

# ВЕСТНИК



ХАРЬКОВСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

№ 148

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА  
И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

Выпуск 1

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК  
ХАРЬКОВСКОГО  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА  
№ 148

---

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА  
И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

ВЫПУСК 1

Основан в 1977 г.

ХАРЬКОВ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
И ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ  
«ВИЩА ШКОЛА»  
1979

УДК 621. 01+62—50

**Прикладная механика и процессы управления, вып. 1.**  
Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148. Харьков, изда-  
тельское объединение «Вища школа», 1979, 76+5 с.

Вестник посвящен исследованиям в области прикладной механики и процессов управления сложными объектами. Особое внимание уделено вопросам анализа и проектирования сложных технико-экономических систем, а также организации банков данных.

Для научных работников и специалистов.  
Списки лит. в конце статей.

*Редакционная коллегия:* Е. Г. Голоскоков (отв. ред.), Ю. Г. Костенко (отв. секр.), Н. И. Безменов, А. В. Дабаган, В. Н. Карабан, Ю. А. Фролов

Печатается по решению Ученого совета инженерно-физического факультета от 2 декабря 1977 г.

*Адрес редакционной коллегии:*

310002, Харьков-2, ул. Фрунзе, 21, политехнический институт, инженерно-физический факультет, тел. 40-04-75

Редакция научно-технической литературы

## ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

№ 148

**Прикладная механика и процессы управления**

**Выпуск 1**

Редактор *Н. И. Юркевич*, обложка художника *Л. Н. Шарыпова*, художественный редактор *А. С. Романова*, технический редактор *Л. Т. Момот*, корректор *М. Ф. Христенко*

Информ. бланк № 4085

Сдано в набор 28.04.78. Подп. и печать 12.12.78. БЦ 09337. Формат 60x90/16. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выо. печать. 5 сл. печ. л. 6,1 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Изд. № 615. Зак. № 166. Цена 86 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа» 310003, Харьков 3, ул. Университетская, 16

Харьковская книжная фабрика «Коммунист» республиканского производственного объединения «Полиграфкина» Госкомиздата УССР 310012, Харьков-12, Энгельса, 11

В  $\frac{30106-615}{M226 (04)-79}$

© Харьковский политехнический институт, 1979

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, д-р техн. наук,  
В. В. ДМИТРЕНКО, канд. техн. наук

### К ВОПРОСУ ОБ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ФЛАТТЕРЕ

Анализ работ, посвященных исследованию поведения трехслойного тонкостенного элемента обшивки летательного аппарата при движении последнего со скоростями выше «критической» скорости флаттера, показывает, что основное внимание уделяется вопросам определения «критических» скоростей при различных значениях жесткостных, инерционных и диссипативных характеристик пакета. Наличие геометрической и физической нелинейностей лимитирует величину амплитуд предельного цикла колебаний однородной пластинки при флаттере, вследствие чего разрушение панели обшивки не носит внезапного характера [1]. Нами исследуется задача определения усталостной долговечности трехслойной пластинки при обтекании ее потоком с постоянной скоростью  $U$ , превышающей «критическую» скорость флаттера.

С использованием критерия прочности максимальных нормальных напряжений для свободно опертой по кромкам пластинки в работе [2] получены выражения для напряжений  $\sigma_x^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) в слоях пакета в виде суммы постоянных сжимающих напряжений и напряжений от изгиба и сдвига в заполнителе:  $\sigma_x^k = \bar{\sigma}_x^k + \sigma_x^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Выражения для амплитудных значений напряжений имеют вид

$$\bar{\sigma}_0^k = \frac{E\pi^2 h^2 \gamma_k}{8a^2 t_k} \left[ \sum_{n=1}^3 n^2 (\alpha_n^2 - \beta_n^2) A_0^2 - \frac{8P}{\pi^2 E h} a \right]; \quad (1)$$

$$\sigma_x^k = \frac{EhA_0}{16(1-\nu^2)} \frac{\gamma_k}{t_k} \left[ s_0 A_0 \sum_{n=1}^3 s_n \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{8h_3 \pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^3 q_n^k \sin \frac{n\pi x}{a} \right]. \quad (2)$$

Здесь  $k = 1, 2, 3$  — номер слоя пакета (индекс три относится к заполнителю);  $E$  и  $\nu$  — приведенные модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $a$  — размер пластинки в направлении потока;  $P$  — распределенное сжимающее усилие на кромках панели,  $x = 0, a$  — толщина пакета,  $\gamma_k, t_k$  — безразмерные жесткостные и геометрические параметры

Уровень максимальных стационарных амплитуд

$$A_0^2 = 2b_0 \bar{M} / Kd_0, \quad (3)$$

где  $\bar{M}$  — величина, равная превышению числа Маха набегающего потока над его «критическим» значением  $M_*$  в процентном отношении. Выражения для постоянных, входящих в (2), (3), приведены в работе [2].

Для вычисления усталостной долговечности используется теория двух стадий накопления усталостных повреждений [3]. Следует отметить, что реальный процесс нагружения агрегатов самолета в общем случае складывается из переменных нагрузок, носящих случайный характер. Экспериментально полученные гистограммы распределения скоростей самолетов показывают, что в большинстве полетных заданий отклонения скоростей от крейсерской занимают малую часть общего времени полета [4]. В этом случае закон распределения скоростей достаточно близок к симметричному и не очень отличается от нормального. При нормальном законе распределения напряжений в слоях  $\sigma(t)$  величина усталостной долговечности

$$T = 2\pi N_2 \bar{\sigma} x_0^{m_2} (Y_{m_1 m_2}^{-1} + Z_{m_2}^{-1}) \left/ \left[ \int_0^{\infty} \omega^2 \Phi(\omega) d\omega \right]^{1/2} \right. \quad (4)$$

где

$$Y_{m_1 m_2} = \int_{x_0}^{\infty} x^{m_2+1} e^{-x^2/2} \left/ \left[ \frac{N_1}{N_2} \left( \frac{x}{x_0} \right)^{m_2-m_1} - 1 \right] dx \right.;$$

$$Z_{m_2} = \int_{x_0}^{\infty} x^{m_2+1} e^{-x^2/2} dx; \quad x = \sigma/\bar{\sigma}; \quad x_0 = \sigma_{-1}/\bar{\sigma};$$

$m_1, m_2, N_1, N_2$  — константы материала;  $\bar{\sigma}$  — средний квадрат гауссовского процесса  $\sigma(t)$ ;  $\Phi(\omega)$  — его спектральная плотность;  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости материала;  $\omega$  — частота процесса.

Так как частота колебаний при флаттере детерминирована  $\omega = \omega_* = \text{const}$ , формула (4) примет вид  $T = 2\pi N_2 x_0^{m_2} \omega_*^{-1} \times (Y_{m_1 m_2}^{-1} + Z_{m_2}^{-1})$ . Интеграл (6) можно выразить через полную гамма-функцию  $\Gamma(n)$  и через функцию  $\chi^2$  — распределения Пирсона  $P(\chi^2, n)$ :  $Z_{m_2} = 2^{m_2/2} \Gamma(m_2/2 + 1) P(\chi^2, m_2 + 2)$ . Интеграл (5) берется численно.

Поскольку пенопластовый наполнитель является слабым звеном трехслойного пакета при испытаниях на выносливость, уровень напряжений и долговечности рассчитываем при относительной толщине наполнителя, равной 0,85. Результаты вычисления напряжений по формулам (1), (2) приведены на рис. 1. Рассмотрены два варианта строения пакета. Первый: верхний несущий слой из стали, нижний — из сплава Д16А-Т. Второй: оба несущих слоя из сплава Д16А-Т. В качестве наполнителя выбран пенопласт ФК-20. Сплошные линии соответствуют первому варианту, пунктир — второму. Пластинка симметричного по толщине строения сжата усилиями в срединной поверхности

$P_x = 2500 \text{ нм}^{-1}$ . Толщина пакета  $h = 10^{-2} \text{ м}$ , размеры в плане  $1 \times 1 \text{ м}$ .

На рис. 2 представлены результаты вычисления долговечности в зависимости от отношения предела выносливости к среднеквадратическому напряжению в цикле. При расчете долговечности учтены напряжения, полученные в заполнителе. По оси ординат в логарифмической шкале отложена долговечность в единицах безразмерного времени.

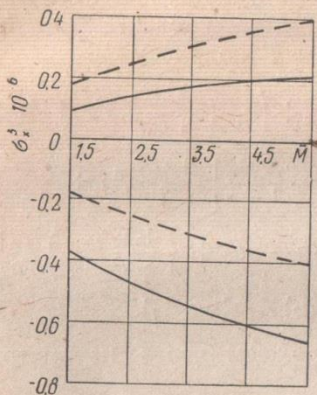


Рис. 1.

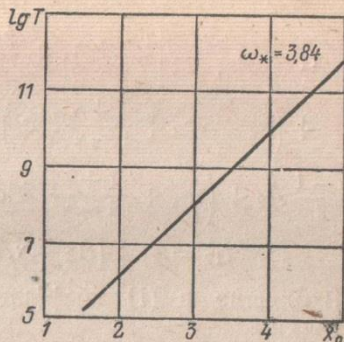


Рис. 2.

Итак, для закритической области флаттера характерны колебания со сравнительно невысоким уровнем напряжений даже в случае существенного превышения «критической» скорости. Величина усталостной долговечности трехслойной пластинки делает возможным кратковременное пребывание конструкции в зоне флаттера.

Список литературы: 1. Болотин В. В. Неконсервированные задачи упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961. 339 с. 2. Дмитренко В. В. Исследования нестационарного флаттера и колебаний трехслойных пластин. Дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Харьков, 1975. 203 с. 3. Болотин В. В. Об оценке долговечности при стационарных нагрузках. — «Изв. вузов. Машиностроение», 1959, № 7, с. 64—72. 4. Тейлор Д. Нагрузки, действующие на самолет. М., «Машиностроение», 1970. 329 с.

УДК 539.4

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. техн. наук,  
В. И. ЛАВИНСКИЙ

### ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛОКАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК НА ЛИНИЯХ ГЛАВНЫХ КРИВИЗН

В работе [1] приведен анализ исследований напряженного состояния оболочек в зоне действия сосредоточенных внешних нагрузок. Для пологих оболочек, где локальное напряженное

состояние определяется частным решением уравнений равновесия, изучен вид главных особенностей фундаментальных решений. Построение же самих решений в случае сосредоточенного касательного источника приводит к весьма громоздким результатам [2]. Нами эти решения на линиях главных кривизн удалось представить в более простой форме (одинарные ряды), что дает возможность построить асимптотические формулы любого приближения.

Из выражений работы [2] для основных компонентов напряженного состояния (тангенциальных  $t_1$ ,  $t_2$  и сдвигающих  $t_{12}$  усилий) при действии касательной силы  $T$  получаем

$$\begin{aligned}
 t_1 = & -\frac{2T}{1-\nu} \left[ \frac{1-\nu}{2} A_1 + \frac{2-\nu-\nu^2}{2} A_2 + \left( a_1 + \frac{\lambda+\nu}{1-\nu^2} b^4 a_5 \right) A_5 + \right. \\
 & \left. + \left( a_2 - \nu a_3 + \frac{\lambda+\nu}{1-\nu^2} b^4 a_5 \right) A_6 \right]; \quad t_2 = -\frac{2T}{1-\nu} \left[ \nu \frac{1-\nu}{2} A_1 + \right. \\
 & \left. + \frac{\nu-1}{2} A_2 + \left( \nu a_1 + \frac{1+\lambda\nu}{1-\nu^2} b^4 a_5 \right) A_5 + \left( \nu a_2 - a_3 + \frac{1+\lambda\nu}{1-\nu^2} b^4 a_4 \right) A_6 \right]; \\
 t_{12} = & -T [A_3 - \nu A_4 + (a_1 - a_3) A_8 + a_2 A_7]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Входящие в (1) коэффициенты выражаем через параметры оболочки:

$$\begin{aligned}
 a_1 = & 6(1-\nu)(1+2\lambda\nu+\lambda^2)h^{-2}R_2^{-2}; \quad a_2 = 12\lambda^2(1-\nu^2)h^{-2}R_2^{-2}; \\
 a_3 = & 6[(1+\nu)(1+2\lambda\nu+\lambda^2) - 2(\lambda+\nu)(1+\lambda\nu)]h^{-2}R_2^{-2}; \quad (2) \\
 a_4 = & \frac{1}{2}(1+\nu)(1+\lambda\nu) - \lambda - \nu; \quad a_5 = -\frac{1}{2}(1-\nu)(\lambda+\nu); \\
 b^4 = & \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R_2^2}; \quad \lambda = R_2 R_1^{-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $R_1$ ,  $R_2$  — радиусы кривизны оболочки толщиной  $h$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона ее материала;  $A_j$  ( $j = \overline{1, 8}$ ) — двумерные интегралы Фурье, которые с помощью символа Кронекера  $\delta_{jn}$  записываем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_j = & \frac{i}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} [(\xi^2 + \eta^2)^4 + b^4(\xi^2 + \lambda\eta^2)^2]^{-1} [(\xi^3\delta_{1j} + \xi\eta^2\delta_{2j} + \\
 & + \eta^3\delta_{3j} + \xi^2\eta\delta_{4j})(\xi^2 + \eta^2)^2 + \xi^3\delta_{5j} + \xi\eta^2\delta_{6j} + \eta^3\delta_{7j} + \\
 & + \xi^2\eta\delta_{8j}] \exp[-i(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где  $x$ ,  $y$  — координаты прямоугольной системы, ориентированной вдоль линий главной кривизны (их начало совпадает с точкой приложения нагрузки, ось  $ox$  направлена по линии действия силы  $T$ ).

