$ ($i, j = 1, 2, \dots, K; i \neq j$). Заметим, что j -й столбец матрицы X представляет собой j -е наблюдение над системой S ($j = 1, 2, \dots, n$).

Часто также возникает необходимость в решении задачи, двойственной к сформулированной выше и заключающейся в классификации каких-либо объектов по некоторым характеризующим их показателям (объекты можно интерпретировать как наблюдения над переменными-показателями). Подобные задачи решаются, например, в социологии, физиологии, психологии.

Методов решения задач группировки довольно много (в частности, задачи такого типа решаются при распознавании образов). Однако, по нашему мнению, в случае, когда важен учет связей произвольного характера, систему целесообразно исследовать с привлечением понятий теории информации.

Будем рассматривать матрицу наблюдений как реализацию случайного вектора $(X_1, X_2 \dots X_N)^T$. Кроме того, так как непрерывной случайной величине всегда можно поставить в соответствие дискретную, будем считать, что X_l — дискретная случайная величина с возможными значениями $\tilde{x}_{l1}, \tilde{x}_{l2}, \dots, \tilde{x}_{lw_l}$ (w_l — количество различных возможных значений X_l ; $l = 1, 2, \dots, N$).

Введем понятие взаимной информации между двумя случайными величинами X_1, X_2 с совместным законом распределения

$$P(X_1 = \tilde{x}_{1j_1}, X_2 = \tilde{x}_{2j_2}) = p_{j_1 j_2} \quad (j_1 = 1, 2, \dots, w_1; j_2 = 1, 2, \dots, w_2).$$

Совместной энтропией случайных переменных X_1, X_2 называется величина $H(X_1, X_2) = - \sum_{j_1=1}^{w_1} \sum_{j_2=1}^{w_2} p_{j_1 j_2} \log_2 p_{j_1 j_2}$.

Величины

$$H(X_1) = - \sum_{j_1=1}^{w_1} \sum_{j_2=1}^{w_2} p_{j_1 j_2} \log_2 \sum_{j_2=1}^{w_2} p_{j_1 j_2}$$

$$H_{X_2}(X_1) = - \sum_{j_1=1}^{w_1} \sum_{j_2=1}^{w_2} p_{j_1 j_2} \log_2 \frac{p_{j_1 j_2}}{\sum_{j_1=1}^{w_1} p_{j_1 j_2}}$$

называются соответственно энтропией переменной X_1 и условной энтропией переменной X_1 по переменной X_2^* .

В связи с тем что $H(X_1)$ характеризует неопределенность случайной величины X_1 при неизвестном значении X_2 , а $H_{X_2}(X_1)$ — неопределенность X_1 при известном значении X_2 , величина

$$I(X_1: X_2) = H(X_1) - H_{X_2}(X_1) \quad (1)$$

характеризует связь между случайными переменными X_1, X_2 . Легко показать, что $I(X_1: X_2) = I(X_2: X_1)$, а так как $H(X_1) \geq H_{X_2}(X_1)$, то $I(X_1: X_2) = I(X_2: X_1) \geq 0$.

Пользуясь свойствами энтропии, легко доказать, что выражение (1) эквивалентно следующему выражению:

$$I(X_1: X_2) = H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2). \quad (2)$$

Тогда по аналогии с (2) можно ввести понятие взаимной информации между переменными, составляющими систему S :

$$I(S) = I(X_1: X_2: \dots: X_N) = \sum_{l=1}^N H(X_l) - H(X_1, X_2, \dots, X_N). \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} H(X_l) = & - \sum_{i_1=1}^{\omega_1} \sum_{i_2=1}^{\omega_2} \dots \sum_{i_N=1}^{\omega_N} p_{i_1 i_2 \dots i_N} \log_2 \sum_{i_1=1}^{\omega_1} \dots \sum_{i_{l-1}=1}^{\omega_{l-1}} \times \\ & \times \sum_{i_{l+1}=1}^{\omega_{l+1}} \dots \sum_{i_N=1}^{\omega_N} p_{i_1 i_2 \dots i_N} - \end{aligned} \quad (4)$$

энтропия случайной переменной X_l ($l = 1, 2, \dots, N$);

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2, \dots, X_N) = & - \sum_{i_1=1}^{\omega_1} \sum_{i_2=1}^{\omega_2} \dots \\ & \dots \sum_{i_N=1}^{\omega_N} p_{i_1 i_2 \dots i_N} \log_2 p_{i_1 i_2 \dots i_N} - \end{aligned} \quad (5)$$

совместная энтропия переменных $X_1, X_2, \dots, X_N$. Величина $p_{i_1 i_2 \dots i_N}$ представляет собой вероятность реализации события

$(X_1 = \tilde{x}_{1j_1}, X_2 = \tilde{x}_{2j_2}, \dots, X_N = \tilde{x}_{Nj_N})$, где $\tilde{x}_{lj_j} - j_l$ -е возможное значение случайной величины X_l ($j_l = 1, 2, \dots, \omega_l$; $l = 1, 2, \dots, N$).

Можно доказать, что если $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_K$ ($S_r \cap S_q = \emptyset$; $r, q = 1, 2, \dots, K$), то

$$I(S) = I(X_1: X_2: \dots: X_N) = \sum_{i=1}^K I(S_i) + I(S_1: S_2: \dots: S_K), \quad (6)$$

где $I(S_i) = I(X_{1i}: X_{2i}: \dots: X_{N_i})$ — взаимная информация между переменными, составляющими подсистему S_i ($i = 1, 2, \dots, K$);

* Шеннон К. Математическая теория связи. — В кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике, М.: Изд-во иностр. лит., 1968, с. 243—332.

$I(S_1:S_2:\dots:S_K)$ — взаимная информация между всеми K подсистемами S_i . Если подсистемы независимы, то

$$I(S_1:S_2:\dots:S_K) = 0.$$

На основании изложенного можно заключить, что разбиение системы S на K слабо связанных между собой подсистем S_i можно осуществить, минимизировав функционал вида

$$J = I(S_1:S_2:\dots:S_K)/I(X_1:X_2:\dots:X_N). \quad (7)$$

Мы предполагали, что известен совместный закон распределения дискретных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_N$. Очевидно, что в случае, когда система S задана матрицей наблюдений, мы можем оценить данный закон и на основании этой оценки вычислить оценки энтропий и взаимных информаций. В дальнейшем под законом распределения, энтропиями и взаимными информациями будут пониматься их оценки, вычисленные на основании матрицы наблюдений.

Очевидно, что безусловная минимизация функционала вида (7) приведет к одному из двух результатов: а) если в системе нет независимых подсистем — к тривиальному решению, состоящему в отказе от разбиения (при $K=1$ $I(S_1:S_2:\dots:S_K)=0$); б) если система состоит из нескольких независимых подсистем — к разбиению на независимые подсистемы или же к варианту решения, рассмотренному выше. В то же время нас может удовлетворять некоторое подоптимальное разбиение. В связи с этим при разбиении системы с помощью минимизации функционала (7) необходимо учитывать некоторые ограничения (например, на количество подсистем, на их размеры).

Представим функционал (7) в виде, удобном для вычислений. С этой целью введем предварительно ряд обозначений. Пусть $A = \{j_1, j_2, \dots, j_N\}$ — множество индексов, соответствующих переменным $X_1, X_2, \dots, X_N$ ($j_l = 1, 2, \dots, \omega_l$, где ω_l — количество различных значений переменной X_l ; $l = 1, 2, \dots, N$), а A_i — множество индексов, соответствующих переменным, составляющим подсистему S_i ($i = 1, 2, \dots, K$). Обозначим также через $\sum_B \rho_A$ выражение $\sum_{i_q=1}^{\omega_q} \sum_{j_r=1}^{\omega_r} \dots \sum_{j_t=1}^{\omega_t} \rho_A$, где $B = \{j_q, j_r, \dots, j_t\}$ — некоторое подмножество множества A , а $\rho_A = \rho(p_{j_1 j_2 \dots j_N})$ — некоторая функция от $p_{j_1 j_2 \dots j_N}$.

Пользуясь этими обозначениями, получим выражение функционала (7) через вероятности. Для этого сначала преобразуем величины $I(X_1:X_2:\dots:X_N)$ и $I(S_1:S_2:\dots:S_K)$.

Подставив выражения (4), (5) в (3) и воспользовавшись принятыми обозначениями, имеем

$$I(X_1:X_2:\dots:X_N) = - \sum_{l=1}^N \sum_{i_l=1}^{\omega_l} \left(\sum_{A \setminus i_l} \rho_A \right) \log_2 \sum_{A \setminus i_l} \rho_A +$$

$$+ \sum_A p_A \log_2 p_A = - \sum_A p_A \left(\sum_{l=1}^N \log_2 \sum_{A \setminus i_l} p_A - \log_2 p_A \right).$$

Отсюда

$$I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) = - \sum_A p_A \log_2 \frac{\prod_{l=1}^N \sum_{A \setminus i_l} p_A}{p_A}. \quad (8)$$

На основании (6)

$$\begin{aligned} I(S_1 : S_2 : \dots : S_K) &= I(X_1 : X_2 : \dots : X_N) - \sum_{i=1}^K I(S_i) = \\ &= - \sum_A p_A \log_2 \frac{\prod_{l=1}^N \sum_{A \setminus i_l} p_A}{p_A} + \sum_{i=1}^K \sum_{A_i} \left(\sum_{A \setminus A_i} p_A \right) \log_2 \frac{\prod_{i_l \in A_i} \sum_{A \setminus i_l} p_A}{\sum_{A \setminus A_i} p_A} = \\ &= - \sum_A p_A \left(\log_2 \frac{\prod_{l=1}^N \sum_{A \setminus i_l} p_A}{p_A} - \sum_{i=1}^K \log_2 \frac{\prod_{i_l \in A_i} \sum_{A \setminus i_l} p_A}{\sum_{A \setminus A_i} p_A} \right) = \\ &= - \sum_A p_A \log_2 \frac{\left(\prod_{l=1}^N \sum_{A \setminus i_l} p_A \right) \prod_{i=1}^K \sum_{A \setminus A_i} p_A}{p_A \prod_{i=1}^K \prod_{i_l \in A_i} \sum_{A \setminus i_l} p_A}, \end{aligned}$$

откуда

$$I(S_1 : S_2 : \dots : S_K) = - \sum_A p_A \log_2 \frac{\prod_{i=1}^K \sum_{A \setminus A_i} p_A}{p_A}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (8), (9) в (7), окончательно получим выражение для функционала

$$J = \frac{\left(\sum_A p_A \log_2 \frac{\prod_{i=1}^K \sum_{A \setminus A_i} p_A}{p_A} \right)}{\left(\sum_A p_A \log_2 \frac{\prod_{l=1}^N \sum_{A \setminus i_l} p_A}{p_A} \right)}. \quad (10)$$

Таким образом, задача разбиения системы S на K слабо связанных между собой подсистем сводится к отысканию разбиения $S = \{S_1, S_2, \dots, S_K\}$, поставляющего минимум функционалу (10).