Для оболочек нулевой и положительной кривизн ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) анализ несобственных интегралов (3) на линиях главной кри-

визны не представляет затруднений. Приводим его результаты:

$$A_j(x\delta_{1256j}, y\delta_{3478j}) = \frac{\delta_{1234j}}{4\pi(x\delta_{12j} + y\delta_{34j})} + \frac{(b^{-2}\delta_{5678j} - b_{1234j}^2)}{8\pi(1 + \delta_{2468j})} \times$$

$$\times (x\delta_{1256j} + y\delta_{3478j}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{bx}{2}\delta_{1256j} + \frac{by}{2}\delta_{3478j}\right)^{2m} \Gamma\left(m + \frac{3}{2} + \delta_{1357j}\right)}{\Gamma(m+1)\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)\Gamma(m+3)} \times$$

$$\times Q_{jm} \left\{ \left[ 2 \ln\left(\frac{bx}{2}\delta_{1256j} + \frac{by}{2}\delta_{3478j}\right) + \Psi\left(m + \frac{3}{2} + \delta_{1357j}\right) - \right. \right.$$

$$\left. - \Psi\left(m + \frac{3}{2}\right) - \Psi(m+3) - \Psi(m+1) + S_{jm} \right] \sin \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2} \Big\};$$

$$Q_{jm} = {}_2F_1\left(-m + \delta_{5678j} - \delta_{1234j}, \frac{1}{2} + \delta_{234678j} + \delta_{37j} + m\delta_{3478j}\right); \quad (4)$$

$$(m+3; \varepsilon^2); S_{jm} = Q_{jm}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Gamma(m + 2\delta_{1234j}) \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + \delta_{2468j} + \right.$$

$$\left. + 2\delta_{37j} + m\delta_{3478j}\right) \Gamma(m+3) \varepsilon^{2n} [\Gamma(m + 2\delta_{1234j} - n) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + \delta_{2468j} + 2\delta_{37j} + m\delta_{3478j}\right) \Gamma(m+n+3) \Gamma(n+1)]^{-1} \left\{ \Psi(m+3) - \right.$$

$$\left. - \Psi(m+n+3) + \Psi(m + 2\delta_{1234j}) - \Psi(m + 2\delta_{1234j} - n) + \right.$$

$$\left. + \delta_{3478j} \left[ \Psi\left(m+n + \frac{3}{2} + \delta_{37j}\right) - \Psi\left(m + \frac{3}{2} + \delta_{37j}\right) \right] \right\}.$$

В выражениях (4)  $\varepsilon^2 = 1 - \lambda$ ,  $\delta_{mn\dots kj} = \delta_{mj} + \delta_{nj} + \dots + \delta_{kj}$ ,  ${}_2F_1$ ,  $\Gamma$ ,  $\Psi$  — гипергеометрическая, гамма- и пси-функции. Решения упрощаются для сферической оболочки, когда  $\varepsilon^2 = 0$ ,  $Q_{jm} = 1$ ,  $S_{jm} = 0$ . При вычислении  $Q_{jm}$  для оболочек других форм следует иметь в виду, что ряд  $Q_{70}(\varepsilon)$  расходится при  $\varepsilon = 1$ . Однако это не сообщает усилию  $t_{12}$  в цилиндрической оболочке бесконечного значения, поскольку  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} a_2 A_7 = 0$ .

В окрестности точки приложения силы, когда  $x, y \rightarrow 0$ , решения (4) имеют следующие асимптотические значения:

$$A_j(x\delta_{12j}, y\delta_{34j}) \approx \frac{1}{4\pi(x\delta_{12j} + y\delta_{34j})} - \frac{(x\delta_{12j} + y\delta_{34j})b^2}{32(1 + \delta_{24j})} \left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\delta_{13j}\right) \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \delta_{234j} + \delta_{3j}\right)\varepsilon^2\right] \text{ при } j = \overline{1, 4}; \quad (5)$$

$$A_j(x\delta_{56j}, y\delta_{78j}) \approx \frac{x\delta_{56j} + y\delta_{78j}}{32b^2(1 + \delta_{68j})} \left(1 + \frac{1}{2}\delta_{57j}\right) Q_{j0}(\varepsilon).$$



при  $j = \overline{5, 8}$ . Входящая в (5) гипергеометрическая функция выражается через элементарные:

$$Q_{j0}(\varepsilon) = \frac{2}{1 + \sqrt{\lambda}} \left[ \frac{2}{1 + \sqrt{\lambda}} \delta_{68j} + \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) \delta_{5j} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{\beta}{3}\right) \delta_{7j} \right],$$

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}}.$$

Пользуясь формулами (1), (2), (5), несложно подсчитать величину усилий. В окрестности действия сосредоточенной касательной нагрузки формулы отражают известные особенности локального напряженного состояния пологих оболочек [1].

Случай нагружения вдоль оси  $ou$  также сводится к использованию рассмотренных интегралов.

Список литературы: 1. Жигалко Ю. П. Статика оболочек при силовых локальных воздействиях.— В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. 11. Казань, 1975, с. 74—79. 2. Велчко П. М., Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние оболочек положительной кривизны под действием сосредоточенных касательных сил.— «Прикладная механика», 1969, т. 5, вып. 12, с. 53—60.

УДК 534.26

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, д-р техн. наук,  
С. Н. БЕШЕНКОВ, канд. техн. наук

### ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПЛАСТИНОЙ ПРИ ВОЗВРАТНО-ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ВОЗБУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ

Излучение звука пластиной, возбуждаемой неподвижной сосредоточенной силой, изучено достаточно [1]. Однако часто встречающиеся на практике случаи циклического движения нагрузок [2] не исследовались. В работе рассматривается излучение звука неограниченной пластиной при движении по ее поверхности нормальной гармонической нагрузки. Предполагается, что эта нагрузка равномерно распределена на прямой, параллельной, например, оси  $ou$ , а сама линия приложения нагрузки движется вдоль оси  $ox$  по гармоническому закону. В таком случае уравнения совместного движения пластины и акустических сред могут быть записаны в виде

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho_{01} \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right|_{z=0} - \rho_{02} \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right|_{z=h} + F \exp i\Omega t \delta(x - a \cos \omega t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{0j}^2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} = 0 \quad (j = 1, 2).$$

При этом должны выполняться граничные условия

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=h} \quad (2)$$

и условия излучения на бесконечности.

Здесь  $\omega$  — прогиб пластины;  $\Phi_j$  — потенциальные функции дополнительных скоростей, вызванных возмущенным движением жидкости в верхнем ( $j=1$ ) и нижнем ( $j=2$ ) полупространствах;  $\rho_{0j}$ ,  $c_{0j}$  — плотности жидкостей и скорости звука в них;  $D$ ,  $m$  — изгибная жесткость и погонная масса пластины толщиной  $h$ ;  $F$ ,  $\Omega$  — амплитуда и частота возбуждающей силы;  $a$ ,  $\omega$  — амплитуда и частота ее движения.

Применяя к системе (1) и граничным условиям (2) интегральное преобразование Фурье, в пространстве изображений получаем

$$\begin{aligned} D\alpha^4 \bar{\omega} + m \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial t^2} &= \rho_{01} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial t} \Big|_{z=0} - \rho_{02} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial t} \Big|_{z=h} + \\ &+ F \exp i(\Omega t + \alpha a \cos \omega t); \\ \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_j}{\partial z^2} - \alpha^2 \bar{\Phi}_j - c_{0j}^{-2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_j}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial z} \Big|_{z=0}; \quad \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} &= -\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial z} \Big|_{z=h}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\Phi}_j$  — трансформанты Фурье функций  $\omega$ ,  $\Phi_j$ ;  $\alpha$  — параметр преобразования.

Используя разложение [3]

$$F \exp i(\Omega t + \alpha a \cos \omega t) = F \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha a) \exp i\omega_n t \quad (4)$$

и учитывая линейность рассматриваемой задачи, решение уравнений (3) ищем в виде

$$\bar{\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp i\omega_n t; \quad \bar{\Phi}_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{jn}(z) \exp i\omega_n t. \quad (5)$$

В формулах (4), (5)  $\omega_n = n\omega + \Omega$ ;  $J_n$  — функция Бесселя первого рода порядка  $n$ . Определяем функции  $f_{jn}(z)$ :

$$\frac{d^2 f_{jn}}{dz^2} + k_{jn}^2 f_{jn} = 0; \quad f_{jn} = A_{jn} \exp(\pm ik_{jn}z). \quad (6)$$

Здесь  $k_{jn}^2 = \omega_n^2 c_{0j}^{-2} - \alpha^2$ ;  $A_{jn}$  — постоянные интегрирования. Верхний знак относится к индексу  $j=1$ .

Подставляя выражения (5), (6) в соотношения (3), приходим к системе алгебраических уравнений для определения постоянных  $c_n$ ,  $A_{jn}$ . Решение этой системы и последующее использование формул обращения Фурье приводят к интегральным

выражениям для звуковых давлений. Рассматривая в целях сокращения записи звуковое поле только в нижнем полупространстве, имеем

$$p_2 = \frac{F}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{2n} i^n J_n(ax) \exp i\omega_n t}{g_{2n} [\gamma_{2n} - im(\alpha^4 |k_{un}^4 - 1) + \gamma_{1n}]} \times \exp i(-k_{2n}z - \alpha x) da, \quad (7)$$

где  $\gamma_{jn} = \rho_0/k_{jn}^{-1}$ ;  $k_{un}^{-4} = D(m\omega_n)^{-1}$ ;  $g_{2n} = \exp(-ik_{2n}h)$ .

Переходя к координатам  $R$ ,  $\theta$  ( $x = R \sin \theta$ ;  $z = R \cos \theta$ ) и вычисляя интеграл в формуле (7) по методу перевала [4], получаем для давления в точках пространства, лежащих на большом волновом расстоянии от пластины, выражение

$$p_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F i^n \exp i(\omega_n t - k_{0n}^{(2)} R + \pi/4)}{g_n^{(2)} \sqrt{2\pi R k_{0n}^{(2)}}} Z_0^{(2)} \cos \theta \times \times J_n(ak_{0n}^{(2)} \sin \theta) [Z_0^{(2)} + Z_n + Z_0^{(1)}]^{-1}, \quad (8)$$

в котором

$$k_{0n}^{(2)} = \omega_n c_{02}^{-1}; \quad g_n^{(2)} = \exp(ik_{0n}^{(2)} h \cos \theta); \quad c_{un}^4 = \omega_n^2 D m^{-1}; \\ Z_0^{(2)} = \rho_{02} c_{02} |\cos \theta|; \quad Z_0^{(1)} = \rho_{01} c_{01} [1 - (c_{01} \sin \theta |c_{02}|)^2]^{-1/2}; \\ Z_n = i\omega_n m (1 - c_{un}^4 \sin^4 \theta c_{02}^{-4}). \quad (9)$$

Из полученной формулы (8) следует, что при возвратно-поступательном движении гармонической силы по поверхности пластины в среду излучаются звуковые волны не только с частотой  $\Omega$ , но и с частотами  $|n\omega + \Omega|$  (при отрицательных  $\omega_n$  приходим ко второй из двух возможных комплексных форм записи давления). При использовании выражения для давления от неподвижной силы ( $a=0$ ) модуль каждой гармоники ряда (8) удобно представить в виде  $|p_{2n}| = |p(F, \omega_n)| |J_n(ak_{0n}^{(2)} \sin \theta)|$ , где  $p(F, \omega_n)$  — давление от неподвижной силы  $F\delta(x) \exp i\omega_n t$ . По формулам (8); (9) можно вычислить давления от движущейся статической силы, а также от силы, содержащей статическую и гармоническую составляющие.

Список литературы: 1. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1970. 557 с. 2. Якушев Н. З. Динамика строительных систем под воздействием движущихся нагрузок. Ч. 2. Полупространства, пластинки и оболочки под действием подвижных нагрузок.— В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1972, с. 118—156. 3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963. 1100 с. 4. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972. 347 с.

## РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ РАСЧЕТ

Широкий класс машин, механизмов и конструкций, содержащих различные предохранительные устройства, фрикционные соединения, зазоры, представляет собой системы переменной структуры. При их работе наблюдаем ряд чередующихся, четко отличающихся друг от друга этапов, на каждом из которых система имеет различную структуру, т. е. упругие и инерционные параметры системы и характер связей существенно меняются при переходе от одного этапа к другому. Так, в работе [1] показано, что в механических передачах с фрикционными ограничительными муфтами динамика процесса описывается «бушующими» дифференциальными уравнениями, имеющими следующий вид в случае, когда полумуфты соединены:

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_1) + \beta_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\alpha}) = M_2; \quad (1)$$

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - c_2 (\varphi_2 - \varphi_1) + \beta_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\alpha}) - f (\varphi_0 - \varphi_1) = -M_1$$

и когда имеет место их относительное скольжение

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_1') + \beta_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\alpha}) = M_2;$$

$$J_1 \ddot{\varphi}_1' + c_2 (\varphi_1' - \varphi_2) + \beta_1 (\dot{\varphi}_1' - \dot{\alpha}) = M (\dot{\varphi}_1' - \dot{\varphi}_1'') - M_1; \quad (2)$$

$$J_1 \ddot{\varphi}_1' - f (\varphi_0 - \varphi_1') = -M (\dot{\varphi}_1' - \dot{\varphi}_1'').$$

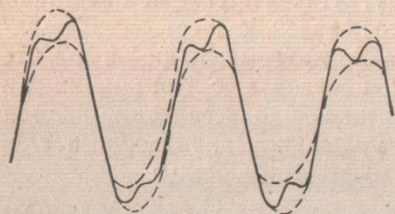
При расчетах на ЭВМ задаются условия перехода от системы (1) к (2) и обратно, при их интегрировании постоянно проверяется выполнение этих условий.

Аналогичные явления имеют место в системах с зазорами, динамика которых различна при выбранных зазорах и их наличии. В работе [2] показано, что движение автомобиля вследствие динамической неоднозначности сил трения время от времени сопровождается блокировкой кинематических фрикционных связей в одной или нескольких рессорных подвесках. Это вызывает переменность структуры системы. Число ее степеней свободы уменьшается на число заблокированных связей; она приобретает совершенно новые собственные частоты. Динамика такой системы описывается «бушующими» уравнениями, аналогичными (1), (2), но число этапов и условия переходов от одного этапа к другому здесь усложняются.

Рассмотрим основные положения природы описанных явлений. При отсутствии колебаний в системах наблюдаем простое чередование этапов. Длительности их неопределенны вследствие статистической природы трения. При возникновении колебаний происходит периодическое изменение скорости отдельных элементов системы, ведущее к периодическому изменению сил тре-

ния скольжения и, следовательно, к упорядочению чередования отдельных этапов. Поскольку автоколебания в механических системах происходят с собственными частотами систем, то эти же частоты определяют изменение скорости и силы трения. Следовательно, смена одного этапа другим определяется собственными частотами, которыми система обладает на данном этапе.

Отсюда вытекают следующие выводы. Длительности отдельных этапов движения системы соизмеримы с ее собственными частотами. Это обстоятельство подтверждается результатами экспериментальных исследований [1—3].



Результатирующий закон движения представляет собой чередование колебаний с различными частотами и различного по частотности характера. Спектр его на каждом этапе определяется структурой системы, соответствующей данному этапу. Такие колебания, значительно отличающиеся от гар-

монических и полигармонических, принято называть релаксационными. На рисунке приведен пример осциллограммы записи фрикционных автоколебаний в системе с двумя степенями свободы. Она подтверждает наличие отчетливо выраженных участков двухчастотных колебаний (блокировки связей отсутствуют и система обладает двумя собственными частотами порядка 16 и 45 Гц) и одночастотных колебаний (когда вследствие блокировки связи она вырождается в систему с одной степенью свободы с собственной частотой порядка 23 Гц). Следовательно, основная причина и источник возбуждения релаксационных колебаний — переменность структуры системы.