Данную задачу можно свести к задаче целочисленного программирования. Для этого поставим в соответствие каждой переменной X_i некоторую целочисленную переменную y_l такую, что $y_l = i$, если переменная X_i отнесена к группе переменных, составляющих подсистему S_l ($i = 1, 2, \dots, K$; $l = 1, 2, \dots, N$). Таким образом, на целочисленные переменные y_l накладываются ограничения вида

$$1 \leq y_l \leq K; \quad l = 1, 2, \dots, N; \quad (11) \quad \exists l: y_l = i; \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (12)$$

Следовательно, задачу можно сформулировать следующим образом:

$$\min f(y_1, y_2, \dots, y_N); \quad (13) \quad y_l - \text{целые}, \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

при ограничениях (11)–(12), где $f(y_1, y_2, \dots, y_N)$ — минимизируемый функционал, зависящий от введенных переменных. Тогда исходную задачу отыскания разбиения системы S , доставляющего минимум функционалу (10), можно записать так:

$$\min \left\{ \left(\sum_A p_A \log_2 \frac{\prod_{i=1}^K \sum_{A_i} p_{A_i}}{p_A} \right) \middle/ \left(\sum_A p_A \log_2 \frac{\prod_{l=1}^N \sum_{i_l} p_{A_i}}{p_A} \right) \right\}; \quad (15)$$

$$A_i = \{j_1^i, j_2^i, \dots, j_{s_i}^i \mid j_1^i, j_2^i, \dots, j_{s_i}^i \in A; y_{j_1^i} = y_{j_2^i} = \dots = y_{j_{s_i}^i} = i\}, \quad i = 1, 2, \dots, K; \quad (16)$$

$$\bigcup_{i=1}^K A_i = A; \quad (17)$$

$$s_i \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (18)$$

Ограничения (11), (14) вытекают из условий (16)–(17), а ограничение (18) эквивалентно ограничению (12). Итак, для разбиения системы переменных на K слабо связанных между собой подсистем необходимо решить многоэкстремальную задачу целочисленного программирования (15)–(18), являющуюся задачей комбинаторного типа.

Поступила 13 сентября 1978 г.

А. В. ДАБАГЯН, д-р техн. наук, А. В. МАКАРЕНКО

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ ПОЛЯ ЗАЯВОК И ЕЕ АЛГОРИТМ

Синтез оптимального типоразмерного ряда комплексов технических средств (КТС) может быть осуществлен при помощи построения дихотомического графа альтернативных решений*. Однако задача оптимальной дихотомии не была формализована. В данной работе предлагается формализованная постановка и решение указанной задачи.

Пусть построены интегральные стоимостные характеристики: промежуточная

$$Q(x) = A \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i} \quad (1)$$

— суммарные затраты на обслуживание заявок, параметры которых меньше x , КТС промежуточного типоразмера x ;
максимальная

$$R(x) = B \prod_{i=1}^m x_i^{\beta_i} \quad (2)$$

— суммарные затраты на обслуживание заявок, параметры которых меньше x КТС максимального типоразмера b .

В выражениях (1), (2) коэффициенты A , B и все показатели степеней — постоянные положительные величины, причем

$$\alpha_i > \beta_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Пусть поле заявок представляет собой m -мерный параллелепипед

$$0 \leq a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где a_i , b_i , $i = \overline{1, m}$ — постоянные величины.

Из определения ИСХ (1), (2) следует, что в точке b данные функции равны. Обозначим это значение через D .

Экономический эффект от введения в эксплуатацию наряду с КТС максимального типоразмера КТС промежуточного

$$\Delta(x) = R(x) - Q(x). \quad (5)$$

Задача оптимальной дихотомии заключается в нахождении вектора параметров КТС промежуточного типоразмера x^* , максимизирующего функцию (5) при ограничениях (4).

* Дабегян А. В., Звенигородский Г. А. Построение оптимального типажа. — В кн.: Управление сложными технико-экономическими системами. — Киев: ИК АН УССР, 1974, с. 3—21.

Пусть все величины

$$\beta_i/\alpha_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

разные. Тогда несложно убедиться в том, что экстремум функции (5) может находиться лишь на ребрах гиперпараллелепипеда (4). На ребре x_j , $j = \overline{1, m}$, функция (5) принимает вид

$$\Delta_j(x_j) = B \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m c_i^{\beta_i} x_j^{\beta_j} - A \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m c_i^{\alpha_i} x_j^{\alpha_j}. \quad (7)$$

Необходимое условие экстремума функции (7) выполняется в единственной точке, и нетрудно показать, используя соотношение (3), что в этой точке выполняется достаточное условие максимума данной функции.

Число ребер m -мерного гиперпараллелепипеда равно $m2^{m-1}$, поэтому их перебор с целью поиска глобального максимума может оказаться трудоемким.

Упростим решение задачи оптимальной дихотомии. На ребре x_j , $j = \overline{1, m}$, проходящем через вершину b , максимум функции (7) достигается в точке

$$x_j = b_j (\beta_j/\alpha_j)^{1/(\alpha_j - \beta_j)} \quad (8)$$

и равен

$$\Delta_j(x_j^*) = D (1 - \beta_j/\alpha_j) (\beta_j/\alpha_j)^{\beta_j/(\alpha_j - \beta_j)}. \quad (9)$$

Из (9) видно, что функция (5) на ребрах, проходящих через вершину b , принимает наибольшее значение на том из них, которому соответствует минимальное отношение (6).

Будем рассматривать случай, когда

$$x_i^* \geq a_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (10)$$

Из соотношения (3) и выражения (8) следует также, что

$$x_i^* < b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (11)$$

На ребре x_j , проходящем через вершину,

$$a_r = (a_1, a_2, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_m)^T, \quad r = \overline{1, m}, \quad (12)$$

функция (7) достигает максимума в точке

$$h_j = b_j \left[\beta_j/\alpha_j \prod_{i=1}^r (b_i/\alpha_i)^{\alpha_i - \beta_i} \right]^{1/(\alpha_j - \beta_j)}, \quad j = \overline{r+1, m}. \quad (13)$$

Если

$$\beta_j/\alpha_j \geq \prod_{i=1}^r (a_i/b_i)^{\alpha_i - \beta_i}, \quad (14)$$

максимум лежит вне поля заявок. Поскольку h_j — единственная точка, в которой выполнено необходимое условие экстремума

функции (7), то при $x_i < h_i$ функция монотонно возрастает и достигает наибольшего значения на ребре x_i на границе поля заявок, а именно в вершине (12).

Переобозначим координаты x_i , $i = \overline{1, r}$, так, чтобы они были пронумерованы в порядке возрастания величин (6).

Выполняется условие (10), поэтому справедливы соотношения

$$(b_i/a_i)^{\alpha_i - \beta_i} \geq \alpha_i/\beta_i, \quad i = \overline{1, r-1}. \quad (15)$$

Из (13), (15) следует, что на ребре x_r , проходящем через вершину a_{r-1} , максимум функции (7) достигается в точке $h_r > b_r$, т. е. находится вне поля заявок. Значит, в точке этого ребра, лежащей на границе поля заявок, т. е. в самой вершине a_{r-1} , функция (7) больше, чем в точке с координатой a_r , т. е. в вершине a_r . В результате рассуждений установим, что в точке a_2 функция (7) меньше, чем в точке a_1 . Следовательно, значение функции (7) в любой вершине параллелепипеда поля заявок с одной из координат, равной a_1 , меньше, чем ее значение в вершине a_1 , лежащей на ребре x_1 , которое проходит через вершину b .

Рассуждая так же для всех вершин вида (12), выясним, что в одной из вершин, лежащих на ребрах, проходящих через вершину b , функция (7), а значит, и функция (5), принимает наибольшее значение из всех ее значений в вершинах гиперпараллелепипеда поля заявок. Поскольку на каждом из ребер выполняется соотношение (11), наибольшее значение меньше, чем вычисленное по формуле (9) для наименьшего из отношений (6).

Если соотношение (14) не выполняется, то на ребре x_j , проходящем через вершину (12), максимум функции (7), который обозначим через $\Delta_j(a_r, h_j)$, находится в поле заявок.

После несложных преобразований получим

$$\frac{\Delta_j(a_r, h_j)}{\Delta_j(x_j^*)} = \prod_{i=1}^r \left[\left(\frac{a_i}{b_i} \right)^{\alpha_i - \beta_i} \right]^{\beta_i / (\alpha_i - \beta_i) - \beta_j / (\alpha_j - \beta_j)}. \quad (16)$$

Из неравенства (14) с учетом (10) следует, что

$$\beta_j/\alpha_j \leq \beta_i/\alpha_i, \quad i = \overline{1, r}. \quad (17)$$

Так как все величины (6) разные, неравенство (17) является строгим, значит, отношение (16) меньше единицы. Следовательно, и на ребрах гиперпараллелепипеда внутри поля заявок функция (5) не может принять значения большего, чем вычисленное по формуле (9) для наименьшего из отношений (6).

Таким образом, алгоритм оптимальной дихотомии поля заявок содержит следующие этапы: вычисляются отношения (6) и находится наименьшее; по формуле (8) определяется оптимальное значение параметра, соответствующего наименьшему из отношений (6), и, следовательно, значение вектора параметров КТС

промежуточного типоразмера и производится деление поля заявок на части, обслуживаемые КТС максимального и промежуточного типоразмеров; по формуле (9) находится экономический эффект от введения в эксплуатацию наряду с КТС максимального типоразмера КТС промежуточного типоразмера.