Вследствие значительного разнообразия характера отдельных этапов движения систем при релаксационных колебаниях алгоритмы и программы численного интегрирования их дифференциальных уравнений весьма сложны и громоздки, требуют проведения процедур для каждого этапа, проверки условий перехода и выбора начальных условий, определяемых решениями в конечный момент предыдущего этапа. В то же время в духе идей современных алгоритмических языков [4] процедура, как любой другой вид, может иметь конечное множество значений. Это позволяет для описания колебаний многомерных систем переменной структуры воспользоваться аппаратом матричных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2 X}{dt^2}(\lambda, t) = C(\lambda) X(\lambda, t) + F(\lambda, t, X, \dot{X}); \quad \lambda = f(X, \dot{X}), \quad (3)$$

где  $X = \{x_1(\lambda, t), \dots, x_n(\lambda, t)\}$  — вектор обобщенных координат, имеющий  $n_i$  степеней свободы, для которого на каждом

этапе  $\lambda = \lambda_i$ . Величина  $\lambda$  является значением процедуры. Пусть, например, при  $\lambda = \lambda_1$

$$C(\lambda_1) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad X(\lambda_1) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad F(\lambda_1) = \begin{vmatrix} F_1(t, X, \dot{X}) \\ F_2(t, X, \dot{X}) \end{vmatrix},$$

а при  $\lambda = \lambda_2$

$$C(\lambda_2) = \begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad X(\lambda_2) = \begin{vmatrix} x_1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad F(\lambda_2) = \begin{vmatrix} F_0(t, X, \dot{X}) \\ \ddots \\ \ddot{x}_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда система (3) при  $\lambda_1$  в случае отсутствия блокировок связей соответствует уравнениям типа (2), а при  $\lambda_2$  — уравнениям типа (1) при блокировке. Выработка значения  $\lambda$  производится внутри оператора процедуры, т. е. алгоритм значительно упрощается, появляется возможность стандартизировать программы расчета дискретных многомерных систем переменной структуры для достаточно большого числа измерений.

**Список литературы:** 1. Штейнвольф Л. И., Карабан В. Н. Качественные результаты исследования автоколебаний в механических передачах с фрикционными ограничительными муфтами. — В кн.: Теория механизмов и машин. Вып. 6. Харьков, 1969, с. 69—73. 2. Атоян А. М., Путятин В. В. О влиянии сил конструкционного демпфирования на случайные колебания многомерной механической системы. — В кн.: Конференция по проблемам конструкционного демпфирования колебаний. Тезисы докл. Рига, 1971, с. 3. 3. Пономарев А. С. Исследование фрикционных автоколебаний в многомассовых системах. Дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Харьков, 1972. 124 с. 4. Васильев В. А. Язык АЛГОЛ-68. М., «Наука», 1972. 146 с.

УДК 534.1

Д. К. ОВЧАРОВА, канд. техн. наук

### К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается применение метода малых возмущений [1] для исследования устойчивости периодического движения нелинейной системы, описываемой уравнениями

$$\ddot{x}_i + \sum_{k=1}^n f_{ik}(x_k, \dot{x}_k) = P_i \sin \omega t \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1)$$

Для определения критерия устойчивости вынужденных колебаний системы (1) предлагается использовать метод усреднения периодических коэффициентов уравнений в возмущениях.

Вынужденные колебания системы (1) описываются частным решением вида

$$x_{i0} = A_i \sin(\omega t + \psi_i) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Уравнения в вариациях, соответствующие этому решению, имеют вид

$$\ddot{u}_i + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f_{ik}(x_k, \dot{x}_k)}{\partial x_k} \right]_0 u_k + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f_{ik}(x_k, \dot{x}_k)}{\partial \dot{x}_k} \right]_0 \dot{u}_k = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad (3)$$

где  $u_i = x_i - x_{i0}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — малые возмущения решения (2). Скобка в нулем обозначает, что выражение в скобке берется при  $u_i = 0$ . Коэффициенты уравнений (3) являются периодическими функциями времени периода  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Оценивая влияние периодических коэффициентов на устойчивость стационарного невозмущенного движения, произведем операцию усреднения по времени коэффициентов уравнений (3) и получим

$$\ddot{u}_i + \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}(A_k) u_k + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}(A_k) \dot{u}_k = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Здесь

$$\lambda_{ik}(A_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[ \frac{\partial f_{ik}(x_k, \dot{x}_k)}{\partial x_k} \right]_0 dt;$$

$$\alpha_{ik}(A_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[ \frac{\partial f_{ik}(x_k, \dot{x}_k)}{\partial \dot{x}_k} \right]_0 dt.$$

Систему (4) с помощью линейного преобразования  $u_i = \sum_s a_{is} q_s$  приводим к квазинормальному виду [2]:

$$q_s + \lambda_s^2 q_s = - \sum_i \sum_k \sum_\sigma b_{si} \alpha_{ik}(A_k) a_{k\sigma} q_\sigma \quad (s = \overline{1, n}), \quad (5)$$

где  $\lambda_s$  ( $s = \overline{1, n}$ ) — собственные частоты системы (4), определяемые от частотного уравнения  $\Delta(\lambda) \equiv |\lambda_{ik}(A_k) - \delta_{ik} \lambda^2| = 0$ ;  $a_{ik}$  — фундаментальные функции, удовлетворяющие системе алгебраических уравнений  $\lambda^2 a_{ik} + \sum_s \lambda_{is}(A_s) a_{sk} = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ );  $b_{ik}$  — элементы матрицы, обратной модальной матрице  $\|a_{ik}\|$ ;  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера.

Устойчивость невозмущенного движения зависит от знака коэффициентов уравнений системы (5), стоящих при  $q_s$ . Поэтому условия устойчивости периодического движения системы (1) определяются в первом приближении неравенствами [3]

$$\sum_i \sum_k b_{si} \alpha_{ik}(A_k) a_{ks} > 0 \quad (s = \overline{1, n}). \quad (6)$$

При невыполнении одного из неравенств (6) возникают раскачивающиеся свободные колебания с частотой, близкой к соответствующей собственной частоте системы  $\lambda_s$ .

Рассмотрим применение данного метода для построения области устойчивости вынужденных колебаний уравнения Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = P \sin \omega t. \quad (7)$$

Уравнение в вариациях, определяющее устойчивость частотного решения  $x_0 = A \sin(\omega t + \psi)$ , имеет вид

$$\ddot{u} + \mu[A^2 \sin^2(\omega t + \psi) - 1]\dot{u} + u = 0. \quad (8)$$

Амплитуду вынужденных колебаний системы (7) можно определить из выражения

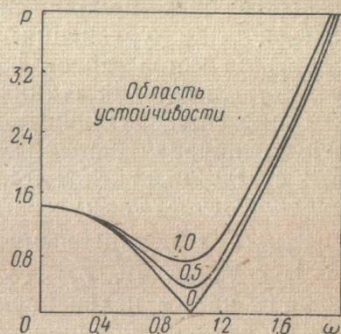
$$A^2 \left[ (1 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2 \left( \frac{A^2}{4} + 1 \right)^2 \right] = P^2,$$

которое несложно получить при помощи метода энергетического баланса [2]. При усреднении по времени периодического коэффициента, стоящего при  $\dot{u}$  в уравнении (8), устойчивость невозмущенного движения определяется неравенством  $\frac{A^2}{2} - 1 > 0$  или  $A > 1,42$ .

На рисунке показаны границы областей устойчивости вынужденных колебаний уравнения (7) на плоскости  $\omega P$  при параметре  $\mu = 0; 0,5$  и  $1$ . Электромоделирование уравнения (7) на АВМ МН-7 подтвердило результаты полученные аналитическим методом. Действительно, если амплитуда вынужденных колебаний системы  $A > 1,42$ , то при стационарных режимах наблюдаются моногармонические колебания с частотой возмущения  $\omega$ . При  $A < 1,42$  самовозбуждаются автоколебания с частотой, примерно равной  $1 \text{ с}^{-1}$ , и в системе устанавливаются почти периодические колебания.

Итак, сравнение результатов аналитического исследования и электромоделирования позволяет сделать вывод, что методом малого параметра можно пользоваться в случае построения границы области устойчивости практически при любом значении параметра  $\mu$ .

**Список литературы:** 1. Малкин И Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний М., Гостехиздат, 1956, 448 с. 2. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания деформируемых систем. Киев. «Наукова Думка», 1977, 336 с. 3. Говал А. Динамика роторов турбогенераторов. М., «Энергия», 1971, 387 с.





В. Н. КАРАБАН, канд. техн. наук,  
В. М. ШАТОХИН

### О ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА ДЛЯ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

В последнее время при расчетах периодических движений нелинейных систем широко используются различные методы последовательных приближений [1—3]. В случае интегрального представления уравнения периодического движения часто используется метод простой итерации [2]. Применение современной вычислительной техники в динамических расчетах потребовало внедрения различных итерационных методов, использующих идеи функционального анализа.

В статье изложен алгоритм метода Ньютона — Канторовича [3] для расчета вынужденных колебаний цепной дискретной системы с  $s$  нелинейными соединениями общего вида  $F_j(y_j, \dot{y}_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) ( $y_j, \dot{y}_j$  — соответственно угол закручивания и его скорость на  $j$ -м нелинейном участке).

Для величин  $\dot{y}_j$  запишем систему нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [2]:

$$y_j = \int_0^T \varphi_{j1}(t-\tau) f_1(y_1, \dot{y}_1) d\tau + \int_0^T \varphi_{j2}(t-\tau) f_2(y_2, \dot{y}_2) d\tau + \dots + \\ + \int_0^T \varphi_{js}(t-\tau) f_s(y_s, \dot{y}_s) d\tau + g_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (1)$$

( $T$  — период искомых колебаний);

$$f_j(y_j, \dot{y}_j) = c_j y_j + \beta_j \dot{y}_j - F(y_j, \dot{y}_j) \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

( $c_j$  — некоторая эквивалентная жесткость;  $\beta_j$  — некоторый эквивалентный коэффициент линейного демпфирования на  $j$ -м участке;  $\varphi_{j,k}$  ( $j, k = 1, 2, \dots, s$ ) — импульсно-частотная характеристика  $j$ -го участка от единичного момента на  $k$ -м участке);

$$g_j = \sum_{k=1}^n \int_0^T \psi_{jk}(t-\tau) M_k(\tau) d\tau,$$

( $\psi_{jk}$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ) ИЧХ  $j$ -го участка от единичного момента на  $k$ -й массе;  $n$  — число масс, к которым приложены возмущающие моменты  $M_k$ ).

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_s(t) \end{Bmatrix}; \quad \dot{y}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_s(t) \end{Bmatrix};$$

$$\Phi(p) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(p) & \varphi_{12}(p) & \dots & \varphi_{1s}(p) \\ \varphi_{21}(p) & \varphi_{22}(p) & \dots & \varphi_{2s}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{s1}(p) & \varphi_{s2}(p) & \dots & \varphi_{ss}(p) \end{vmatrix};$$

$$f(y, \dot{y}) = \begin{vmatrix} f_1(y_1, \dot{y}_1) \\ f_2(y_2, \dot{y}_2) \\ \vdots \\ f_s(y_s, \dot{y}_s) \end{vmatrix}; \quad g(t) = \begin{vmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_s(t) \end{vmatrix}$$

$$(p = t - \tau),$$

то систему уравнений (1) можно записать в виде

$$y(t) = \int_0^T \Phi(t - \tau) f(y, \dot{y}) d\tau + g(t).$$

Введем в рассмотрение интегральный оператор  $L$  согласно формуле

$$Ly = \int_0^T \Phi(t - \tau) f(y, \dot{y}) d\tau + g(t) - y(t),$$

производная по Фреше для вектор-функции  $h(\tau)$ , от которого может быть записана в виде [3]

$$L_y' h = \int_0^T \Phi(t - \tau) [f_y'(y, \dot{y}) h(\tau) + f_{\dot{y}}'(y, \dot{y}) \dot{h}(\tau)] d\tau - h(t). \quad (2)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$f_y'(y, \dot{y}) = \begin{vmatrix} f_{y_1}' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{y_2}' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_{y_s}' \end{vmatrix}; \quad f_{\dot{y}}'(y, \dot{y}) = \begin{vmatrix} f_{\dot{y}_1}' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{\dot{y}_2}' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_{\dot{y}_s}' \end{vmatrix};$$

$$h(t) = \begin{vmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_s(t) \end{vmatrix}.$$

Полученный результат следует из разложения каждой функции  $f_j(y_j, \dot{y}_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) в ряд Тейлора.

По методу Ньютона — Канторовича  $n + 1$ -е приближение по  $n$ -му приближению находим следующим образом [4]:  $y_{n+1} = y_n - [L'(y_n)]^{-1} (Ly_n)$ . В исследуемом нами случае  $t_n = [L'(y_n)]^{-1} \times \times (Ly_n)$  определяется из линейного интегрального уравнения

$$z_n - \int_0^T \Phi(t - \tau) [f_y'(y_n, \dot{y}_n) z_n(\tau) + f_{\dot{y}}'(y_n, \dot{y}_n) \dot{z}_n(\tau)] d\tau = -l_n, \quad (3)$$

где  $l_n = \int_0^T \Phi(t - \tau) f(y_n, \dot{y}_n) d\tau + g(t) - y_n(t)$ .

Вычислив интеграл от второго слагаемого выражения (3) по частям и воспользовавшись свойством периодичности функций  $y_n(t)$ ,  $\dot{y}_n(t)$  и  $z_n(t)$ , можно получить выражения

$$z_n - \int_0^T \{ \Phi(t-\tau) f'_y(y_n, \dot{y}_n) - [\Phi(t-\tau) f'_y(y_n, \dot{y}_n)]'_\tau \} \times z_n(\tau) d\tau = -l_n. \quad (4)$$

При решении линейного интегрального уравнения (4) необходимо дважды на каждой итерации осуществлять численное дифференцирование для получения  $\dot{y}_n$ ,  $[\Phi(t-\tau) f'_y(y_n, \dot{y}_n)]'_\tau$ . Этого можно избежать, если ввести новую переменную  $\bar{y} = \frac{dy}{dt}$ . Тогда получим систему 2s интегральных уравнений, которая в матричной форме запишется в виде

$$y(t) = \int_0^T \Phi(t-\tau) f(y, \bar{y}) d\tau + g(t);$$

$$\bar{y}(t) = \int_0^T \Phi_l(t-\tau) f(y, \bar{y}) d\tau + g'(t).$$

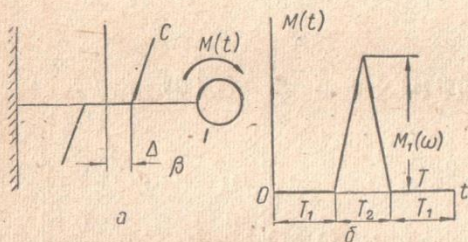


Рис. 1.

В качестве примера можно рассмотреть задачу исследования динамических процессов в приводе к кулачковому валу транспортного дизеля. Параметры механической модели (рис. 1, а) в безразмерных единицах имеют следующие значения: коэффициент жесткости линейного участка упругой характеристики  $c = 67,3$ ; момент инерции массы  $I = 0,56$ ; коэффициент эквивалентного линейного демпфирования  $\beta = 0,2$ ; зазор в одну сторону  $\Delta = 0,262$ . Закон изменения внешнего момента показан на рис. 1, б, где  $T_1 = 0,367T$ ;  $T_2 = 0,267T$ , а максимальное значение изменяется в зависимости от частоты по линейному закону  $M_1(\omega) = 0,0454\omega + 1,14$ .

Так как четыре первые гармоники в разложении возмущающего момента в ряд Фурье оказываются соизмеримыми, а асимптота скелетной кривой лежит правее рабочего диапазона по частоте, то в рабочем диапазоне возможно усиление колебаний на нескольких режимах. При этом в законе движения существенны не одна, а две и даже три гармоники разложения в ряд Фурье. Реализация метода Ньютона—Канторовича в алгол-

программе позволила с относительно небольшими затратами машинного времени получить периодические режимы с погрешностями в углах поворота массы до 1%. Это дало возможность достаточно точно оценить динамическую напряженность привода. Качественные результаты показаны на рис. 2, где приведены графики зависимости амплитуд трех гармоник ряда Фурье (рис. 2, а) и закон изменения угла поворота массы на одном из режимов  $\omega = 2,6$  (рис. 2, б).

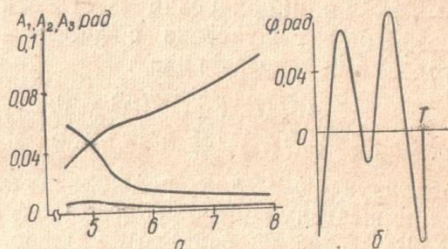


Рис. 2.

Список литературы: 1. Вейц В. Л. Динамика машинных агрегатов. Л., «Машиностроение», 1969. 368 с. 2. Розенwasser Е. Н. Колебания нелинейных систем. М., «Наука», 1969. 576 с. 3. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., «Мир», 1969. 447 с. 4. Канторович Л. В., Акимов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959. 684 с. 5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959. 470 с.

УДК 518:517

В. Б. ГРИНЕВ, канд. техн. наук,  
О. Л. ГАРЕВ

### О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

Круглые пластинки являются математическими моделями значительного числа конструктивных элементов машин (крышки, перегородки, днища, основания машин). Поэтому необходимо изучение задач оптимизации пластинок по различным критериям. Оптимизация пластин при действии статических нагрузок рассматривалась в работах [1, 2], по спектру собственных частот — в [3].

В статье исследуются качественные особенности задач оптимизации круглых пластинок в случае вынужденных колебаний, которые выявляются при изучении их на основе принципа максимума Понтрягина.

Рассматривается круглая пластинка внутреннего радиуса  $r_1 \geq 0$  и внешнего  $r_2$ , нагруженная осесимметричной изгибающей нагрузкой  $q(r) \sin pt$ . Форма установившихся вынужденных колебаний  $W(r)$ , а также амплитудные величины угла поворота  $\varphi(r)$ , изгибающего момента  $M_r$  и перерезывающей силы  $Q_r$  могут быть найдены путем решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dW}{dr} = \varphi; \quad \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{M}{Dr} + \frac{\nu}{r} \varphi; \quad \frac{dM}{dr} = Q - (1 - \nu)^2 \frac{D}{r} \varphi + \frac{\nu}{r} M;$$

$$\frac{dQ}{dr} = -r\rho p^2 h W - r q, \quad (1)$$

где  $h(r)$  — распределение толщины по радиусу;  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  — цилиндрическая жесткость;  $E, \nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона в линейными однородными граничными условиями общего вида

$$\begin{aligned} \alpha_1 Q(r_1) + \beta_1 W(r_1) &= 0; & \alpha_2 M(r_1) + \beta_2 \varphi(r_1) &= 0; \\ \alpha_3 Q(r_2) + \beta_3 W(r_2) &= 0; & \alpha_4 M(r_2) + \beta_4 \varphi(r_2) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

реализующими для различных значений коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i$  типичные случаи закрепления внутреннего и внешнего контуров.

Варьируемой считаем функцию  $h(r)$ :

$$h_1(r) \leq h(r) \leq h_2(r), \quad (3)$$

где  $h_1(r), h_2(r)$  — заданные функции, характеризующие конструктивные или технологические ограничения.

Рассмотрим следующую задачу оптимизации: в рамках ограничений (3) найти  $h(r)$ , минимизирующую интегральный функционал качества

$$I = \int_{r_1}^{r_2} f(h, W, \varphi, M, Q) dr. \quad (4)$$

Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума получаем в соответствии с общей процедурой, изложенной для подобных задач в работе [6]. Они определяются исходной краевой задачей (1), (2) и сопряженной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dr} &= \bar{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial Q}; & \frac{d\bar{\varphi}}{dr} &= -\frac{M}{Dr} + \frac{\nu}{r} \bar{\varphi} - \frac{\partial f}{\partial M}; & \frac{d\bar{M}}{dr} &= \bar{Q} - (1 - \nu^2) \times \\ & \times \frac{D}{r} \bar{\varphi} + \frac{\nu}{r} \bar{M} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}; & \frac{d\bar{Q}}{dr} &= -r\rho p^2 h \bar{W} - \frac{\partial f}{\partial W} \end{aligned} \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bar{Q}(r_1) + \beta_1 \bar{W}(r_1) &= 0; & \alpha_2 \bar{M}(r_1) + \beta_2 \bar{\varphi}(r_1) &= 0; \\ \alpha_3 \bar{Q}(r_2) + \beta_3 \bar{W}(r_2) &= 0; & \alpha_4 \bar{M}(r_2) + \beta_4 \bar{\varphi}(r_2) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $h(r)$  выражается через переменные состояния из условия максимума гамильтониана;

$$H = -\frac{M\bar{M}}{Dr} + (1 - \nu^2) \frac{D}{r} \bar{\varphi} \bar{\varphi} - r\rho p^2 h \bar{W} \bar{W} - f(h, W, \varphi, M, Q). \quad (7)$$

При этом предполагается, что частота нагружения лежит вне интервалов, возможных в силу ограничений (3), изменений собственных частот изгибных колебаний пластинки. Это гарантирует существование решения исходной задачи (1), (2) для любой  $h(r)$ , подчиняющейся ограничениям (3). Для решения задач

оптимизации стержней подобная ситуация рассмотрена в работе [6].

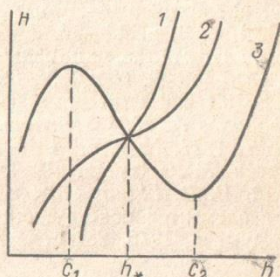
Рассмотрим функционал качества

$$I = \int_{r_1}^{r_2} r q W dr, \quad (8)$$

минимизация которого соответствует минимизации динамической податливости (максимизации динамической жесткости) пластинки относительно заданной нагрузки. Легко заметить, что для такого функционала исходная и сопряженная краевые задачи совпадают. Гамильтониан приобретает вид  $H = a/h^3 + bh^3 - ch$ , где

$$a = \frac{12(1-\nu^2)}{Er} M^2; \quad b = \frac{F\varphi^2}{12r}; \quad c = r\rho p^2 W^2$$

и, следовательно, имеет такую же структуру, как и в работе [4]. Используя результаты [4], можно установить, что гамильтониан зависит от варьируемого  $h(r)$  так, как это показано на рисунке. Значение  $h_* = (2a/b)^{1/6}$  разделяет участки выпуклости вверх и вниз.



Для  $c = c_* = 9(ab^2/4)^{1/3}$  уравнение  $H'_h = 0$  имеет на положительной полуоси один корень двойной кратности (кривая 2); в случае  $c < c_*$  функция  $H(h)$  монотонно возрастает (кривая 1); для  $c > c_*$  уравнение  $H'_h = 0$  имеет два положительных корня, которые могут быть найдены по известным формулам при решении кубического уравнения, эквивалентного уравнению  $H'_h = 0$ :

$$y^3 + 3Ay + 2B = 0; \quad A = -(c/9b)^2; \\ B = (c/9b)^2 + a/2b; \quad y = h^2 - c/9b.$$

Могут быть получены формулы, аналогичные приведенным в работе [4], выражающие оптимальную функцию  $h(r)$  через переменные состояния

$$h = \begin{cases} h_2, & c < c_*; \\ \begin{cases} h_1, & H(h_1) \geq H(h_2) \\ h_2, & H(h_1) < H(h_2) \end{cases} & c_1 < h_1; \\ \begin{cases} c_1, & H(c_1) \geq H(h_2) \\ h_2, & H(c_1) < H(h_2) \end{cases} & c_1 \in [h_1, h_2]. \end{cases} \quad c > c_*.$$

Отметим обстоятельство, характерное для задач оптимизации пластинок. Применение методов классического вариационного исчисления к задаче оптимизации приводит к необходимым условиям оптимальности в виде краевой задачи (1), (2), замкнутой условием  $H'_h = 0$  (уравнения Эйлера — Лагранжа). Однако

этому условию удовлетворяют два значения  $c_1, c_2$ , первое из которых можно трактовать в рассматриваемой задаче как локальный минимум, второе — как локальный максимум. В целом данная структура гамильтониана, как и в [4], указывает на некорректность постановки задачи оптимизации круглых пластинок при вынужденных колебаниях с функционалом качества (6) без ограничений на варьируемую функцию. Это относится и к задачам оптимизации с функционалом качества общего вида (4), поскольку структура гамильтониана (5) по отношению к исследованному случаю (7) имеет еще более сложный характер.

Список литературы: 1. Brozka Z. Plyty kotowe o rownomiernes wytrzymalosci pod obcidzeniem osiowo symetrycznym.— «Archiwum Budowy Maszyn» 1954, vol. 1, z. 3, p. 48—52. 2. Аристов М. В., Троицкий В. А. Упругая кольцевая пластинка минимального веса.— «Механика твердого тела», 1975, № 3, с. 130—138. 3. Olhoff N. Optimal design of vibrating circular plates.— «Intern. J. Solids and structures», 1970, vol. 6, No. 1, p. 139—156. 4. Гринев В. Б., Филиппов А. П. Об оптимальных круглых пластинках.— «Механика твердого тела», 1977, № 7, с. 131—137. 5. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969. 384 с. Авт.: Л. С. Понтрягин, В. Б. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и др. 6. Гринев В. Б., Филиппов А. П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. Киев, «Наукова думка», 1975. 287 с.

УДК 62—501.7

Б. П. ГЕРАСИМЕНКО, канд. техн. наук,  
Л. В. ШИПУЛИНА, канд. техн. наук,  
Э. Г. ЧАЙКА, канд. техн. наук, В. Ю. БАБИЛО,  
Н. Г. ПРОЩИН, И. Н. БОНДАРЕНКО,  
Ю. Ф. БОРИСЕНКО

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ГИРОТЕОДОЛИТА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ

Для решения многих практических задач необходимо знать направление истинного меридиана. Гиротеодолит является одним из приборов, материализующих на объекте направление меридиана. Для обеспечения требуемых точностных характеристик период прецессионных колебаний гиротеодолита доводят до нескольких единиц — десятков минут. Ввиду значительного периода прецессионных колебаний гиротеодолита определение направления меридиана по обычной методике (трем точкам реверсий) — длительный процесс. С появлением быстродействующих ЦВМ появилась возможность уменьшить время определения меридиана в результате усложнения алгоритмов вычислений.

В работе для определения направления меридиана используем метод динамической фильтрации Калмана, который базируется на методе максимального правдоподобия при следующих усло-

виях\*: закон распределения ошибок измерений считается нормальным; используется линейная математическая модель исследуемой системы; вся совокупность измерений может быть представлена в виде последовательности взаимно некоррелированных групп.

Метод динамической фильтрации Калмана широко используется при решении прикладных задач ввиду практических преимуществ его по сравнению с методом наименьших квадратов: счет распадается на ряд повторяющихся однотипных вычислений по рекуррентным формулам; нет необходимости запоминать большой объем измерительной информации; оценку вектора состояния определяем в темпе поступления информации.

Система рекуррентных формул фильтра Калмана представляется следующими зависимостями:

$$\hat{q}_i = \hat{q}_i + K_i (\tilde{d}_i - A_i \hat{q}_i); \quad K_i = P_i' A_i^T [R_i + A_i P_i' A_i^T]^{-1};$$

$$P_i = M_i P_{i-1} M_i^T; \quad P_i = P_i' - K_i A_i P_i'$$

где  $\hat{q}_{i-1}$ ,  $\hat{q}_i$  — оценка вектора состояния в моменты времени  $t_{i-1}$ ,  $t_i$ ;  $\hat{q}_i$  — прогноз оценки вектора состояния по значению оценки на предыдущем шаге;  $M_i$  — матрица перехода, связывающая систему в момент времени  $t_i$ ,  $t_{i-1}$ ;  $A_i$ ,  $d_i$  — матрица и вектор измерений в момент времени  $t_i$ ;  $R_i$  — корреляционная матрица ошибок измерений;  $P_{i-1}$ ,  $P_i$  — корреляционные матрицы ошибок оценок в моменты  $t_{i-1}$ ,  $t_i$ ;  $P_i'$  — корреляционная матрица ошибок прогноза;  $K_i$  — весовая матрица фильтра. В случае применения рекуррентных формул динамической фильтрации Калмана необходимо оперировать с линейной или линеаризованной моделью системы.

Движение чувствительного элемента гиротеодолита при пренебрежении высокочастотными нутационными колебаниями может быть описано следующей системой уравнений:

$$\dot{q}_1 = q_2; \quad \dot{q}_2 = -2nq_2 - k_1^2 \sin q_1 + A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Здесь  $q_1$ ,  $q_2$  — отклонение и скорость отклонения чувствительного элемента гиротеодолита от плоскости меридиана;  $k_1$  — частота недемпфированных прецессионных колебаний;  $A$ ,  $\omega$  — амплитуда и частота наложенных колебаний;  $n$  — коэффициент демпфирования.

Измерения, получаемые из гиротеодолита, целесообразно представить в виде  $\tilde{d}_i = q_1 + \xi + v_i$ , где  $\xi$  — систематическая ошибка;  $v_i$  — случайная помеха. Необходимо расширить систему (1),

\* Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений. М., «Наука», 1976. 410 с.



дополнив ее уравнением относительно постоянной систематической ошибки:

$$q_1 = q_2; \quad \dot{q}_2 = -2nq_2 - k_1^2 \sin q_1 + A \sin(\omega t + \varphi); \quad \dot{\xi} = 0. \quad (2)$$

Расширенной системе уравнений (2) соответствует линеаризованная модель

$$\dot{y}_1 = y_2; \quad \dot{y}_2 = -2ny_2 - k_1^2 \cos q_1 y_1; \quad \dot{y}_3 = 0$$

с матрицей коэффициентов

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_1^2 \cos q_1 & -2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Вектор состояния системы, матрица и вектор измерений в момент времени  $t_i$  соответственно равны

$$\hat{q}_i = \begin{bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ \xi_i \end{bmatrix}; \quad A = [I \ 0 \ 1];$$

$$\tilde{d}_i = A \hat{q}_i + v_i.$$

Матрица дисперсий ошибок начальных оценок может быть принята некоррелированной

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}$$

с приближенными значениями дисперсий  $p_{11}$ ,  $p_{22}$ ,  $p_{33}$ . Оценка вектора состояния  $\hat{q}_0$  в начальный момент времени является произвольной в заданном диапазоне значений.