Поступила 20 сентября 1978 г.

УДК 330.115

А. Е. ГОЛОСКОКОВ, Ю. Л. ГИТТИК

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ И КООРДИНАЦИЯ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматривается общая схема метода параметрической декомпозиции и применение этого метода к задаче распределения ресурсов. На основе полученной двухуровневой схемы решения данной задачи дается интерпретация проблемы координации в иерархических системах.

Планирование и управление в реальных экономических системах связано с решением задач математического программирования большой размерности. Размерность задачи определяется количеством переменных, числом и характером ограничений, видом целевой функции. Эффективным подходом решения таких задач является создание иерархических процедур оптимизации. К методам этой группы относится оптимизация на двух уровнях, когда исходная задача разбивается на подзадачи меньшей размерности, зависящие от некоторых связующих параметров. Нахождение оптимальных связующих параметров, т. е. координация, происходит на верхнем уровне. При этом для нахождения оптимального решения между нижним и верхним уровнями происходит некоторый итеративный процесс с помощью обмена информацией. Координация в такой двухуровневой системе наглядно иллюстрирует различные аспекты общей проблемы координации в иерархических системах по М. Месаровичу [1].

Будем рассматривать двухуровневую систему оптимизации, получаемую на основе параметрической декомпозиции задачи определенного типа. Опишем общую схему метода параметрической декомпозиции [2].

Пусть дана задача $A = [X, f]$ нахождения наименьшего значения функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq E^n$. Параметризация задачи A означает такую ее замену новой задачей $B = [Z, f_0]$ нахождения наименьшего значения функции $f_0(x, y)$ на множестве $Z = X + Y$, $Y \subseteq E^m$, что если $(\hat{x}, \hat{y})$ — решение задачи B , то $\hat{x}$ — решение задачи A . Параметрическая декомпозиция задачи A

промежуточного типоразмера и производится деление поля заявок на части, обслуживаемые КТС максимального и промежуточного типоразмеров; по формуле (9) находится экономический эффект от введения в эксплуатацию наряду с КТС максимального типоразмера КТС промежуточного типоразмера.

Поступила 20 сентября 1978 г.

УДК 330.115

А. Е. ГОЛОСКОКОВ, Ю. Л. ГИТТИК

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ И КООРДИНАЦИЯ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматривается общая схема метода параметрической декомпозиции и применение этого метода к задаче распределения ресурсов. На основе полученной двухуровневой схемы решения данной задачи дается интерпретация проблемы координации в иерархических системах.

Планирование и управление в реальных экономических системах связано с решением задач математического программирования большой размерности. Размерность задачи определяется количеством переменных, числом и характером ограничений, видом целевой функции. Эффективным подходом решения таких задач является создание иерархических процедур оптимизации. К методам этой группы относится оптимизация на двух уровнях, когда исходная задача разбивается на подзадачи меньшей размерности, зависящие от некоторых связующих параметров. Нахождение оптимальных связующих параметров, т. е. координация, происходит на верхнем уровне. При этом для нахождения оптимального решения между нижним и верхним уровнями происходит некоторый итеративный процесс с помощью обмена информацией. Координация в такой двухуровневой системе наглядно иллюстрирует различные аспекты общей проблемы координации в иерархических системах по М. Месаровичу [1].

Будем рассматривать двухуровневую систему оптимизации, получаемую на основе параметрической декомпозиции задачи определенного типа. Опишем общую схему метода параметрической декомпозиции [2].

Пусть дана задача $A = [X, f]$ нахождения наименьшего значения функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq E^n$. Параметризация задачи A означает такую ее замену новой задачей $B = [Z, f_0]$ нахождения наименьшего значения функции $f_0(x, y)$ на множестве $Z = X + Y$, $Y \subseteq E^m$, что если $(\hat{x}, \hat{y})$ — решение задачи B , то $\hat{x}$ — решение задачи A . Параметрическая декомпозиция задачи A

означает получение ее решения, при использовании следующей двухуровневой схемы решения задачи B . На нижнем уровне решается задача $B_1 = [X(y), f_0]$ нахождения наименьшего значения $F(y)$ функции $f_0(x, y)$ при фиксированном значении параметра y ; здесь $X(y)$ — соответствующее сечение множества Z . На верхнем уровне решается так называемая координирующая задача $B_2 = [Y, F]$ минимизации функции $F(y)$ на множестве Y допустимых значений параметра y .

Известные варианты параметрической декомпозиции [3] отличаются друг от друга способом формирования задачи B и методом решения задачи B_2 . Используя специфические особенности рассматриваемых классов задач, параметризация обычно проводится таким образом, чтобы задача B_1 оказалась сравнительно простой, в частности, распалась на ряд независимых задач меньшей размерности.

Многие математические модели в экономике сводятся к задаче распределения ресурсов $P = [X, f]$, где $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$; $X = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \leq b, x_i \in X_i, i = \overline{1, n}\}$. Здесь $g_i(x_i) = (g_{1i}(x_i), \dots, g_{mi}(x_i))$, $b = (b_1, \dots, b_m)$. Задача такого вида возникает, например, при распределении парка самолетов по авиалиниям [4].

Разложим задачу P на подзадачи на основе метода параметрической декомпозиции [4, 5]. Получим подзадачи $P_i = [S_i(y_i), f_i]$ нахождения наименьшего значения $\varphi_i(y_i)$ функции $f_i(x_i)$ на множестве $S_i(y_i) = \{x_i : x_i \in X, g_i(x_i) \leq y_i\}$, где $y = (y_1, \dots, y_n)$ — параметр (координирующий вход). Координирующей служит задача $P_0 = [Y, \varphi]$, где $\varphi(y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(y_i)$, $Y = \{(y_1, \dots, y_n) : \sum_{i=1}^n y_i \leq b, \exists x_i \in X_i \text{ такие, что } g_i(x_i) \leq y_i, i = \overline{1, n}\}$.

Обозначим через $x_i(y_i)$ решение подзадачи P_i на координирующем входе y_i , $i = \overline{1, n}$. Предположим, что задача P имеет допустимое решение, множества X_i — выпуклые компакты, $f_i(x_i)$ и каждая компонента $g_i(x_i)$ непрерывны и выпуклы на X_i ($i = \overline{1, n}$).

Обозначим $\partial\varphi(y)$ — множество всех обобщенных градиентов (субградиентов) функции φ в точке y , $u(y) = (u_1(y_1), \dots, u_n(y_n))$ — вектор множителей Лагранжа подзадач при значении координирующего входа $y = (y_1, \dots, y_n)$.

В работе [5] доказано, что при сделанных предположениях — $u(y) \in \partial\varphi(y)$. Следовательно, для нахождения решения координирующей задачи $\hat{y}$ можно использовать процедуру обобщенного градиентного спуска [6]

$$y_{k+1} = \pi(y_k + \alpha_k u(y_k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где π — операция проектирования на Y , $\{\alpha_k\}$ правильна, т. е. удовлетворяет условиям $\alpha_k \in (0, 1)$, $\alpha_k \rightarrow 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ последовательности чисел. Доказано, что при сделанных предположениях процесс (1) сходится [6], т. е. существует $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \hat{y}$. Итеративная процедура приводит к последовательности $\{x(y_k)\}$ допустимых планов задачи P , причем последовательность $\{f(x(y_k))\}$ сходится к $f(\hat{x})$, где $\hat{x}$ — решение задачи P [4].

В работе [7] рассмотренный метод использовался для декомпозиции линейных задач, матрица ограничений которых имеет большое число нулевых элементов.

Предположим дополнительно, что функция $f(x)$ строго выпукла на X .

Теорема. Пусть

$$f(\hat{x}) = \min_{x \in X} f(x) \quad (2)$$

и последовательность $\{x_k\} \subset X$ такова, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\hat{x}). \quad (3)$$

Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x}. \quad (4)$$

Доказательство. По предположению, функция $f(x)$ строго выпукла на множестве X , поэтому, поскольку $\{x_k\} \subset X$, для любого $a \in [0, 1]$ справедливо неравенство $f(a\hat{x} + (1-a)x_k) \leq af(\hat{x}) + (1-a)f(x_k)$. Так как это неравенство для любого $k = 1, 2, \dots$, то можно перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a\hat{x} + (1-a)x_k) \leq af(\hat{x}) + (1-a)\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$. В силу (3) и непрерывности $f(x)$ отсюда получаем $f(a\hat{x} + (1-a)\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) \leq f(\hat{x})$. Но имеет место (2), поэтому $f(a\hat{x} + (1-a)\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = f(\hat{x})$.

При сделанных предположениях точка минимума $\hat{x}$ — единственная, поэтому $a\hat{x} + (1-a)\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x}$ или $(1-a)\lim_{k \rightarrow \infty} x_k =$

$= (1 - a) \hat{x}$. Поскольку это равенство справедливо и для $a \neq 1$, то отсюда следует (4).

Из доказанной теоремы следует, что нахождение координирующего входа $\hat{y}$ такого, что

$$x(\hat{y}) = \hat{x} \quad (5)$$

может быть итеративной процедурой (1).

Дадим интерпретацию основных аспектов проблемы координации в иерархических системах (ср. [1]) на основе описанной двухуровневой схемы решения задачи P .

Синтез координирующего элемента. Поскольку задачи нижнего уровня предопределены структурой глобальной задачи P , задача верхнего уровня P_0 заключается в нахождении входа $\hat{y}$ такого, что выполняется (5). В этом смысле задача P_0 формулируется как глобальная задача P . Поэтому в схеме параметрической декомпозиции координируемость на основе задачи P (это обеспечивает выбранный метод координации) означает также и координируемость по отношению к задаче P_0 .

Метод координации. На основе итеративного алгоритма (1) решения задачи P_0 осуществляется «многофазная» координация. В силу теоремы этот алгоритм позволяет получать вход $\hat{y}$, который решает глобальную задачу, т. е. координирует эту двухуровневую систему.

Проблема модификации. Задача верхнего уровня P_0 координирующим входом y осуществляет модификацию образов подзадач P_i , $i = \overline{1, n}$. Параметрическая декомпозиция, согласно которой используется такой метод модификации, позволяет находить решение глобальной задачи. Поэтому модифицированные подзадачи координируемы относительно задачи P_0 .

Декомпозиция. Задачи верхнего и нижнего уровня определяются по описанной схеме декомпозиции. Метод координации (1) обеспечивает координируемость по отношению к глобальной задаче, а значит, и по отношению к задаче верхнего уровня P_0 .

Синтез координирующего элемента основывается на принятом принципе координации. Как показано в работе [8], в схеме параметрической декомпозиции используется принцип прогнозирования.

Список литературы: 1. Месарович М., Мако Д., Такахага Н. Теория иерархических многоуровневых систем.— М.: Мир, 1973.—344 с. 2. Левин Г. М., Танаев В. С. О параметрической декомпозиции экстремальных задач.— Кибернетика, 1977, № 3, с. 123—128. 3. Верина Л. Ф., Танаев В. С. Декомпозиционные подходы к решению задач математического программирования.— Экономика и математические методы, 1975, II, вып. 6, с. 1160—1172. 4. Голосков А. Е., Емельянов В. И., Гиттик Ю. Л. Об одном подходе к решению распределительной задачи большой размерности.— Исследование больших

систем в гражданской авиации. Труды ГосНИИ ГА, 1977, вып. 149, с. 63—68.
 5. Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем.— М.: Наука, 1975.— 432 с.
 6. Итеративные методы в теории игр и программировании / В. З. Беленький, В. А. Волконский, С. А. Иванов и др.— М.: Наука, 1974.— 240 с.
 7. Ермолева Ю. М. Метод параметрической декомпозиции.— Кибернетика, 1973, № 2, с. 66—69.
 8. Гиттик Ю. Л., Голоскоков А. Е. О связи между принципом прогнозирования и параметрической декомпозицией.— См. статью настоящего вестника.

Поступила 12 октября 1978 г.

УДК 330.115

Ю. Л. ГИТТИК,
 А. Е. ГОЛОСКОКОВ

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПРИНЦИПОМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ

В работе устанавливается связь между принципом прогнозирования [1] и методом параметрической декомпозиции [2]. Показано, что специальный выбор оценки качества прогнозирования позволяет трактовать этот метод декомпозиции как частное применение общего принципа координации.

Пусть дана задача $A = [X, f]$ нахождения наименьшего значения функции $f(x)$ на множестве $X = \{x : g(x) \leq 0, x \in X_1 \times X_2 \dots X_n\}$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik_i})$ — в общем случае векторы; $g(x)$ — m -мерная функция.

Разложим задачу A некоторым образом на подзадачи $A_i = [S_i(\beta_i), f_i(\alpha_i)]$, $i = \overline{1, n}$. При фиксированном $\gamma_i = (\alpha_i, \beta_i)$ обозначим решение (не обязательно единственное) подзадачи A_i через $x_i(\gamma_i)$ ($i = \overline{1, n}$). Задача второго уровня (центра) состоит в нахождении координирующих входов $\hat{\gamma}_i$ таких, что $x_i(\hat{\gamma}_i) = \hat{x}_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ — решение задачи A . В подзадачах A_i ($i = \overline{1, n}$) осуществляется так называемая бикоординация: входы α_i изменяют целевые функции подзадач и осуществляют координацию путем изменения целей, влияние входов β_i связано с изменением множества ограничений — происходит координация путем изменения образов.

Для осуществления процесса координации введем [1] некоторые функции оценки качества прогнозирования $\tilde{q}(\gamma)$ и $q(x(\gamma))$, γ , где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — некоторый координирующий вход; $x(\gamma) = (x_1(\gamma_1), \dots, x_n(\gamma_n))$ — вектор решений подзадач при этом координирующем входе.

Будем говорить (ср. [1]), что при выбранных функциях $\tilde{q}(\gamma)$ и $q(x(\gamma))$, γ и в виде следующих подзадач A_i ($i = \overline{1, n}$):

систем в гражданской авиации. Труды ГосНИИ ГА, 1977, вып. 149, с. 63—68.
 5. Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем.— М.: Наука, 1975.— 432 с.
 6. Итеративные методы в теории игр и программировании / В. З. Беленький, В. А. Волконский, С. А. Иванов и др.— М.: Наука, 1974.— 240 с.
 7. Ермолева Ю. М. Метод параметрической декомпозиции.— Кибернетика, 1973, № 2, с. 66—69.
 8. Гиттик Ю. Л., Голоскоков А. Е. О связи между принципом прогнозирования и параметрической декомпозицией.— См. статью настоящего вестника.

Поступила 12 октября 1978 г.

УДК 330.115

Ю. Л. ГИТТИК,
 А. Е. ГОЛОСКОКОВ

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПРИНЦИПОМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ

В работе устанавливается связь между принципом прогнозирования [1] и методом параметрической декомпозиции [2]. Показано, что специальный выбор оценки качества прогнозирования позволяет трактовать этот метод декомпозиции как частное применение общего принципа координации.

Пусть дана задача $A = [X, f]$ нахождения наименьшего значения функции $f(x)$ на множестве $X = \{x : g(x) \leq 0, x \in X_1 \times X_2 \dots X_n\}$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik_i})$ — в общем случае векторы; $g(x)$ — m -мерная функция.

Разложим задачу A некоторым образом на подзадачи $A_i = [S_i(\beta_i), f_i(\alpha_i)]$, $i = \overline{1, n}$. При фиксированном $\gamma_i = (\alpha_i, \beta_i)$ обозначим решение (не обязательно единственное) подзадачи A_i через $x_i(\gamma_i)$ ($i = \overline{1, n}$). Задача второго уровня (центра) состоит в нахождении координирующих входов $\hat{\gamma}_i$ таких, что $x_i(\hat{\gamma}_i) = \hat{x}_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ — решение задачи A . В подзадачах A_i ($i = \overline{1, n}$) осуществляется так называемая бикоординация: входы α_i изменяют целевые функции подзадач и осуществляют координацию путем изменения целей, влияние входов β_i связано с изменением множества ограничений — происходит координация путем изменения образов.

Для осуществления процесса координации введем [1] некоторые функции оценки качества прогнозирования $\tilde{q}(\gamma)$ и $q(x(\gamma))$, γ , где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — некоторый координирующий вход; $x(\gamma) = (x_1(\gamma_1), \dots, x_n(\gamma_n))$ — вектор решений подзадач при этом координирующем входе.

Будем говорить (ср. [1]), что при выбранных функциях $\tilde{q}(\gamma)$ и $q(x(\gamma))$, γ и в виде следующих подзадач A_i ($i = \overline{1, n}$):

а) к задаче A применим принцип прогнозирования, если из предположения выполнения равенства

$$\tilde{q}(\gamma) = q(x(\gamma), \gamma) \quad (1)$$

следует $x(\gamma) = \hat{x}$;

б) задача A координируема с помощью принципа прогнозирования, если этот принцип применим и существует γ , при котором равенство (1) выполняется.

Рассмотрим применение этого принципа координации для декомпозиции задачи распределения ресурсов $P = [X, f]$, где

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i); X = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \leq b, x_i \in X_i, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Здесь $g_i(x_i) = (g_{i1}(x_i), \dots, g_{im_i}(x_i))$, $b = (b_1, \dots, b_m)$.

Построим подзадачи $P_i = [S_i(\beta_i), f_i]$ нахождения наименьшего значения функции $f_i(x_i)$ на множестве $S_i(\beta_i) = \{x_i : x_i \in X_i, g_i(x_i) \leq \beta_i\}$. Задача верхнего уровня координирующим входом $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ осуществляет модификацию образов в подзадачах P_i , $i = \overline{1, n}$. Предположим, что X_i — выпуклые компакты, $f_i(x_i)$ и каждая компонента $g_i(x_i)$ — непрерывны и выпуклы на X_i , задача P имеет допустимое решение.

Рассмотрим итеративную процедуру

$$\beta^{k+1} = \pi(\beta^k - \rho^k u(\beta^k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где π — некоторый оператор проектирования; ρ^k — шаговый множитель на k -й итерации; $u(\beta^k) = (u_1(\beta_1^k), \dots, u_n(\beta_n^k))$ — вектор множителей Лагранжа на k -й итерации. В работе [6] показано, что если последовательность $\{\rho^k\}$ правильная, то при сделанных предположениях существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta^k = \hat{\beta} \quad (3) \text{ и } x(\hat{\beta}) = \hat{x}, \quad (4)$$

где $\hat{x}$ — решение задачи P .

В условии координации (1) функции $\tilde{q}(\gamma)$, $q(x(\gamma), \gamma)$, используемые для оценки точности прогнозирования, характеризуют соответственно прогнозное и фактическое значения координирующего входа γ . При дальнейшем рассмотрении вместо векторного координирующего входа γ будем записывать вход β , так как модификация целей в подзадачах P_i ($i = \overline{1, n}$) не производится. Поскольку в задаче распределения ресурсов множители Лагранжа позволяют оценивать избыточность (дефицитность) ресурса (ср. [3]), то для оценки фактического значения координирующего входа β будем использовать функцию вида $q(u(\beta))$,

β), где $u(\beta)$ — вектор множителей Лагранжа подзадач. Введем функции

$$\tilde{q}(\beta) = \beta, \quad q = (u(\beta), \beta) = \pi(\beta - \rho u(\beta)), \quad (5)$$

где оператор π и множитель ρ имеют тот же смысл, что и в (1). Тогда условие координации выражается в виде

$$\tilde{q}(\beta) = q(u(\beta), \beta). \quad (6)$$

Покажем, что при сделанных предположениях задача P координируема с помощью принципа прогнозирования.

Применимость принципа. Пусть для некоторого $\beta^s \in \{\beta^k\}$ имеет место равенство

$$\tilde{q}(\beta^s) = q(u(\beta^s), \beta^s). \quad (7)$$

В силу (3) последовательность $\{\beta^k\}$ сходится, для нее выполняется условие Коши, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для любых целых положительных t неравенство $\|\beta^k - \beta^{k+t}\| < \varepsilon$ выполняется при $k > N$. В частности, при $t=1$ это неравенство имеет вид $\|\beta^k - \beta^{k+1}\| < \varepsilon$. (8) С ростом N величина $\|\beta^k - \beta^{k+1}\|$ уменьшается, поэтому, переходя в (8) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что $N \rightarrow \infty$. Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta^k = \hat{\beta}$,

уравнение (7) решает координирующий вход $\hat{\beta}$. Отсюда с учетом (4) и следует применимость принципа прогнозирования.