Ниже приводится алгоритм вычислений по рекуррентным формулам динамической фильтрации для системы (1).

1. Интегрируя уравнения (2) на один шаг  $\Delta t$  по значению вектора состояния  $\hat{q}_{i-1}$ , определяем прогноз вектора состояния  $\hat{q}_i$ .
2. Матрицу перехода вычисляем по линеаризованной модели

$$M_i = I + F_i \Delta t + F_i^2 \frac{\Delta t^2}{2} + \dots,$$

где в матрицу  $F_i$  (3) подставляется вектор состояния  $\hat{q}_{i-1}$  в момент времени  $t_{i-1}$ .

3. Корреляционная матрица ошибок прогноза  $P'_i = M_i P_{i-1} M_i^T$ .
4. Весовая матрица  $K_i = P'_i A^T [R_i + A P'_i A^T]^{-1}$ .

5. Оценка вектора состояния  $\hat{q}_i = \hat{q}_i + K_i (\hat{d}_i - A \hat{q}_i)$ .

6. Корреляционная матрица ошибок оценок в момент  $t_i$   
 $P_i = P_i - K_i A P_i$ .

Результаты расчета движения чувствительного элемента гиротеодолита по рекуррентным формулам приведены на рисунке, где указаны фактические измерения и процесс вычисления оценки вектора состояния. Из рисунка видно, что процесс вычисления оценки вектора состояния имеет сходящийся характер.

Таким образом, использование рекуррентных формул динамической фильтрации позволяет определять систематическую ошибку прибора за восемьдесят секунд.

УДК 62—83

Ю. И. ЗАЙЦЕВ

### ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ЧАСТОТНОГО ПУСКА АСИНХРОННОГО ПРИВОДА

Большое значение для развития и совершенствования тиристорных систем управления имеют работы [1—3] и др. К числу нерешенных в первую очередь относится вопрос об оптимальном с точки зрения быстродействия частотном управлении процессом пуска асинхронного привода для обнаружения резервов повышения его производительности.

Расчетную схему асинхронного привода, состоящего из двигателя, механизма передач и исполнительного органа, можно представить в виде трехмассовой системы, уравнения движения которой с учетом электромагнитных явлений в двигателе имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{x1} &= U_m - a_s \Psi_{x1} + a_s k_r \Psi_{x2} + \omega_0 \Psi_{y1}; & \dot{\Psi}_{y1} &= -a_s \Psi_{y1} + \\ &+ a_s k_r \Psi_{y2} - \omega_0 \Psi_{x1}; & \dot{\Psi}_{x2} &= -a_r \Psi_{x2} + a_r k_s \Psi_{x1} + (\omega_0 - \omega) \Psi_{y2}; \\ \dot{\Psi}_{y2} &= -a_r \Psi_{y2} + a_r k_s \Psi_{y1} - (\omega_0 - \omega) \Psi_{x2}; & \dot{\omega} &= \frac{c_1}{I_1} (\varphi_2 - \varphi_1 / p) + \\ &+ \frac{3}{2} p^2 \frac{k_r}{\sigma L_s I_1} (\Psi_{x2} \Psi_{y1} - \Psi_{x1} \Psi_{y2}); & \dot{\omega}_2 &= c_2 / I_2 (\varphi_3 - \varphi_2) + \\ &+ c_1 / I_2 (\varphi_1 / p - \varphi_2); & \dot{\omega}_3 &= c_2 / I_3 (\varphi_2 - \varphi_3) - M_c / I_3; \\ \dot{\varphi}_1 &= \omega; & \dot{\varphi}_2 &= \omega_2; & \dot{\varphi}_3 &= \omega_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\Psi_{ij}$  — проекция вектора полного потокосцепления  $\Psi$  на синхронные координатные оси асинхронного двигателя (АД);  $U_m$  — амплитуда первой гармонии фазного напряжения на статоре двигателя;  $\omega_0$  — синхронная скорость вращения;  $\omega = \dot{\varphi}_1$  — электрическая угловая скорость вращения ротора;  $I_1$  — момент инер-

ции ротора;  $I_2, I_3$  — соответственно приведенные к валу двигателя суммарные моменты инерции движущихся масс системы передач и исполнительного органа;  $\varphi_j$  — абсолютная величина угла поворота  $j$ -массы;  $c_j$  — крутильная жесткость  $j$ -го участка вала;  $M_c$  — постоянный момент сопротивления внешней нагрузки;  $p$  — число пар полюсов АД;

$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}; \quad k_s = \frac{L_m}{L_s}; \quad k_r = \frac{L_m}{L_r}; \quad L_s = L_m + L_1;$$

$$L_r = L_m + L_2; \quad \alpha_s = \frac{r_1}{L_s \sigma}; \quad \alpha_r = \frac{r_2}{L_2 \sigma};$$

$L_1, L_2, L_m$  — индуктивность рассеяния статора, приведенная к статору индуктивность рассеяния ротора и индуктивность контура намагничивания;  $r_1, r_2$  — активное сопротивление статора и приведенное к статору активное сопротивление ротора.

Начальные условия для исследования процессов, происходящих в рассматриваемой электромеханической системе при пуске двигателя ( $t = 0$ ):

$$\Psi_{x1} = \Psi_{y1} = \Psi_{x2} = \Psi_{y2} = \omega = \omega_2 = \omega_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0. \quad (2)$$

Качество переходных процессов зависит от вида закона частотного управления [1]. При этом имеется два независимых параметра, по которым ведется управление: амплитуда  $U_m$  и частота  $\omega_0$  питающего двигателя напряжения. На параметры управления наложены ограничения

$$U_m^- \leq U_m \leq U_m^+; \quad \omega_0^- \leq \omega_0 \leq \omega_0^+, \quad (3)$$

где  $U_m^-, \omega_0^-$  — нижние номинальные значения амплитуды и частоты;  $U_m^+, \omega_0^+$  — верхние номинальные значения.

Целью управления будем считать разгон ротора АД за минимальное время до скорости установившегося движения, качество которого определяется неравенством

$$\omega_y - \omega \leq \Delta, \quad (4)$$

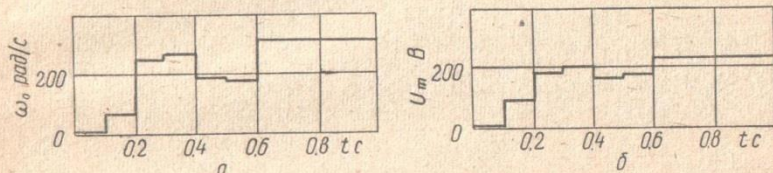
где  $\omega_y$  — установившаяся угловая скорость вращения ротора, определяемая по статической характеристике [1].

Задача определения частотного управления может быть сформулирована следующим образом: найти такой закон частотного управления  $U_m(t), \omega_0(t)$ , переводящий систему, фазовое состояние которой описывается нелинейными дифференциальными уравнениями (1) из начального состояния (2) в конечное (4), чтобы при этом обеспечивался минимум показателя качества

$$I = \int_0^{t_f} dt = t_f, \quad (5)$$

представляющего собой время разгона двигателя до установившейся скорости движения (4), и удовлетворялись ограничения (3).

Для решения задачи воспользуемся методами математического программирования. Как показал анализ [1], управление асинхронным приводом в целях увеличения его быстродействия необходимо осуществлять только в начальный период пуска  $t_1 \leq 0,1 - 0,4t_f$ , а затем предоставить возможность ротору разогнаться до установившейся скорости при максимальных номинальных значениях амплитуды и частоты напряжения. Разделим временной интервал управления  $[0, t_1]$  на  $N$  подынтервалов



длиной  $\tau$ , где  $N = t_1/\tau$ . Далее предположим, что управляющие воздействия на каждом подынтервале разбиения постоянны. Это предположение, по существу, означает, что ищется кусочно-постоянная аппроксимация оптимального управления.

Таким образом, задача сводится к отысканию экстремума функционала (5) от  $2N$  неизвестных переменных управления. Решить задачу можно методом наискорейшего спуска [4]. Систему дифференциальных уравнений (1) интегрируем методом Рунге — Кутты в модификации Мерсона с автоматическим выбором шага интегрирования, что значительно сократит затраты машинного времени [5]. Учет ограничений (3) реализуется путем введения системы штрафных функций [4].

В качестве примера рассматривали динамическую модель асинхронного привода с двигателем крановой серии МТК-51-8 со следующими параметрами:  $I_1 = 1,375 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $I_2 = 1,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $I_3 = 2,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $c_1 = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Нм}$ ;  $c_2 = 10^6 \text{ Нм}$ ;  $M_c = 50 \text{ Нм}$ ;  $U_m^+ = 220 \text{ В}$ ;  $\omega_0^+ = 314 \text{ с}^{-1}$ ;  $U_m^- = 5 \text{ В}$ ;  $\omega_0^- = 6,28 \text{ с}^{-1}$ ;  $r_1 = 0,137 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 0,297 \text{ Ом}$ ;  $k_r = k_s = 0,965$ ;  $\alpha_s = 99,476 \text{ с}^{-1}$ ;  $\alpha_r = 215,62 \text{ с}^{-1}$ ;  $\sigma = 0,068$ ;  $p = 4$ ;  $L_s = L_r = 0,0202 \text{ Гн}$ ;  $L_m = 0,0195 \text{ Гн}$ ;  $\omega_y = 308 \text{ с}^{-1}$ . Задачу по рассматриваемому алгоритму решали на ЭВЦМ М = 220 для  $N = 6$ ,  $t_1 = 0,06 \text{ с}$ . Результаты вычислений представлены на рисунке. При оптимальном частотном управлении время переходного процесса пуска системы оказалось на 18% меньше времени часто реализуемого на практике прямого пуска привода, когда амплитуда и частота напряжения сразу включаются на максимальные номинальные значения. Уменьшение времени разгона двигателя до установившейся скорости движения можно объяснить уменьшением

влияния свободных составляющих токов в обмотках при оптимальном частотном пуске.

Полученный оптимальный закон частотного управления можно достаточно просто реализовать в автоматизированных системах управления при помощи тиристорных преобразователей частоты [3].

Список литературы: 1. Сандлер А. С., Сарбатов Р. С. Автоматическое частотное управление асинхронными двигателями. М.—Л., «Энергия», 1974, 328 с. 2. Булгаков А. А. Частотное управление асинхронными электродвигателями. М., Изд-во АН СССР, 1955. 260 с. 3. Шубенко В. А., Браславский И. Я., Шрейнер Р. Т. Асинхронный электропривод с тиристорным управлением. М., «Энергия», 1967. 244 с. 4. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М., «Наука», 1975. 280 с. 5. Ланс Дж. И. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., Изд-во иностр. лит. 1962. 208 с.

УДК 681.5

Ю. А. ФРОЛОВ, канд. техн. наук

### СИНТЕЗ КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ МОНОТОННОЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В статье излагается методика синтеза квазиоптимального управления объектами, движения которых описываются  $n$ -мерными уравнениями

$$\dot{x} = f(x) + B, \quad (1)$$

где  $f(x)$  — дифференцируемая функция  $x$ , имеющая монотонную вспомогательную задачу (это свойство уточняется ниже);  $B$  — постоянная  $n \times r$ -матрица ранга  $r$ . При этом под квазиоптимальным синтезом, который в дальнейшем будем называть просто синтезом, понимается алгоритм построения управления  $w \in W$ , обеспечивающего перевод системы (1) из любого начального положения  $x^1$  в  $\delta$ -окрестность точки  $x^0 = 0$ , структура которого определяется решением задачи оптимального программного управления по критерию и ограничениям из ряда функционалов

$$I = \left( \int_0^T (\gamma^*)^{q'} d\tau \right)^{1/q'}; \quad \gamma^* = \left( \sum_{i=1}^r |w_i|^{p'} \right)^{1/p'}; \quad p', q' \in \{1, 2, \infty\}. \quad (2)$$

Множество  $W$  определяется условиями существования принятой в задаче совокупности функционалов (2) при общности параметра  $p'$  и различных  $q_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Синтез реализуется на основе решения некоторой вспомогательной задачи со строго монотонным по времени оптимальным значением критерия (2).

**Оптимальное программное управление.** Особенность большинства практических задач синтеза заключается в том, что в любой момент времени  $t$  норма управления ограничена, т. е.

$$\gamma^* \leq \mu_\infty. \quad (3)$$

Это соответствует вводу в ограничения функционала (2), у которого  $q_3 = \infty$ . Без потери общности один из функционалов (при  $q_1 = 1$  или  $q_2 = 2$ ) может быть критерием, другой — ограничением.

На основании принципа максимума задача построения оптимального управления сводится к отысканию  $\omega$ , максимизирующего функцию Гамильтона:

$$H = (\psi, f(x) + B\omega) - (\lambda_1 + \lambda_2 \gamma^* + \lambda_3) \gamma^*,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  — постоянные множители Лагранжа;  $\lambda_3 \geq 0$  — переменный;  $\psi$  — частное решение уравнения, сопряженного с (1). Решая задачу максимизации  $H$ , получаем выражения для проекций

$$\omega_i = h_i |h_i|^{p-2} Q. \quad (4)$$

Здесь  $h_i$  — компоненты вектор-функции  $h = B^T \psi$ ;  $p = p'/(p' - 1)$ ;

$$Q = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_1 - \gamma \geq 0; \\ \gamma (\gamma - \lambda_1) / \lambda_2, & \text{если } \mu_\infty \lambda_2 \gamma^p > (\gamma - \lambda_1) > 0; \\ \mu_\infty \gamma^{1-p}, & \text{если } \gamma - \lambda_1 \geq \mu_\infty \lambda_2 \gamma^p; \end{cases} \quad (5)$$

$$\gamma = \left( \sum_{i=1}^r |h_i|^p \right)^{1/p}.$$

**Задача со строго монотонным критерием.** Рассматривается  $n$ -мерная управляемая система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (6)$$

где  $A$  — постоянная  $n \times n$ -матрица;  $B$  — матрица уравнения (1). Эту систему необходимо перевести из  $x^1$  в  $x^0 = 0$  за время  $T$  так, чтобы управление  $u$  доставляло минимум функционалу типа (2). Согласно [1] в этом случае проекции управления  $u_i = -h_i |h_i|^{p-2} \gamma^{q-p} \rho^{-q}$ , где  $h_i$  — компоненты  $h = B^T X^T [0, t] l$ ;  $X [t, \tau]$  — фундаментальная матрица уравнения (6);  $l$  — вектор начальных значений сопряженной системы, обеспечивающий выполнение краевых условий;

$$\rho = \rho(l) = \left( \int_0^T \gamma^q d\tau \right)^{1/q}; \quad q = q'(q' - 1).$$

Значение критерия оптимальности в этом случае [2]

$$\mu^{(1)} = \mu(x^1, T) = 1/\rho(l^1) = 1/\rho(l(x^1)).$$

Если  $\mu(x, T_2) < \mu(x, T_1)$  при  $T_2 > T_1$ , то такую задачу будем называть задачей со строго монотонным критерием (ЗСМК).