Координируемость. Равенство (6) выполняется, например, при значении координирующего входа $\hat{\beta}$. Итак, задача P является координируемой.

Рассмотренный метод декомпозиции является одним из вариантов параметрической декомпозиции (ср. [6]). Таким образом, выбор функций оценки точности прогнозирования вида (5) позволяет трактовать метод параметрической декомпозиции как частное применение общего принципа координации. В работах [4], [5] рассматривалась декомпозиция задачи распределения ресурсов на основе частного случая принципа прогнозирования — принципа прогнозирования взаимодействий.

Список литературы: 1. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. — М.: Мир, 1973. — 344 с. 2. Левин Г. М., Танаев В. С. О параметрической декомпозиции экстремальных задач. — Кибернетика, 1977, с. 123—128. 3. Багриновский К. А. Формирование локальных подзадач и распределение ресурсов. — В кн.: Математические методы решения экономических задач. Новосибирск, 1971, с. 5—41. 4. Ульм С. Ю. О декомпозиции задачи распределения ресурсов на основе принципа прогнозирования взаимодействий. — В кн.: Модели и методы анализа экономических целенаправленных систем, Новосибирск, 1977, с. 71—78. 5. Мересоо Т. Об одном методе декомпозиции для задач распределения ресурсов. — Изв. АН Эст. ССР. Физика,

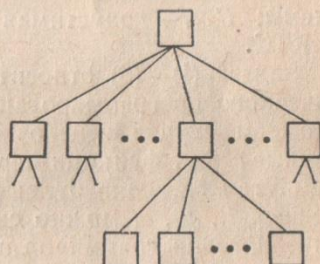
Поступила 12 октября 1978 г.

УДК 621.317

Ю. В. МАРГАНИЯ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА КТС АСУП МЕТОДОМ «ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ»

В работе [1] сформулирована задача выбора оптимального варианта комплекса технических средств (КТС) автоматизированной системы управления предприятием (АСУП) при заданной структурной схеме КТС и известных вариантах реализаций ее элементов (подсистем). В работе [2] предложен эвристический алгоритм, обеспечивающий получение приближенного решения сформулированной задачи. В настоящей статье приводится решение задачи методом «ветвей и границ», позволяющим находить глобальный экстремум.



Рассматривается типичная трехуровневая структурная схема КТС, изображенная на рисунке, на первом уровне которой представлены подсистемы сбора и регистрации информации, на втором — подсистемы передачи информации, на третьем — подсистема обработки, накопления и выдачи информации (ИВЦ). Каждый вариант подсистемы из возможных ее реализаций характеризуется тремя параметрами: временем преобразования информации, ее достоверностью и приведенными затратами. Необходимо из всех возможных вариантов выбрать вариант КТС с минимальными приведенными затратами, удовлетворяющий заданным ограничениям на время и достоверность преобразования информации.

Общее время преобразования информации в КТС определяется равенством $T = t_{\text{рег}} + t_{\text{пер}} + t_{\text{ивц}}$, где $t_{\text{рег}}$ — время регистрации информации; $t_{\text{пер}}$ — время передачи информации; $t_{\text{ивц}}$ — время переработки и выдачи информации.

Достоверность информации в целом по КТС можно определить по следующей приближенной формуле: $P = \sum_{i=1}^n k_i p_i$, где k_i — коэффициент относительного распределения информации по подсистемам; p_i — вероятность искажения одного знака информации в i -й подсистеме; n — общее количество подсистем.

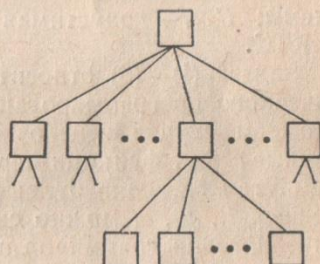
Поступила 12 октября 1978 г.

УДК 621.317

Ю. В. МАРГАНИЯ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА КТС АСУП МЕТОДОМ «ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ»

В работе [1] сформулирована задача выбора оптимального варианта комплекса технических средств (КТС) автоматизированной системы управления предприятием (АСУП) при заданной структурной схеме КТС и известных вариантах реализаций ее элементов (подсистем). В работе [2] предложен эвристический алгоритм, обеспечивающий получение приближенного решения сформулированной задачи. В настоящей статье приводится решение задачи методом «ветвей и границ», позволяющим находить глобальный экстремум.



Рассматривается типичная трехуровневая структурная схема КТС, изображенная на рисунке, на первом уровне которой представлены подсистемы сбора и регистрации информации, на втором — подсистемы передачи информации, на третьем — подсистема обработки, накопления и выдачи информации (ИВЦ). Каждый вариант подсистемы из возможных ее реализаций характеризуется тремя параметрами: временем преобразования информации, ее достоверностью и приведенными затратами. Необходимо из всех возможных вариантов выбрать вариант КТС с минимальными приведенными затратами, удовлетворяющий заданным ограничениям на время и достоверность преобразования информации.

Общее время преобразования информации в КТС определяется равенством $T = t_{\text{рег}} + t_{\text{пер}} + t_{\text{ивц}}$, где $t_{\text{рег}}$ — время регистрации информации; $t_{\text{пер}}$ — время передачи информации; $t_{\text{ивц}}$ — время переработки и выдачи информации.

Достоверность информации в целом по КТС можно определить по следующей приближенной формуле: $P = \sum_{i=1}^n k_i p_i$, где k_i — коэффициент относительного распределения информации по подсистемам; p_i — вероятность искажения одного знака информации в i -й подсистеме; n — общее количество подсистем.

Задачу выбора оптимального варианта КТС сформулируем в следующем виде: найти

$$\min C = \sum_{i=1}^n c_i \quad (1)$$

при ограничениях

$$t_{\text{рег}}^k + t_{\text{пер}}^k + t_{\text{ивц}} \leq T_{\text{доп}}, \quad j = 1, 2, \dots, m_k, \quad k = 1, 2, \dots, f; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n k_i p_i \leq P_{\text{доп}}, \quad (3)$$

где C — приведенные затраты на КТС; c_i — приведенные затраты на i -ю подсистему; $t_{\text{рег}}^k$ — время регистрации информации в j -й подсистеме k -й ветви структурной схемы; $t_{\text{пер}}^k$ — время передачи информации в k -й ветви структурной схемы; $T_{\text{доп}}$ — допустимое значение времени преобразования информации; m_k — число подсистем регистрации в k -й ветви; f — число ветвей структурной схемы; $P_{\text{доп}}$ — допустимая вероятность искажения информации в КТС.

Задача (1)–(3) относится к классу задач дискретного математического программирования, переменные которой принимают в общем случае нецелочисленные значения. Кроме того, переменные c_i как функции переменных t_i , p_i являются нелинейными.

Путем введения булевых переменных x_j и исключения переменных t_i , p_i , c_i можно свести задачу к форме целочисленного линейного программирования [3]. Например, для i -й подсистемы замена переменных производится следующим образом:

$$t_i = t_{i1} x_1 + t_{i2} x_2 + \dots + t_{ik} x_k;$$

$$p_i = p_{i1} x_1 + p_{i2} x_2 + \dots + p_{ik} x_k;$$

$$c_i = c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + \dots + c_{ik} x_k,$$

где $\sum_{i=1}^k x_i = 1$; x_i — целые; k — число вариантов возможных реализаций i -й подсистемы. В результате, произведя замену всех переменных, получаем задачу линейного целочисленного программирования, которая решается по известному алгоритму метода «ветвей и границ» [3].

Алгоритм решения задачи (1)–(3) запрограммирован на АЛГОЛЕ для машины «М-222». Решался пример размерностью 4^{10} вариантов, время трансляции программы составило 3 мин, время счета — 7 мин.

Список литературы: Одна постановка задачи выбора оптимального варианта КТС АСУП/Ю. В. Маргания, А. В. Дабагян, В. Г. Баженов и др. — В кн.: Системы автоматического управления и контроля, Киев, ИК АН УССР, 1974, с. 17–22. 2. Алгоритм частичного направленного перебора при решении задачи выбора оптимального варианта КТС АСУП/А. В. Дабагян, Ю. В. Мар-

Поступила 11 ноября 1978 г.

УДК 658.012

А. И. ЯРОХ, канд. техн. наук,
В. Г. БАЖЕНОВ, канд. техн. наук

ЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА БАЗЫ ДАННЫХ АСУ

Важнейшим этапом построения банка данных АСУ является логическая организация информации. Последняя предполагает решение следующих вопросов: а) выявление состава показателей, входящих в информационную модель системы управления; б) определение множества признаков, по которым систематизируется информация, и уровней детализации информации по каждому признаку; в) построение классификаторов и списков значений каждого признака показателя; г) организация системных файлов базы данных.

Показатель рассматривается как информационная совокупность наименьшего состава, достаточная для образования самостоятельного сообщения, а также содержащая количественное значение и набор качественных признаков, необходимых для его идентификации (π , $\mu_1, \dots, \mu_n$, O).

Здесь π — основной признак, характеризующий вид показателя; $\mu_1, \dots, \mu_n$ — набор признаков, конкретизирующих показатель; O — количественная величина показателя.

Конкретные значения i -го качественного признака раскрываются списком $S_i(\mu_i)$. Если в силу иерархической структуры системы управления используется несколько уровней детализации информации в разрезе i -го сложного признака, то составляются списки для каждого j -го уровня детализации $S_i^j(\mu_i) = 0, 1, 2 \dots$. На множестве списков разных уровней детализации признака строятся функции отображения $f_i^{j,j-1}: S_i^j(\mu_i) \rightarrow S_i^{j-1}(\mu_i^{j-1})$. Множество списков, связанных функциями отображения, образуют классификатор значений сложного признака μ_i :

$$K_i(\mu_i) = \{S_i^{j-1}(\mu_i^{j-1}), S_i^j(\mu_i), f_i^{j,j-1}, j = 1, 2, \dots\}, \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

В результате информационного анализа задач управления строится каталог показателей. В нем дается перечень видов показателей (список $S(\pi)$) и ссылки на конкретизирующие их списки (S_i^j , $i = 1, \dots, n$, $j = 0, 1, 2 \dots$). Каталог позволяет отразить конкретную комбинацию признаков, уровней их детализации

Поступила 11 ноября 1978 г.