Обозначим через  $L^1$  множество  $l$ , при которых  $\mu^1 = 1/\rho(l)$ , а через  $X^1 \subset R^n$  — множество начальных положений, из которых система (6) переводится за время  $T$  в  $x^0$  оптимальным управлением так, что  $\mu(x, T) \leq \mu^1$ ,  $x \in X^1$ . Введем соответствующее множество оптимальных управлений  $U^1$ . Представляя результат движения системы (6) по формуле Коши, получаем

$$x(t) = X[t, 0]x + \int_0^t X[t, \tau] B u d\tau; \quad x \in X^1, u \in U^1.$$

В дальнейшем предполагается, что  $l(x)$ , порождающая оптимальное решение задачи, — непрерывная функция  $x$ .

Из приведенных построений следует ряд свойств ЗСМК: 1) экстремаль  $x(t) \in X^1$  погружается в  $X^1$  на  $[0, T]$ , т. е.  $\mu(x(t), T) < \mu^1$ ,  $t \neq 0$ ; 2)  $X^1$  — выпуклый компакт с границей  $\bar{X}^1$  и внутренней точкой  $x^0$ ; 3) для всех  $x \in X$  и  $l \in L^1$

$$-1 \leq (l, x) \leq 1, \quad (7)$$

где равенства имеют место только при  $l = \pm l(x)$  и  $x \in \bar{X}^1$ .

**Теорема 1.** Для кривой  $x(s)$  такой, что  $x(0) = x^1$  и

$$(x'_s, l(x^1)) > 0 \quad (s \in [0, s_1]), \quad (8)$$

найдется  $s_2 \in (0, s_1)$ , при котором  $x(s)$  погружается в  $X^1$  на  $[0, s_2]$ .

Допустим противное, тогда на  $[0, s_3] \subset [0, s_1]$  погружения не происходит. Из (7) получим  $(x^1, l(x(s))) \leq -1$ . Вычитая отсюда очевидное равенство  $(x(s), l(x(s))) = -1$  и используя разложение в ряд Тейлора  $x(s) = x^1 + x_s(\theta s)s$ ,  $0 \leq \theta \leq s$ , после сокращения на  $s > 0$  имеем  $\varphi(s) = (x_s(\theta s), l(x(s))) < 0$ , откуда  $\varphi(0) < 0$ , что приводит к противоречию с (8). Теорема доказана.

**Квазиоптимальный синтез.** Будем говорить, что  $f(x)$  имеет монотонную вспомогательную задачу (МВЗ), если для любого ограниченного  $\dot{x} \in R^n$  замораживанием части  $x_i$  в проекциях  $f_j(x)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) исходная задача может быть приведена к ЗСМК, для которой

$$a) (l^1, f(x^1) + Bw) > 0; \quad (9)$$

б) выполняется условие возрастающего перехода.

Итак, пусть для решения исходной задачи синтеза построена МВЗ (разумеется, эффективно решаемая). Рассмотрим возможные методы его реализации. Выбираем  $\lambda_1, \lambda_2, T$ . При заданном  $x^1$  проводим замораживание и задаем начало отсчета  $t = 0$ . Из решения ЗСМК находим  $l^1$  и  $\mu^1$ . По  $\psi(0) = l^1$  согласно (4), (5) строим  $w_i(0)$ . При этом в силу (5) выполняется (3). Уменьшением  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  можно добиться выполнения (9). Значения  $w_i$  по (4) при  $t > 0$  определяются по  $h_i$ , которые вычисляем с помощью результатов интегрирования сопряженной системы к (1). Можно использовать и  $h_i$  МВЗ. Полученные управления  $w_i$  реализуем

до момента входа  $x$  исходной задачи в  $\delta$ -окрестности  $x^0$  или до  $t_1$ , при котором  $\bar{\mu}^{(2)} = \min \mu(x(t), T)$ ,  $x(t) \in X^1$ . Если  $\|x^2\| > \delta$ , то при новом замораживании повторяется процедура для  $x^2$ . При этом соответствующее  $\mu^{(2)} \leq \bar{\mu}^{(2)}$ , что названо условием невозрастающего перехода.

**Теорема 2.** Синтез на основе решения МВЗ обеспечивает перевод системы (1) в  $\delta$ -окрестность точки  $x^0$ .

Поскольку в силу теоремы 1 и свойств решения МВЗ имеет место погружение, при котором  $\mu^{m+1} < \mu^m$ , то соответствующие подмножества  $X^m, X^{m+1}$  будут внутренними по отношению друг к другу так, что  $X^{m+1} \subset X^m$ . В этих условиях  $\lim_{m \rightarrow \infty} X^m = X^0$ .

Отсюда следует, что существует такое  $M$ , при котором  $x^m$  попадает в  $\delta$ -окрестность  $x^0$ , если  $m \geq M$ . Теорема доказана. Другой подход к синтезу основывается на использовании решения МВЗ в каждый момент времени. В этом случае отпадает необходимость в интегрировании сопряженной системы, поскольку в обоих случаях  $\lambda_1, \lambda_2, T$  могут быть приняты за параметры адаптации для ускорения перехода в  $\delta$ -окрестность точки  $x^0$ .

Пример построения монотонной вспомогательной задачи. Рассматривается задача успокоения вращения твердого тела. Системе (1) в этом случае соответствуют уравнения Эйлера в форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= [(I_2 - I_3)x_2x_3 + M_1]/I_1; & \dot{x}_2 &= [(I_3 - I_1)x_1x_3 + M_2]/I_2; \\ & & \dot{x}_3 &= [(I_1 - I_2)x_1x_2 + M_3]/I_3, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $x_i, M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — соответственно проекции угловой скорости и управляющего момента на главные центральные оси;  $I_i$  — моменты инерции относительно этих осей. Для (10) формулируется задача синтеза при начальных условиях  $x_i(0) = \Omega_i$ , заданных ограничениях и критерии типа (2).

Обозначая через  $x_i^*$  замороженные проекции, построим МВЗ с критерием (2), у которого  $p' = q' = 2$ , для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (I_2x_2^*x_3 - I_3x_3^*x_2 + u_1)/I_1; & \dot{x}_2 &= (I_3x_3^*x_1 - I_1x_1^*x_3 + u_2)/I_2; \\ & & \dot{x}_3 &= (I_1x_1^*x_2 - I_2x_2^*x_1 + u_3)/I_3. \end{aligned}$$

После определения фундаментальной матрицы  $X[t, \tau]$  этой системы можно найти  $l_i$  [2], которые в рассматриваемом случае определяются при решении следующей задачи: найти

$$\rho^2 = \min \sum_{i=1}^3 T(l_i/I_i)^2 \quad \text{при } (l, \Omega) = 1.$$

Отсюда, обозначая через  $K$  кинематический момент, получаем

$$\begin{aligned} l_i &= -\Omega_i(I_i/K)^2; & \mu &= K/\sqrt{T} \\ (K &= \sqrt{I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2}). \end{aligned}$$



Из этих результатов видно, что  $\mu$  строго монотонно убывает по  $T$ . При  $t=0$  и  $\psi_i(0) = I_i$  из (10) и (5) находим

$$(\dot{x}, l) = QK^{-2\rho} \sum_{i=1}^3 |\Omega_i I_i|^\rho.$$

Но согласно (5) выбором  $\lambda_1, \lambda_2$  обеспечивается неравенство  $Q > 0$ . Отсюда следует, что  $(\dot{x}, l) > 0$ , т. е. выполняется (9). В силу равенства  $\mu = K/\sqrt{T}$  выполнение условия невозрастающего перехода очевидно. Таким образом, для приведенного примера может быть реализован квазиоптимальный синтез.

Отметим, что  $V = K$  (аналог  $\mu = K/\sqrt{T}$ ) — функция Ляпунова, применяемая для задач успокоения вращения. Однако в отличие от излагаемого подхода введение функции  $V$  не обеспечивает конструктивного построения управления по критерию и ограничениям типа (2). В более сложных примерах практически не удается построить функцию Ляпунова. Предлагаемая нами методика облегчает ее построение. Практически для систем, к которым удастся построить функцию Ляпунова, всегда можно реализовать рассматриваемый в работе синтез.

Список литературы: 1. Фролов Ю. А. Алгоритмы стабилизации планов и программ в условиях заданных структур управлений. — В кн.: Управление сложными технико-экономическими системами. Киев, ИК АН УССР, 1974, с. 65—68. 2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968. 475 с.

УДК 62-523.3

Э. А. ПИКУР, канд. техн. наук, В. Е. РОЖАНСКИЙ,  
В. Ю. РОХЛЕНКО, канд. техн. наук, Г. М. РУДНИЦКИЙ,  
В. П. СЕВЕРИН

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПАРОВЫХ ТУРБИН ХТГЗ им. С. М. Кирова

С ростом мощности турбогенераторов возрастают требования предъявляемые к статическим и динамическим характеристикам систем автоматического регулирования. Для выполнения этих требований необходим переход к более гибким электрогидравлическим системам.

Одним из основных элементов электрогидравлической системы является электрогидравлический преобразователь (ЭГП). В работе приводятся результаты исследования и доводки трех конструкций ЭГП.

Первая конструкция — двухзолотниковый ЭГП — предназначена для установки на станциях с турбинами К-300-240 и К-500-240. Она состоит из основного и вспомогательного зо-

лотников, рычага-заслонки и электромеханического преобразователя (ЭГП).

На первом этапе экспериментального исследования первого образца выявлены существенные недостатки: малая точность (порядка 10—15%, самопроизвольное перемещение, зона нечувствительности, пульсации); периодическая потеря устойчивости с возникновением автоколебаний. Эти недостатки, особенно возникновение автоколебаний, могут привести турбогенератор к аварийному отключению от сети. После проведенных на стенде завода испытаний для достижения более высокой точности была изменена конструкция упругой подвески — дополнительно установлены две мембраны, центрирующие заслонку. Шарниры с подшипниками трения заменены на призмы, укорочены стальные пружин для исключения сухого трения. Введено принудительное вращение золотников для исключения заедания и сухого трения о буксу. Эти изменения позволили довести точность до 0,5—1%.

Для исследования устойчивости были составлены уравнения и построены границы устойчивости для различных параметров. Эти исследования показали, что система имеет очень малый запас устойчивости. Увеличить запас устойчивости можно путем уменьшения массы подвижных частей заслонки и ЭМП, увеличения постоянной времени главного золотника, увеличения жесткости пружины рычага-заслонки.

Так как увеличение постоянной времени основного золотника и увеличение жесткости пружины снижает быстрдействие ЭГП, то в первую очередь следует уменьшить массу подвижных частей ЭМП и заслонки. Это достигается уменьшением габаритов деталей, а также использованием алюминиевых и титановых сплавов. В результате вес снижается от 1 до 0,6 кг. Основным является быстрдействие при закрытии клапанов, для устойчивости же необходимо уменьшить постоянную времени. Поэтому была введена нелинейная форма запилы на вспомогательном золотнике, которая обеспечивает разные постоянные времени главного золотника при движении на закрытие (0,04 с) и на открытие клапанов (0,08 с). Это значительно увеличило запас устойчивости.

После окончательной доводки двухзолотниковой ЭГП все же имеет некоторые недостатки. Основные из них: 1) влияние изменения силового давления на положение золотника; 2) необходимость профилактических ревизий и ремонтов (из-за сложности конструкции); 3) пониженная точность как результат трения золотников.

Для устранения этих недостатков на ХТГЗ разработана конструкция однозолотникового ЭГП, состоящего из одного золотника, рычага-заслонки с пружинами и ЭМП. Одновременно с проектированием этой конструкции проведено аналитическое исследование устойчивости.

Для расчетных параметров запас устойчивости оказался весьма малым. Чтобы увеличить запас устойчивости, необходимо пружину рычага-заслонки переместить на конец рычага в сторону ЭМП.

При экспериментальном исследовании на стенде хорошо подтвердились результаты аналитического расчета. Система имеет большой запас устойчивости. Изменения силового давления от 20 до 3 кг/см<sup>2</sup> практически не влияет на перемещения золотника. Точность работы порядка 0,5—1%. Время регулирования на открытие и закрытие клапанов 0,04с. Однако после установки опытного образца однозолотникового ЭГП на станции наблюдалось заедание золотника через 30—40ч работы. Основные причины заедания — загрязненная рабочая жидкость (вода, отсутствие вращения, облитерация зазоров золотника). В настоящее время принимаются меры для устранения заедания золотника.

Названные недостатки могут быть устранены при использовании ЭГП с электрической обратной связью по положению отсечного золотника. В подобной системе могут быть использованы однозолотниковый ЭГП или двухсупловой гидроусилитель, управляющий непосредственно отсечным золотником\*. В такой конструкции при увеличении коэффициента усиления повышается точность и быстродействие; появляется возможность введения корректирующих звеньев в электрической обратной связи.

Конструкция с двухсупловым гидроусилителем обладает рядом особенностей, которые могут быть исследованы только на натуральных испытаниях.

Данная работа — первый шаг в исследовании ЭГП. В дальнейшем предстоит более детальное изучение ЭГП, уточнение уравнений, описывающих их работу, окончательный выбор и доводка серийного ЭГП систем регулирования турбин Харьковского турбогенераторного завода.

УДК 62.505

Н. Г. КИРЕЕВ, канд. техн. наук,  
П. И. ЗАХАРЕНКО

#### К ВОПРОСУ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

*Постановка задачи.* Исследуется система, описываемая уравнением вида

$$\bar{X} = C_1(A, t) \mu(t) \bar{f}(t) + C_2(A, t) \bar{X} + C_3(A, t) \bar{X}, \quad (1)$$

\* Электрогидравлические следящие системы. М., «Машиностроение», 1971. 431с. Авт.: В. А. Хохлов, В. Н. Прокофьев, Н. А. Борисова и др.

где  $C_i(A, t)$  — заданные матрицы параметра  $A$  и времени  $t$ ;

$$0 \leq t \leq t_f; \bar{f}(t) = \{f(t) \cos \vartheta(t); f(t) \sin \vartheta(t); 0\};$$

$f(t)$  — известная,  $\vartheta(t)$  — неизвестная функция времени;

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq T = t_f; \\ 0 & \text{при } t > T = t_f. \end{cases}$$

На вектор  $\bar{f}(t)$  наложено ограничение

$$\int_0^T f(t) dt \leq B \quad (B \text{ — заданная константа}). \quad (2)$$

Требуется построить алгоритм идентификации, позволяющий с указанной точностью определить параметры  $A, T$  таким образом, чтобы для любого начального состояния системы  $\bar{X}_0, \dot{\bar{X}}_0$  решение уравнения (1) проходило в малой окрестности заданной точки  $\bar{X}_f$ .

Особенностью данной задачи, отличающей ее от аналогичных задач, является то, что наряду с параметрами  $A, T$  неизвестной считается функция  $\vartheta(t)$ .

*Преобразование системы уравнений.* Для конкретности уравнение (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= 2\omega \begin{bmatrix} -\dot{z} \sin \varphi - y \cos \varphi \sin A \\ \dot{x} \cos \varphi \sin A + z \cos \varphi \cos A \\ \dot{y} \cos \varphi \cos A + x \sin \varphi \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \cos^2 A \cos^2 \varphi (1 - \cos \omega t) + \cos \omega t \\ \cos A \cos \varphi \sin \varphi (1 - \cos \omega t) + \sin A \cos \varphi \sin \omega t \\ -\sin A \cos A \cos^2 \varphi (1 - \cos \omega t) + \sin \varphi \sin \omega t \\ \cos A \cos \varphi \sin \varphi (1 - \cos \omega t) - \sin A \cos \varphi \sin \omega t \\ \sin^2 \varphi (1 - \cos \omega t) + \cos \omega t \\ -\sin A \cos \varphi \sin \varphi (1 - \cos \omega t) - \cos A \cos \varphi \sin \omega t \\ -\cos^2 \varphi \cos A \sin A (1 - \cos \omega t) - \sin \varphi \sin \omega t \\ -\sin A \cos \varphi \sin \varphi (1 - \cos \omega t) + \cos A \cos \varphi \sin \omega t \\ \sin^2 A \cos^2 \varphi (1 - \cos \omega t) + \cos \omega t \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \mu(t) \dot{f}(t) \cos \vartheta(t) \\ \mu(t) f(t) \sin \vartheta(t) \\ 0 \end{bmatrix} + B_1(x, y, z) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \\ &+ B_2(x, y, z) \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos A \\ \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin A \end{bmatrix}, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $\varphi, \omega$  — известные константы;  $B_1(x, y, z), B_2(x, y, z)$  — известные функции.

Выберем некоторое произвольное значение параметра  $A$ . Преобразуем (3) к форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = x_{3+i}; \quad \dot{x}_{3+i} = \mu(t) f(t) K_i(t) \sin(\vartheta(t) + \varphi_i(t)) + \\ + B(x_1, x_2, x_3) + K_{3+i}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{j=1}^3 K_{ij} x_{3+j}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $K_i(t)$ ,  $\varphi_i(t)$ ,  $B(x_1, x_2, x_3)$ ,  $K_{3+i}(x_1, x_2, x_3)$  — известные функции;  $K_{ij}$  — известные константы;  $K_{ii} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Переход от (3) к (4) производился таким образом, что

$$x_1(t_f) = 0; \quad x_2(t_f) = 0. \quad (5)$$

От параметра  $A$  зависят теперь только переменные  $x_3(t)$ ,  $x_6(t)$ . При точном значении параметра  $A$   $x_3(t_f)$  обращается в нуль. С учетом (2) минимизируем функционал

$$I = \int_0^{t_f} \mu(t) f(t) dt. \quad (6)$$

*Решение задачи оптимального управления.* Определяя функции  $x_i(t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $\vartheta(t)$  при  $t \in [0, t_f]$ , доставляющие минимум функционалу (6) при дифференциальных связях (4) и краевых условиях (5), (7)

$$x_i(0) = x_{i0} \quad (i = 1 \div 6), \quad (7)$$

считаем значение  $x_3(t_f)$  произвольным, так как параметр  $A$  известен лишь приближенно. Величины  $x_4(t_f)$ ,  $x_5(t_f)$ ,  $x_6(t_f)$  также произвольны. Время  $t_f$  неизвестно. Получаем задачу в нефиксированном времени и свободным правым концом.

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{P}_i = -P_{3+i} B(x_1, x_2, x_3) - \sum_{j=1}^3 P_{3+j} \left[ x_j \frac{\partial}{\partial x_i} B(x_1, x_2, x_3) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} K_{3+j}(x_1, x_2, x_3) \right]; \quad \dot{P}_{3+i} = -P_i - \sum_{j=1}^3 K_{ji} P_{3+j}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ .

Необходимые условия трансверсальности:

$$P_i(t_f) = 0 \quad (i = 3 \div 6). \quad (9)$$

Кроме того, в конечный момент времени функция Гамильтона должна быть равна нулю:

$$H(t_f) = 0. \quad (10)$$

*Решение краевой задачи.* Итак, определение неизвестных функций  $x_i(t)$ ,  $P_i(t)$ ,  $\vartheta(t)$ ,  $\mu(t)$  сводится к решению краевой задачи для системы уравнений (4), (8) при краевых условиях (5), (7), (9) и функциях  $\vartheta$ ,  $\mu$ , определяемых из принципа максимума [1]. Трудность построения вычислительной процедуры

в подобных задачах связана с тем, что неизвестен момент окончания процесса численного интегрирования. Но в данной задаче эта трудность преодолевается, так как при переходе от (3) к (4) переменная  $x_1(t)$  уменьшается монотонно, а также известно ее конечное значение  $x_1(t_f) = 0$ .

Зададим произвольные начальные условия импульсами  $P_i(0) = \alpha_i$  ( $i = 1 \div 6$ ). Теперь имеются все начальные условия. Следовательно, можно интегрировать системы (4), (8). Процесс численного интегрирования прекратим, когда  $x_1(t) = x_1(t_f) = 0$ . Вычислим в данный момент  $x_2(t_f)$ ,  $P_3(t_f)$ ,  $P_4(t_f)$ ,  $P_5(t_f)$ ,  $P_6(t_f)$ ,  $H(t_f)$ . Все эти величины зависят от  $\alpha_i$  ( $i = 1 \div 6$ ).

Из (5), (9), (10) следует, что в конечный момент времени все они должны быть равны нулю, т. е. необходимо найти такие начальные условия  $\alpha_i$ , при которых

$$\begin{aligned} x_0^1 &= x_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = 0; \\ x_0^2 &= H(\alpha_1, \dots, \alpha_6) = 0; \\ x_0^i &= P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_6) = 0 \\ &(i = 3 \div 6). \end{aligned}$$

Данная краевая задача решается модифицированным методом Ньютона [2].

*Определение параметра А.* Ранее предполагалось, что известно некоторое приближенное значение параметра А. После решения краевой задачи для этого весьма грубого приближения параметра получаем значение  $x_3(t_f)$ , которое зависит от А. Затем параметр уточняем итерационно:

$$A_k = A_{k-1} + \frac{x_{3k}}{(\partial x_3 / \partial A_k)_{x_3 = x_{3k}(t_f)}},$$

где  $\frac{\partial x_3}{\partial A}$  вычисляем методом численного дифференцирования. Выбор параметра А заканчиваем при удовлетворении условия точности его определения. По данному алгоритму составлена программа, которая была реализована на ЭВМ М-222.

**Список литературы:** 1. Ту Ю. Современная теория управления. М., «Машиностроение», 1971. 472 с. 2. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М., «Наука», 1971. 424 с.

УДК 517.27

В. П. СЕВЕРИН

#### СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ НА ПРИМЕРЕ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННОЙ ФУНКЦИИ

При выборе параметров систем автоматического регулирования возникает задача минимизации некоторого критерия качества системы, например интегральной квадратичной оценки ка-

чества [1]. Целевая функция в этой оптимизационной задаче является плохо обусловленной функцией варьируемых параметров, причем ее вычисление довольно трудоемко. Поэтому среди множества алгоритмов минимизации требуется выделить такие алгоритмы, которые бы позволяли найти минимум плохо обусловленной функции при наименьшем количестве вычислений значения этой функции.

В качестве примера плохо обусловленной функции может служить тестовая функция Розенброка:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (1)$$

с графиком в форме изогнутого оврага и минимумом, равным нулю в точке (1, 1). В практических задачах целевая функция имеет довольно сложный вид и нередко определяется численными методами интегрирования, что вызывает необходимость экономного расходования машинного времени. Поэтому критерием эффективности алгоритма оптимизации выберем число  $N$  — количество вычислений значения функции (1) при достижении требуемой точности минимизации:

$$|f - f_m| < 0,001, \quad (2)$$

где  $f$  — значение функции, полученное при минимизации;  $f_m$  — истинный минимум функции. Но так как  $f_m = 0$ , а  $f \geq 0$ , принятое условие (2) сходимости алгоритма к минимуму можно переписать следующим образом:

$$f < 0,001. \quad (3)$$

На примере минимизации функции (1) исследовали такие методы: 1 — параллельных касательных; 2 — наискорейшего спуска; 3 — Гаусса — Зейделя; 4 — конфигураций; 5 — квадратичной аппроксимации; 6 — градиентный [2]; 7 — сопряженных градиентов Полака — Рибьера [2]; 8 — квазиньютоновский [2]; 9 — Пауэлла [3]; 10 — Дэвидона — Флетчера — Пауэлла [3]; 11 — деформируемого многогранника [3]; 12 — деформируемого многогранника с измененным критерием окончания поиска.

№ метода	Количество вычислений функции $N$	Значение функции $f$	Значения аргументов	
			$x_1$	$x_2$
1	228	0,0000	1,0016	1,0033
2	3559	0,0148	0,8785	0,7710
3	3012	0,0153	0,8764	0,7681
4	214	0,0507	0,7793	0,6028
5	199	0,0000	0,9966	0,9931
6	1803	2,2879	0,5105	0,2683
7	403	0,0005	0,9768	0,9540
8	380	0,0006	0,9920	0,9862
9	227	0,0001	0,9957	0,9920
10	94	0,0001	1,0103	1,0211
11	200	0,0002	1,0016	1,0048
12	130	0,0002	1,0016	1,0048

Результаты минимизации этими методами функции (1) из точки  $(-1, 2, 1, 0)$  с  $f = 24,2$  на ЦВМ М-222 сведены в таблицу.

Методы 1—5 взяты из библиотеки стандартных подпрограмм ЦВМ М-222. Из них только методы 1 и 5 позволили вычислить значение минимума функции (1) с требуемой точностью. Программы методов 6—8 написаны на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 для ЦВМ М-222. В них для отыскания величины шага в выбранном методом направлении применен алгоритм «золотое сечение». Все эти методы требуют нахождения производных целевой функции, которые в программах вычисляются как отношение приращения функции к заданному приращению аргумента. Для метода 8, кроме этого, вычислялась матрица вторых частных производных, а ее обращение осуществлялось стандартной подпрограммой обращения матрицы. Метод 6 при большом количестве вычислений значения функции не достиг заданной точности. Методы 7 и 8 с использованием подпрограммы одномерного поиска «золотое сечение» оказались менее эффективными, чем лучшие из стандартных методов.

Программы методов 9—11, написанные на алгоритмическом языке ФОРТРАН [3], переведены на алгоритмический язык АЛГОЛ-60 для алгольного транслятора ЦВМ М-222. Проведенные вычисления подтвердили высокое качество этих программ. В методах 9 и 10 для одномерного поиска применен метод ДСК-Пауэлла [3], который оказался эффективнее метода «золотое сечение». Методы 9 и 11 не требуют вычисления производных целевой функции, и в этом их достоинство. Однако метод 10 использует меньшее количество вычислений целевой функции.

В заключение можно сделать небольшое замечание, касающееся метода 11, в котором на каждой итерации требуется одно дополнительное вычисление значения целевой функции  $f_{n+2}$  для определения критерия окончания поиска:

$$\left[ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (f_i - f_{n+2}) \right]^{1/2} \leq \varepsilon, \quad (4)$$

где  $n$  — количество переменных;  $\varepsilon$  — произвольное малое число;  $f_i$  — значения функции в вершинах деформируемого многогранника;  $f_{n+2}$  — значение функции в центре тяжести многогранника.

В методе 12 условие (4) заменено условием

$$\left[ 1/(n+1) \sum_{i=1}^{n+1} (f_i - f_i) \right]^{1/2} \leq \varepsilon,$$

где  $f_i$  — минимальное значение функции в вершинах деформируемого многогранника. Таким образом, при той же точности на каждой итерации вычисляется меньше значений целевой функции.

Итак, для решения данной задачи минимизации могут быть использованы методы 1, 5, 7, 8—12. Но наиболее эффективными следует признать методы 10 и 12. Исследования, проведенные с другими тестовыми функциями [3], подтверждают эти выводы.



Список литературы: 1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М., «Наука», 1975. 767 с. 2. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М., «Мир», 1974. 374 с. 3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., «Мир», 1975. 534 с.

УДК 519.95

А. В. ГОРЕЛЫЙ, канд. техн. наук

### ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ЭФФЕКТИВНОСТИ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Если смотреть на производственный процесс как на реализацию ситуации, в которой каждый из участников стремится к достижению как общих, так и специфических интересов, можно выделить один из важных аспектов — использование предельных возможностей системы для достижения максимальной эффективности ее функционирования.

Рассмотрим двухуровневую иерархическую систему без горизонтальных связей, в которой элемент верхнего уровня распределяет ресурс всей системы  $X$  между  $n$  производителями, каждый из которых для осуществления одного цикла производственного процесса распределяет выделенную ему долю ресурса  $X_i$  между факторами производства. Для описания каждого из производителей как агрегированной экономики удобно воспользоваться производственными функциями Кобба — Дугласа. Выпуск продукции элементом нижнего уровня, таким образом, представлен односекторной двухфакторной функцией

$$Y_i = A_i (F_i + \Delta_i)^{\alpha_i} (X_i - \Delta_i)^{1-\alpha_i}, \quad (1)$$

где  $F_i$  — фонды на начало производственного цикла;  $\Delta_i$  — приращение фондов, управление  $i$ -го элемента;  $\alpha_i$  — коэффициент эластичности;  $A_i$  — масштабный коэффициент.

Продукция системы  $Y$  складывается из продукций элементов:

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (2)$$

Эффективность  $\Theta$  вложения ресурсов системы  $X$  определяется очевидным соотношением

$$\Theta = Y/X; \quad (3) \quad \left( X = \sum_{i=1}^n X_i \right). \quad (4)$$

Эту эффективность необходимо максимизировать путем выбора оптимальных управлений на всех уровнях при выполнении следующих ограничений:

ограниченности ресурсов системы

$$X \leq W; \quad (5)$$

выполнимости плана по объему производства

$$Y \geq N; \quad (6)$$

физических ограничениях на управления

$$0 \leq X_i \leq X; \quad 0 \leq \Delta_i \leq X_i. \quad (7)$$

Максимум функции Э может быть найден различными способами, в частности геометрически. Для этого найдем область определения эффективности в координатах  $X, Y$  согласно (3). На рис. 1 эта область ограничена снизу и справа условиями (5) — (6), а в «северо-западной» области — предельной кривой, изображающей максимально возможный выпуск продукции в зависимости от потребляемых ресурсов. Для любой точки  $A(X, Y)$  эффективность представляет собой тангенс угла наклона

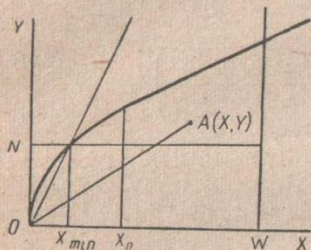


Рис. 1. Область определения эффективности.

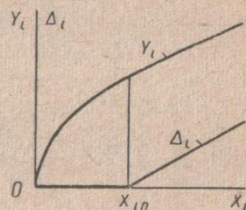


Рис. 2. Оптимальные характеристики элемента системы.