УДК 658.012

А. И. ЯРОХ, канд. техн. наук,
В. Г. БАЖЕНОВ, канд. техн. наук

ЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА БАЗЫ ДАННЫХ АСУ

Важнейшим этапом построения банка данных АСУ является логическая организация информации. Последняя предполагает решение следующих вопросов: а) выявление состава показателей, входящих в информационную модель системы управления; б) определение множества признаков, по которым систематизируется информация, и уровней детализации информации по каждому признаку; в) построение классификаторов и списков значений каждого признака показателя; г) организация системных файлов базы данных.

Показатель рассматривается как информационная совокупность наименьшего состава, достаточная для образования самостоятельного сообщения, а также содержащая количественное значение и набор качественных признаков, необходимых для его идентификации (π , $\mu_1, \dots, \mu_n$, O).

Здесь π — основной признак, характеризующий вид показателя; $\mu_1, \dots, \mu_n$ — набор признаков, конкретизирующих показатель; O — количественная величина показателя.

Конкретные значения i -го качественного признака раскрываются списком $S_i(\mu_i)$. Если в силу иерархической структуры системы управления используется несколько уровней детализации информации в разрезе i -го сложного признака, то составляются списки для каждого j -го уровня детализации $S_i^j(\mu_i) = 0, 1, 2 \dots$. На множестве списков разных уровней детализации признака строятся функции отображения $f_i^{j,j-1}: S_i^j(\mu_i) \rightarrow S_i^{j-1}(\mu_i^{j-1})$. Множество списков, связанных функциями отображения, образуют классификатор значений сложного признака μ_i :

$$K_i(\mu_i) = \{S_i^{j-1}(\mu_i^{j-1}), S_i^j(\mu_i), f_i^{j,j-1}, j = 1, 2, \dots\}, \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

В результате информационного анализа задач управления строится каталог показателей. В нем дается перечень видов показателей (список $S(\pi)$) и ссылки на конкретизирующие их списки (S_i^j , $i = 1, \dots, n$, $j = 0, 1, 2 \dots$). Каталог позволяет отразить конкретную комбинацию признаков, уровней их детализации

списков, необходимых для описания данного показателя. Практика показывает, что около 80% показателей информационной системы, описанной каталогом, являются производными. При организации системных файлов базы данных в нее включаются только первичные показатели. Для этого по каждому признаку используется максимальный или практически доступный уровень детализации. В дальнейшем список, соответствующий принятому в базе данных уровню детализации данного признака, помечаем звездочкой. При построении логической структуры базы данных выделяются ведущие признаки (π , $\mu_1, \dots, \mu_m$) и вспомогательные ($\mu_{m+1}, \dots, \mu_n$). Детализация информации по ведущему признаку является неизменной для всех показателей базы данных. В то же время уровни детализации (j^*) вспомогательных признаков не являются жесткими и зависят от конкретной комбинации значений ведущих признаков

$$t^* = j(x_0, x_1, \dots, x_m) \text{ для } S_i^*, i = m+1, \dots, n.$$

В терминах введенных обозначений база данных представляет собой следующее множество первичных показателей ($Bx_0x_1 \dots x_mx_{m+1} \dots x_n$, где $x_0, x_1, \dots, x_n$ — индексы показателя, соответствующие конкретным значениям списков $S(\pi)$, S_i^*):

$$\{Bx_0x_1 \dots x_mx_{m+1} \dots x_n \mid x_0 \in S(\pi), (x_i \in S_i^*, i = 1, \dots, m);$$

$$[x_i \in (S_i^*, j^* = j(x_0, x_1, \dots, x_m)), i = m+1, \dots, n]\}.$$

Состав данных, содержащихся в базовых массивах, позволяет получить любые производственные показатели с любой детализацией признаков, входящих в построенную систему и отраженных в каталоге, поскольку первичные и производственные показатели описываются единой системой признаков, классификаторов, списков. Производные показатели вычисляются периодически в соответствии с регламентом решения задач или при поступлении запроса. Производные показатели находим при помощи операторов поиска и агрегирования первичных показателей. Логической основой операции агрегирования являются функции отображения списков разных уровней детализации. Логические соотношения отражены в структуре базового файла. Каждому значению показателя соответствует одна системная запись. Формат последней предусматривает наличие в ней значений признаков показателя из списков, описывающий первичный показатель, а также информации об отображении в списки всех уровней детализации в разрезе каждого признака.

Список литературы: 1. Паныч А. С., Ярох А. И. Методические аспекты систематизации показателей в нормативной базе ОАСУчермет. — В кн.: Опыт разработки, перспективы развития и внедрения отраслевых автоматизированных систем управления для промышленных министерств и ведомств, М., 1977, с. 54. 2. Средства формализованного описания экономических данных для АСУ (отчет). ЦЭМИ, АН СССР, отделение экономики. — М.: 1975. — 230 с.

Поступила 28 октября 1978 г.

В. И. НЕЧИПУРЕНКО, канд. техн. наук

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ СНАБЖЕНИЯ. АГРЕГИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ

Характерной структурой систем снабжения массовыми грузами является такая структура, в которой «поставщики» и «потребители» связаны прямыми хозяйственными связями. Решение задачи оптимального управления запасами в звене типа поставщик — потребитель при стохастическом характере всех параметров модели дано в работе [1]. Рассмотрим методику агрегирования элементарных звеньев в целях получения оптимального решения для системы поставщики — потребители [2].

При агрегировании возможны два принципиально важных случая: а) агрегирование системы поставщики — потребитель; б) агрегирование системы поставщик — потребитель.

Рассмотрим первую структуру, предполагая, что число поставщиков равно двум. Фактически необходимо просуммировать два случайных процесса, располагая для любого момента времени плотностями распределения значений в обоих каналах. При суммировании плотностей распределения вероятностей возникают трудности, связанные с тем, что случайные величины, описывающие уровни запаса в каждом из каналов, являются коррелированными. Корреляция объясняется тем, что при декомпозиции исходной системы отношение интенсивностей потребления двух каналов остается постоянным. Поэтому, если плотности распределения в каналах определены при соответствующих интенсивностях потребления, можно производить суммирование, как для независимых случайных величин, так как объемы поставок по каналам — независимые случайные величины.

Обозначим: $s(I)$ — уровень запаса в первом канале; $s(II)$ — уровень запаса во втором канале; s_2 — суммарный уровень запаса.

В этом случае

$$P_{s_2/\mu_m}(s_2/\mu_m, \tilde{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{s(I)/\mu_m^I}[s(I)/\mu_m^I, \tilde{t}] \times \\ \times P_{s(II)/\mu_m^{II}}[s_2 - s(I)/\mu_m^I, \tilde{t}] ds(I); \\ \mu_m^I = \gamma_1 \mu_m; \mu_m^{II} = \gamma_2 \mu_m.$$

Осредняя по всем возможным значениям μ_m , получим

$$P_{s_2}(s_2/\tilde{t}) = \sum_{\mu_m \in [\mu^1, \mu^2]} P_{s_2}(s_2/\mu_m, \tilde{t}) P_{\mu_m}(\mu_m) \Delta \mu_m.$$

Определим интервал T_2 , на котором рассмотрим функционирование системы как наименьшее общее кратное величин $N_0^I T^I, N_0^{II} T^{II}$.

Тогда суммарный процесс можно рассматривать как периодический с периодом T_{Σ} , т. е. достаточно рассмотреть моменты времени $\tilde{t} \in T_{\Sigma}$. Однако и на интервале T_{Σ} нет необходимости рас-

сматривать все значения $\tilde{t}$, а только те, для которых $s_{\Sigma} < 0$, т. е. определить плотности распределения вероятностей уровня запаса в моменты возможного наступления дефицита в системе.

Определив, как указывалось ранее, максимально возможный дефицит, превышение которого возможно лишь с вероятностью P_0 , для всех возможных моментов дефицита и просуммировав, можно получить суммарный дефицит на интервале T_{Σ} и, следовательно, суммарное время дефицита $T_{d\Sigma}$.

Величина $T_{d\Sigma}$ в силу проявления эффекта «централизации» запаса должна удовлетворять неравенству $T_{d\Sigma} < T_{d\Sigma 0}$, где $T_{d\Sigma 0}$ — допустимое время дефицита для системы. Тогда для системы в целом можно уменьшить величину страхового запаса на $\Delta s_{\text{стр } \Sigma} = (T_{d\Sigma 0} - T_{d\Sigma}) M[\mu]/r$, где r — число дефицитных ситуаций в системе.

Значения $\Delta s_{\text{стр } I}$, $\Delta s_{\text{стр } II}$ можно определить исходя из требования равнонадежности каналов:

$$1 - \frac{s_{dI}^0 - \Delta s_{\text{стр } I}}{M[\mu^I] N_0^I T^I} = 1 - \frac{s_{dII}^0 - \Delta s_{\text{стр } II}}{M[\mu^{II}] N_0^{II} T^{II}},$$

причем $\Delta s_{\text{стр } I} + \Delta s_{\text{стр } II} = \Delta s_{\text{стр } \Sigma}$.

Опуская несложные преобразования, получим

$$\Delta s_{\text{стр } I} = \Delta s_{\text{стр } \Sigma} \frac{M[\mu^I] N_0^I T^I}{M[\mu^I] N_0^I T^I + M[\mu^{II}] N_0^{II} T^{II}};$$

$$\Delta s_{\text{стр } II} = \Delta s_{\text{стр } \Sigma} \frac{M[\mu^{II}] N_0^{II} T^{II}}{M[\mu^I] N_0^I T^I + M[\mu^{II}] N_0^{II} T^{II}}.$$

Таким образом, после агрегирования получим новые значения искомых величин:

$$s_{\text{стр } I}^* = s_{\text{стр } I} - \Delta s_{\text{стр } I}; \quad s_{\text{стр } II}^* = s_{\text{стр } II} - \Delta s_{\text{стр } II};$$

$$R_I^* = s_{\text{стр } I}^* + \Delta I; \quad R_{II}^* = s_{\text{стр } II}^* + \Delta II.$$

Уровни запаса у поставщиков остаются без изменения.

При рассмотрении второй структуры происходит суммирование запаса у поставщика. Однако в рассматриваемой постановке задачи эффекта уменьшения суммарного запаса не произойдет, так как к поставщику предъявляется требование — отгрузить необходимое число с вероятностью, равной единице. Поэтому суммарный средний запас у поставщика определится как сумма средних запасов по каждому каналу.

Возможны постановки задачи, когда требования потребителей будут удовлетворяться с некоторой вероятностью. Тогда суммарный запас поставщика будет меньше алгебраической суммы запасов по каналам.

Список литературы: 1. Нечипуренко В. И. Алгоритм оптимизации совокупного запаса в системе поставщик—потребитель промышленных предприятий.— В кн.: Системы автоматического управления и контроля, Киев, 1974, с. 24—27. 2. Нечипуренко В. И. Оптимальное управление процессом снабжения номенклатурой группы А в системе поставщики — потребители: Дис. ... канд. техн. наук.— Харьков, 1978.—170 с.

Поступила 13 октября 1978 г.

УДК 62—50

Ю. Т. КОСТЕНКО, канд. техн. наук, А. Н. ЦЫГАНКОВ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К УПРАВЛЕНИЮ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

К управлению сложными системами предъявляются все более жесткие требования. Оно становится многопараметрическим, растут масштабы моделей, сложность функций управления. Все это вызвано разнообразием достигаемых целей, различием частот осуществляемых воздействий и т. д.

При новом параметрическом управлении классические методы управления уже не дают удовлетворительных результатов. Возникает необходимость отыскания и применения новых методов и структур управления.

В работе [1] предлагается управлять системой по возрастающим уровням сложности. При этом вся система разбивается на отдельные взаимосвязанные подсистемы. Разбиение-декомпозиция системы может проводиться несколькими способами [2], [3].

1. Декомпозиция системы по слабым связям. Необходимо добиться минимально возможной связи между подсистемами.

2. Декомпозиция системы по минимальным группам сочленения. Связь между подсистемами осуществляется посредством минимально возможного числа параметров.

Проведя декомпозицию, можно с уверенностью сказать, что у каждой подсистемы существует своя цель. Эти цели наверняка не совпадают. Даже если каждая подсистема способна решить свою задачу (например, если речь идет об оптимизации, найти оптимальное управление, максимизирующее критерий), то до сих пор не существует никакой гарантии, что удовлетворение всех локальных целей приведет к удовлетворению глобальной цели.

Основная идея, предложенная М. Месаровичем [1], заключается во введении «координирующего множества», заменяющего каждую проблему P_i семейством проблем $P_i(\lambda)$, параметры λ

Возможны постановки задачи, когда требования потребителей будут удовлетворяться с некоторой вероятностью. Тогда суммарный запас поставщика будет меньше алгебраической суммы запасов по каналам.

Список литературы: 1. Нечипуренко В. И. Алгоритм оптимизации совокупного запаса в системе поставщик—потребитель промышленных предприятий.— В кн.: Системы автоматического управления и контроля, Киев, 1974, с. 24—27. 2. Нечипуренко В. И. Оптимальное управление процессом снабжения номенклатурой группы А в системе поставщики — потребители: Дис. ... канд. техн. наук.— Харьков, 1978.—170 с.

Поступила 13 октября 1978 г.

УДК 62—50

Ю. Т. КОСТЕНКО, канд. техн. наук, А. Н. ЦЫГАНКОВ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К УПРАВЛЕНИЮ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

К управлению сложными системами предъявляются все более жесткие требования. Оно становится многопараметрическим, растут масштабы моделей, сложность функций управления. Все это вызвано разнообразием достигаемых целей, различием частот осуществляемых воздействий и т. д.

При новом параметрическом управлении классические методы управления уже не дают удовлетворительных результатов. Возникает необходимость отыскания и применения новых методов и структур управления.

В работе [1] предлагается управлять системой по возрастающим уровням сложности. При этом вся система разбивается на отдельные взаимосвязанные подсистемы. Разбиение-декомпозиция системы может проводиться несколькими способами [2], [3].

1. Декомпозиция системы по слабым связям. Необходимо добиться минимально возможной связи между подсистемами.

2. Декомпозиция системы по минимальным группам сочленения. Связь между подсистемами осуществляется посредством минимально возможного числа параметров.

Проведя декомпозицию, можно с уверенностью сказать, что у каждой подсистемы существует своя цель. Эти цели наверняка не совпадают. Даже если каждая подсистема способна решить свою задачу (например, если речь идет об оптимизации, найти оптимальное управление, максимизирующее критерий), то до сих пор не существует никакой гарантии, что удовлетворение всех локальных целей приведет к удовлетворению глобальной цели.

Основная идея, предложенная М. Месаровичем [1], заключается во введении «координирующего множества», заменяющего каждую проблему P_i семейством проблем $P_i(\lambda)$, параметры λ

которых таковы, что существует такое значение λ^* , для которого решение $[P_1(\lambda), \dots, P_n(\lambda)]$ равно решению P .

Параметры λ поступают от вышестоящего блока координации, функции которого можно определить следующим образом: 1) выбор способа координации; 2) модифицирование функций, определяющих стратегии нижестоящих элементов, если это необходимо; 3) выбор координирующих воздействий после того, как приняты остальные решения.

Способ координации выбирается по имеющимся трем методам влияния на нижестоящую подсистему: 1) воздействие на модель подсистемы; 2) воздействие на критерий подсистемы; 3) воздействие и на модель, и на критерий подсистемы (смешанная координация). Координация может проводиться посредством использования обратной связи, а также итеративными методами. При этом важной проблемой является проблема сходимости.

Как уже указывалось, на уровне координатора результатами решения задачи являются параметры координации λ . В них заключена информация о результирующих воздействиях между подсистемами. Существует три подхода к рассмотрению такого рода взаимодействий.

1. Прогнозирование взаимодействий. В этом случае дается прогнозное значение связей между подсистемами, которое будет иметь место при подаче управляющих воздействий.

2. «Развязывание» взаимодействий. Каждая нижестоящая подсистема решает свою задачу. При этом взаимосвязи рассматриваются как дополнительные переменные, которые подсистема может выбирать по своему усмотрению. Задачи нижестоящих уровней решаются при этом как автономные, т. е. независимые друг от друга.

3. Оценка взаимодействий. Координатор в этом случае не сообщает точных данных о взаимосвязях между подсистемами, а лишь ограничивает области их изменения. Это синтез первого и второго подходов. Нижестоящей подсистеме задается область изменения взаимосвязи с другими подсистемами. Конкретное задание связи подсистема выбирает из этой области по второму методу, т. е. на автономность подсистемы накладывается ограничение. Характер разбиения общего алгоритма управления на подалгоритмы, т. е. способ разделения функций управления между ступенями иерархической системы имеет определяющее значение при выборе структуры системы. Одной из особенностей иерархических систем управления является то, что функции управления низших уровней могут быть переданы высшим уровням, но не наоборот [4].

Итак, возникновение сложных систем требует нового подхода к управлению ими. Эффективным и целесообразным кажется применение иерархических систем управления, которые сочетают в себе принцип централизованного управления с одновременным распределением функций между многими элемен-

тами системы. При этом существенно повышается живучесть системы, так как при отказе каких-либо управляющих органов их функции могут быть переданы другим элементам системы, например, вышестоящим органам. При этом важной проблемой, подлежащей решению, является выбор и применение способа координации для данной исследуемой сложной системы.

Список литературы: 1. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем.— М.: Мир, 1973.—344 с. 2. Костенко Ю. Т., Безменов Н. И., Серокуров В. Е. О применении теории графов при структурном анализе сложных систем.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1979, № 148. Сер. Прикладная механика и процессы управления, вып. 1, с. 48—51. 3. Костенко Ю. Т., Безменов Н. И. Об одном подходе к декомпозиции сложной системы на слабо связанные между собой подсистемы.— См. статью настоящего вестника. 4. Коекин А. И. О некоторых принципах построения иерархических систем.— Управляющие системы и машины, 1975, № 2, с. 1—7.

Поступила 3 ноября 1978 г.

УДК 629.734

В. М. КОТИН, М. Д. ГОДЛЕВСКИЙ,
А. М. ШУРАПЕЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ В ОБЩЕЙ СХЕМЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПАРКА САМОЛЕТОВ ГА

Задача уменьшения приведенных затрат на перспективный парк самолетов ГА решается при оптимизации обликковых характеристик пассажирского самолета. Одной из обликковых характеристик, определяющих тип самолета, является количество пассажирских мест — n_k . Увеличение этого параметра приводит к понижению удельных эксплуатационных затрат на одного пассажира, что признано положительным фактором. Однако, как показали предыдущие исследования, минимум приведенных затрат при оптимизации обликковых характеристик достигается при некотором оптимальном значении n_{0k} и увеличение этого параметра нежелательно.

В данной статье рассматривается подход, позволяющий путем перераспределения поля заявок (параметров сети авиалиний) и увеличением n_{0k} уменьшить затраты на парк самолетов. В основе указанного подхода лежит проведенный качественный анализ структуры приведенных затрат, точнее, каждой составляющей статьи приведенных затрат. Зависимость приведенных затрат от параметра n_k , приведенная на рис. 1 (кривая 3), может быть получена умножением двух функций, зависящих от n_k и характеристик сети авиалиний.

Пусть S — приведенные затраты на парк самолетов, тогда

$$S(n_k) \sim q\Omega, \quad (1)$$

тами системы. При этом существенно повышается живучесть системы, так как при отказе каких-либо управляющих органов их функции могут быть переданы другим элементам системы, например, вышестоящим органам. При этом важной проблемой, подлежащей решению, является выбор и применение способа координации для данной исследуемой сложной системы.

Список литературы: 1. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем.— М.: Мир, 1973.—344 с. 2. Костенко Ю. Т., Безменов Н. И., Серокуров В. Е. О применении теории графов при структурном анализе сложных систем.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1979, № 148. Сер. Прикладная механика и процессы управления, вып. 1, с. 48—51. 3. Костенко Ю. Т., Безменов Н. И. Об одном подходе к декомпозиции сложной системы на слабо связанные между собой подсистемы.— См. статью настоящего вестника. 4. Коекин А. И. О некоторых принципах построения иерархических систем.— Управляющие системы и машины, 1975, № 2, с. 1—7.

Поступила 3 ноября 1978 г.

УДК 629.734

В. М. КОТИН, М. Д. ГОДЛЕВСКИЙ,
А. М. ШУРАПЕЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ В ОБЩЕЙ СХЕМЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПАРКА САМОЛЕТОВ ГА

Задача уменьшения приведенных затрат на перспективный парк самолетов ГА решается при оптимизации обликковых характеристик пассажирского самолета. Одной из обликковых характеристик, определяющих тип самолета, является количество пассажирских мест — n_k . Увеличение этого параметра приводит к понижению удельных эксплуатационных затрат на одного пассажира, что признано положительным фактором. Однако, как показали предыдущие исследования, минимум приведенных затрат при оптимизации обликковых характеристик достигается при некотором оптимальном значении n_{0k} и увеличение этого параметра нежелательно.

В данной статье рассматривается подход, позволяющий путем перераспределения поля заявок (параметров сети авиалиний) и увеличением n_{0k} уменьшить затраты на парк самолетов. В основе указанного подхода лежит проведенный качественный анализ структуры приведенных затрат, точнее, каждой составляющей статьи приведенных затрат. Зависимость приведенных затрат от параметра n_k , приведенная на рис. 1 (кривая 3), может быть получена умножением двух функций, зависящих от n_k и характеристик сети авиалиний.

Пусть S — приведенные затраты на парк самолетов, тогда

$$S(n_k) \sim q\Omega, \quad (1)$$

где $q(n_k)$ — функция, определяемая техническими характеристиками самолета; $\Omega(n_k)$ — функция, учитывающая характеристики сети авиалиний и условие по парности рейсов. Функция $q(n_k)$ (рис. 1, кривая 1) при возрастании n_k уменьшается. Это объясняется улучшением технико-экономических данных отдельного самолета при увеличении n_k . Зависимость $\Omega(n_k)$ (рис. 1, кривая 2) при увеличении n_k остается постоянной до некоторого значения, а затем увеличивается. Это вызвано тем, что использование самолетов с большим числом мест на авиалиниях с низкой частотой рейсов экономически не целесообразно. Оптимальное

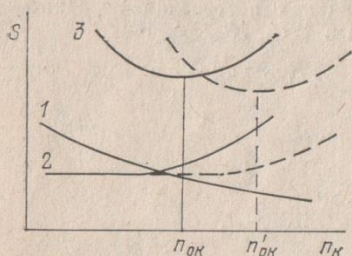


Рис. 1.

значение параметра $n_{ок}$ соответствует минимуму приведенных затрат на парк самолетов (рис. 1, кривая 3).

Параметры сети авиалиний, необходимых для обслуживания самолетов, будем называть полем заявок. Сущность подхода заключается в следующем: авиалинии с малыми пассажиропотоками удаляются из поля заявок, а их обслуживание возлагается на самолеты, которые используются на авиалиниях с большими

пассажиропотоками. Так как на авиалиниях с малыми пассажиропотоками частота рейсов низкая, удаление этих авиалиний из поля заявок приведет к смещению кривой 2 вправо. В силу зависимости (1) смещение кривой 2 влияет на изменение оптимального значения $n_{ок}$, а также на уменьшение минимума приведенных затрат, так как кривая 3 сместится вправо и вниз (новое положение кривых 1, 3 показано на рис. 1 пунктирной линией). Задачу перераспределения поля заявок указанным выше способом назовем задачей маршрутизации. Авиалинии с малыми пассажиропотоками, которые не удовлетворяют условию по парности рейсов, назовем «дефектными».

Поле заявок с экономической точки зрения необходимо перераспределять наиболее выгодным образом. Это значит, что следует заменить обслуживание центров самолетами на других авиалиниях (чаще вновь созданных) или включить обслуживание этих центров на более протяженных авиалиниях. На выбор перераспределения накладываются ограничения территориального характера. Из всего изложенного вытекает, что сеть авиалиний надо трансформировать так, чтобы для большинства из них выполнялось условие по частоте рейсов, замена не очень отражалась на интересах пассажиров и была бы наиболее эффективна.

Выделяются из общей сети «дефектные» авиалинии. Очевидно, в силу большой размерности задачи одновременно заменить все «дефектные» авиалинии не удастся, поэтому задачу перераспределения необходимо решать последовательно. После каждой замены следует вносить изменения в сеть авиалиний. Одна из

основных проблем — выбор очередности перераспределения «дефектных» авиалиний. Данный вопрос является предметом дальнейших исследований авторов. Предположим, что авиалиния между центрами 1 и 2 не удовлетворяет условию по частоте рейсов. На маршруте M_{12} длиной L_0 существует поток Π_0 . Известно три варианта перераспределения. На рис. 2, а маршрут M_{12} заменяется маршрутом M_{132} — эту замену назовем «внутренней». На рис. 2, б маршрут M_{32} заменяется маршрутом M_{312} , на рис. 2, в маршрут M_{13} — маршрутом M_{123} . Такие замены назовем «внешними».

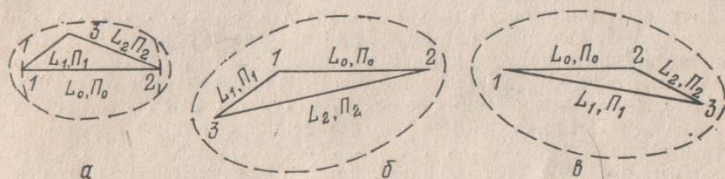


Рис. 2

Возникает видоизмененная задача о «бродячем торговце». Однако перебор по всем городам для выбора центра 3 нецелесообразен и его необходимо ограничить. Для этого строятся зоны, внутри которых будут находиться объекты перебора. Если какая-либо авиалиния исключается из сети, новая авиалиния не должна быть длиннее старой больше чем в α раз. Это является критерием для построения зон выбора городов. Зону для «внутренней» замены назовем «внутренней зоной», для «внешней» замены — «внешней». Условия построения «внутренней» зоны $L_1 + L_2 \leq \alpha L_0 L_1 \leq L_0 L_2 \leq L_0$.

Условия построения «внешних» зон $L_1 + L_0 \leq \alpha L_2 L_1 \leq L_2$ или $L_0 + L_2 \leq \alpha L_1 L_2 \leq L_1$.

Для городов, попавших в одну из трех зон, составляем замену. В случае а поток Π_0 переносится на маршрут M_{132} , образовав новые потоки $\Pi_1 + \Pi_0$ и $\Pi_2 + \Pi_0$. В случае б поток Π_2 переносится на потоки Π_0 и Π_1 . После этого определяем типы самолетов на новых маршрутах, исходя из образовавшихся пассажирспотоков. Если на двух участках маршрута типы самолетов совпадают, этот маршрут будет посадочным, если же не совпадают, два участка маршрута будут автономными авиалиниями. Затем определяются эксплуатационные расходы на всех возможных новых маршрутах с учетом выбранных типов самолетов. Среди всех замен выбираем выгодную экономически и проверяем, выполняется ли для нее условие, касающееся частоты рейсов. Если не выполняется, ее отбрасывают и выбирают новый маршрут из оставшихся. Описанный метод позволит удалить из поля заявок «дефектные» авиалинии, что уменьшает затраты на перспективный парк самолетов ГА.

Поступила 29 октября 1978 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Голоскоков Е. Г., Козьмин Ю. С. Применение вариационного метода для исследования динамической устойчивости трехслойных оболочек	3
Пономарев А. С. Условия отсутствия вековых членов в общем решении многомерной системы	6
Петров Е. П. Исследование колебаний пакетов турбинных лопаток с технологическими нарушениями и их однородности	9
Карабан В. Н., Червинский С. И. Анализ методов отстройки линейных цепных вибрационных систем	13
Павлов А. И. Динамика передачи с заданной функцией передаточного отношения	17
Никульченко А. Г., Шипулина Л. В. Конечно-шаговый метод идентификации равновесного положения САР	18
Герасимов С. Д., Киреев Н. Г. Дискретный дифференцирующий фильтр нижних частот	22
Дудко В. Ф., Белицкий А. Б. Постановка задачи оптимального по быстродействию гашения качаний ротора синхронного двигателя в системе прокатный стан — двигатель	26
Пикур Э. А., Северин В. П., Груздынь В. В., Трофимченко Г. Ю. Численные методы в оптимизации параметров систем автоматического регулирования	29
Северин В. П., Петрова И. Н. Вычисление коэффициентов интегральной оценки качества	32
Кашеев Л. Б. Метод управления телевизионным изображением путем трансформации раstra	34
Кононенко И. В., Горохов В. В. Алгоритм прогнозирования параметров спектральной плотности сигналов сложных систем	37
Дабагян А. В., Шевченко С. В. Сравнительная оценка методов иерархической оптимизации	42
Заруба В. Я. Процесс распределения ограниченного ресурса в частично согласованной активной системе центр—элементы при неинформированности элементов об имеющемся объеме ресурсов	45
Костенко Ю. Т., Безменов Н. И. Об одном подходе к декомпозиции сложной системы на слабо связанные между собой подсистемы	49
Дабагян А. В., Макаренко А. В. Оптимальная дихотомия поля заявок и ее алгоритм	55
Голоскоков А. Е., Гиттик Ю. Л. Параметрическая декомпозиция и координация в иерархических системах	58
Гиттик Ю. Л., Голоскоков А. Е. О связи между принципом прогнозирования и параметрической декомпозицией	62
Маргания Ю. В. Решение одной задачи выбора оптимального варианта КТС АСУП методом «ветвей и границ»	65
Ярох А. И., Баженов В. Г. Логическая структура базы данных АСУ	67
Нечипуренко В. И. Оптимальное управление процессом снабжения. Агрегирование структуры	69
Костенко Ю. Т., Цыганков А. Н. Об одном подходе к управлению сложными системами	71
Котин В. М., Годлевский М. Д., Шурапей А. М. Постановка задачи маршрутизации в общей схеме формирования перспективного парка самолетов ГА	73