луча  $OA$  к оси абсцисс. Наибольшее значение этого угла в первом квадранте достигается на «северо-западной» границе области, т. е. на предельной кривой.

Для построения предельной кривой найдем максимум  $Y$  согласно (2) с учетом (1), (4). Исследование  $Y$  на экстремум показывает, что единственная стационарная точка расположена вне области, ограниченной физическими условиями (7) и, следовательно, максимум находится на границе некоторых из управлений. Необходимые условия существования максимума позволяют выделить зависимости  $\Delta_i$  от  $X_i$ . Такое упрощение в данном случае возможно благодаря тому, что каждый член суммы в (2) содержит лишь два управления с одинаковыми индексами  $\Delta_i, X_i$ , а ограничение (4) — линейное. Этот результат означает, что каждый из производителей выбирает оптимальное управление, преследуя одинаковую цель — максимизацию выпуска продукции, что совпадает с целевой функцией системы. Следовательно, рассматриваемый тип жесткой оптимизации системы соответствует случаю полного сотрудничества и отсутствия специфических целей. Характер зависимости оптимальных управлений  $\Delta_i$  и частных выпусков продукции от управлений верхнего уровня приведен на рис. 2. Заслуживает внимания характерная точка  $X_{i0} = [(1 - \alpha_i) / \alpha_i] F_i$ . Слева от нее

(случай «малых» ресурсов)  $i$ -й элемент выделяет все свои ресурсы на второй фактор производства. При этом выпуск продукции подчиняется показательному закону:

$$Y_i = A_i F_i^{\alpha_i} X_i^{1-\alpha_i}. \quad (8)$$

В случае «больших» ресурсов он распределяет их пропорционально между факторами производства. При этом выпуск продукции подчиняется линейному закону:  $Y_i = \alpha_i^i (1 - \alpha_i)^{1-\alpha_i} A_i \times (X_i + F_i)$ . Оптимизация системы на верхнем уровне показывает, что в данном случае наблюдается аналогичная картина. Существует критическая точка  $X_0$ , разделяющая случай «малых» и «больших» ресурсов:

$$X_0 = \min_j \sum_{i=1}^n B_{ij} X_{j0}^{\alpha_j}; \quad B_{ij} = \left( \frac{1 - \alpha_i A_i F_i^{\alpha_i}}{1 - \alpha_j A_j F_j^{\alpha_j}} \right)^{\frac{1}{\alpha_j}}. \quad (9)$$

В случае малых ресурсов одно из управлений находим из уравнения  $\sum_{i=1}^n B_{ij} X_{ij}^{\alpha_j} - X = 0$ , а остальные — с помощью равенств

$X_i = B_{ij} X_{ij}^{\alpha_j}$ . При этом выпуск продукции представляет собой сумму (2) показательных функций (8). В случае «больших» ресурсов системы всем элементам, кроме одного элемента, выделяются «малые» ресурсы

$$X_i = B_{ij} X_{ij}^{\alpha_j} < X_{j0}, \quad (10)$$

а наиболее перспективному  $j$ -му элементу — «большой» ресурс  $X_j = X - \sum_{i \neq j} X_i > X_{j0}$ . При этом выпуск продукции подчиняется линейному закону

$$Y = \alpha_j^j (1 - \alpha_j)^{1-\alpha_j} A_j \left( X - \sum_{i \neq j} X_i + F_j \right) + \sum_{i \neq j} A_i F_i^{\alpha_i} X_i^{1-\alpha_i},$$

где  $X_i$  определяется (10), а  $j$  доставляет минимум (9).

Полученная предельная кривая является выпуклой, вследствие чего максимум эффективности (см. рис. 1) достигается на нижнем ограничении (6) в точке пересечения нижней границы области определения эффективности с предельной кривой. Таким образом, максимизация эффективности вложения ресурсов приводит к необходимости отождествления целевых функций всех ее элементов и достигается за счет использования предельных возможностей экономики при точном выполнении плана выпуска продукции и экономии ресурсов в объеме  $W - X_{\min}$ , причем  $X_{\min}$  определяется, как на рис. 1, планом выпуска продукции и предельными возможностями экономики.

А. В. ДАБАГЯН, д-р техн. наук,  
В. Я. ЗАРУБА

### ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ИГРЫ В ФОРМЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

При анализе многих процессов управления разработка практических рекомендаций возможна или целесообразна в условиях выделения отдельных оперирующих сторон и учета различия их интересов. Общими математическими моделями указанных процессов являются стратегические коалиционные игры. Следуя классической кооперативной теории стратегических игр, последние можно свести к играм в форме характеристической функции. Задачи, возникающие при таком переходе, относятся к классу задач математического программирования. Таким образом, в играх с характеристической функцией сохраняются теоретико-игровые проблемы, присущие играм вообще.

Пусть  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  — множество всех оперирующих сторон, множество игроков;  $\Gamma = \{S/S \subseteq \Omega\}$  — множество всех подмножеств множества  $\Omega$ , элементы множества  $\Gamma$  называются коалициями;  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  — вектор выигрышей, получаемых игроками. Каждой коалиции  $S \in \Gamma$  будем ставить в соответствие ее максимальный гарантированный выигрыш  $v(S)$ , представляющий собой сумму выигрышей игроков из коалиции  $S$ , которую они могут получить, выступая согласованно, независимо от действий остальных игроков. Множество  $S$  можно рассматривать как аргумент, а  $v(S)$  как функцию множеств. Функция  $v(S)$  полностью задает игру и называется характеристической функцией игры.

Множество  $E(v)$  называется множеством дележей, а вектор выигрышей  $x \in E(v)$  — дележом в игре  $v$ , если

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(\Omega); \quad (1) \quad x_i \geq v(i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Условие (1) означает, что все игроки объединяются с целью получить максимальную сумму выигрышей. Условие (2) означает, что каждый игрок получит не меньше своего максимального гарантированного выигрыша. Мы говорим, что дележ  $y$  доминирует дележ  $x$  по коалиции  $S$ , если

$$S \neq \emptyset; \quad v(S) \geq \sum_{i \in S} y_i; \quad y_i > x_i; \quad \forall i \in S.$$

Множество  $V(v)$  дележей называется решением игры  $v$  по фон Нейману и Моргенштерну (Н-М-решением), если никакой элемент множества  $V(v)$  не доминирует другой элемент этого множества и любой дележ, не принадлежащий  $V(v)$ , домини-

руется каким-нибудь дележом из  $V(v)$ . Множество  $C(v)$  дележей называется  $c$ -ядром, если

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S); \quad \forall S \in \Gamma; \quad \forall x \in C(v).$$

Исследование игр с характеристическими функциями может вестись в двух направлениях. Использование Н-М-решений позволяет указать, какими будут взаимоотношения между игроками, «нормы», линии их поведения, приводящие к равновесному устойчивому исходу игры. При этом предполагается, что реализация конкретного дележа в конце игры зависит от неформализованных факторов, например от деловых способностей игроков. Иначе говоря, в конструкции Н—М-решения не заложено решение вопроса о том, какие выигрыши получают игроки в конце игры.

Во многих практически важных случаях игру желательно характеризовать реализующимся по окончании ее дележом. Такой дележ может быть «предсказан», если известно правило, определяющее рациональные (устойчивые, равно приемлемые для всех игроков) дележи, правило, которое игроки вырабатывают до момента, когда они оценят свои возможности в игре. Можно заметить, что уже само определение дележей из всех возможных выигрышей выделяет такие, которые обладают определенной рациональностью. Более узким, чем множество дележей  $E(v)$ , является множество  $C(v) \subseteq E(v)$ , состоящее из всех недоминируемых дележей. Очевидно, что дележи из множества  $C(v)$  можно рассматривать как рациональные, а с помощью какого-нибудь произвольного дополнительного правила — устанавливать единственный дележ  $\sigma \in C(v)$ . Поскольку множество  $C(v)$  может быть пустым, возникает задача конструирования правил, по которым для любой игры можно определить единственный дележ, являющийся рациональным.

Ниже рассмотрим одно такое правило, в котором существенно используется понятие  $c$ -ядра. Это правило естественно рассматривать как определение решения игры.

Введем множество векторов

$$Z(v) = \left\{ z / \sum_{i \in S} z_i \geq v(S), \quad \forall S \in \Gamma, \quad \forall z \in Z(v) \right\}.$$

Множество является выпуклым, оно не пусто. Кроме того,  $E(v) \cap Z(v) = C(v)$ .

Рассмотрим задачу: минимизировать

$$f(x, z) = \sum_{i=1}^n (z_i - x_i)^2 \quad (3)$$

при ограничениях

$$x \in E(v); \quad z \in Z(v). \quad (4)$$

Эта задача может быть интерпретирована как задача нахождения минимального расстояния между выпуклыми множествами  $E(v)$ ,  $Z(v)$ . Очевидно, множество  $Y$  решений этой задачи всегда не пусто: если  $E(v) \cap Z(v) \neq \emptyset$ , то  $f(x, z) = 0$ ; если  $E(v) \cap Z \times \times(v) = \emptyset$ , то  $f(x, z) > 0$ . Множество  $C^*(v)$  дележей назовем  $c^*$ -ядром игры, если  $C^*(v) = \{x^0/(x^0, z^0) \in Y\}$ . Очевидно, если  $E(v) \cap Z(v) \neq \emptyset$ , то  $C^*(v) = E(v) \cap Z(v) = C(v)$ . Введем в рассмотрение функцию  $g(x, z) = \sum_{i=1}^n |z_i - x_i|$ . Нетрудно видеть, что данная функция монотонно связана с функцией  $f(x, z)$ . Поэтому, если в задаче (3), (4) целевую функцию  $f(x, z)$  заменить на функцию  $g(x, z)$ , множество решений этой задачи не изменится. Полученную таким образом новую задачу можно свести к задаче линейного программирования следующего вида: минимизировать  $\sum_{i=1}^n \zeta_i$  при ограничениях  $\zeta_i \geq z_i - x_i$ ;  $\zeta_i \geq x_i - z_i$ ;  $i = 1, \dots, n$  и ограничениях (4). Поскольку целевая функция  $\sum_{i=1}^n \zeta_i$  минимизируется, то, очевидно,

$$\zeta_i^0 = |z_i^0 - x_i^0|; \quad i = 1, \dots, n; \quad \forall (x^0, z^0) \in Y.$$

Учитывая, что множество решений задачи линейного программирования является выпуклым, а проекция множества, определенного в  $l$ -мерном евклидовом пространстве, на любое  $m$ -мерное евклидово пространство ( $m \leq l$ ) также выпуклое множество, мы приходим к выводу, что множество  $c^*(v)$  является выпуклым. Дележи, образующие  $c^*$ -ядро, можно считать рациональными: дележи из множества  $C(v)$  идеально удовлетворяют игрокам. Если ни один из таких дележей не реализуем, то игроки соглашаются на дележи, минимально отличающиеся от дележей из множества  $C(v)$ . В качестве дележа  $\sigma$ , образующегося в конце игры, можно выбрать центр тяжести фигуры, образованной множеством  $C^*(v)$ . Поскольку эта фигура целиком лежит в гиперплоскости, описываемой уравнением (1), то  $\sigma \in C^*(v)$ .

Список литературы: 1. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., «Наука», 1970. 707 с. 2. Оуэн Г. Теория игр. М., «Мир», 1971. 221 с.

УДК 621.391

В. Л. ЛИСИЦКИЙ, канд. техн. наук

#### ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

Оценка выживаемости сложных систем, функционирующих в условиях вредных воздействий агрессивной внешней среды [1], — актуальная проблема, имеющая важное прикладное зна-

чение. Отсутствие информации о поведении среды заставляет систему ориентироваться на наиболее неблагоприятные условия. Последнее, как правило, приводит к теоретико-игровой постановке задачи оценки выживаемости сложных систем в конфликтной ситуации среда — система.

Рассмотрим взаимодействие системы  $A$ , состоящей из  $n$  подсистем  $A_j$ , с агрессивной средой  $B$ . Подсистема  $A_j$  характеризуется ценностью  $G_j$ . Параметр  $G = \sum_{j=1}^n G_j$  определяет ее суммарную ценность. К началу взаимодействия среда  $B$  обладает ресурсом  $M$ , полностью расходуемым в конфликте. Среда, распределяя ресурс  $M$  между  $A_j$ , вызывает «гибель» отдельных подсистем. Выход из строя  $j$ -й подсистемы соответствует потере ценности  $G_j$ . Считается, что система «погибает», если сумма потерянных ценностей превышает величину  $(1 - \theta)G$ ,  $\theta \leq 1$ . Коэффициент  $\theta$  определяет уровень живучести системы. Для нейтрализации вредных воздействий среды  $B$  система распределяет между подсистемами ограниченный «защитный» ресурс  $E$ , увеличивая расходы среды, которые необходимы для уничтожения отдельных подсистем. Подсистема  $A_j$  с уровнем  $x_j$  защитного ресурса требует для ее уничтожения  $M_j$  ресурса среды. Считается, что среда полностью информирована о распределении ресурса  $E$  и ей известны ценности подсистем. В ряде случаев зависимость  $M_j(x_j)$  носит нелинейный характер и может быть аппроксимирована экспоненциальной зависимостью  $M_j(x_j) = G_j \exp(\alpha_j x_j)$ , в которой  $G_j$  — объем ресурса среды, необходимый для уничтожения  $A$  при отсутствии защитного ресурса в подсистеме;  $\alpha_j$  — «эффективность» использования единицы ресурса  $E$  в  $A$ . Так как для «гибели» системы  $A$  достаточно выполнения условия

$$\Delta G \geq (1 - \theta)G, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (1)$$

где  $\Delta G$  — ценность подсистем  $A_j$ , вышедших из строя в результате воздействий среды, то множество

$$D = \left\{ D_k = \{A_j\}: \sum_{A_j \in D_k} G_j \geq (1 - \theta)G \right\} \quad (2)$$

определяет все наборы подсистем  $A$ , которые могут быть выбраны средой для достижения условий (1). Множество  $D$  конечно и определяет все возможные поведения среды в конфликте. Назовем его обобщенной системой  $D$ , считая, что гибель системы  $A$  эквивалентна «гибели» системы  $D$ . Последнее позволяет формализовать описание модели конфликтной ситуации.

Пусть при взаимодействии с  $A$  среда стремится достичь условий (1) минимальным расходом ресурса  $M$ . Минимизация  $M$  осуществляется выбором соответствующей подсистемы  $D_k \in D$ ;

$$M = \min_{\forall \in Z} \{M^1(x^1), \dots, M^l(x^l)\}; \quad Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_l\};$$

$$M^k(x^k) = \sum_{A_j \in D_k} C_j \exp[\alpha_j x_j], \quad (3)$$

где  $x^k = \{x_j : A_j \in D_k\}$ ,  $\gamma$  — число подсистем системы  $D$ ;  $Z_k$  — поведение среды, соответствующее выбору для уничтожения подсистем  $A_j \in D_k$ .

Система  $A$  распределением ограниченного ресурса  $E$  между  $A_j$  стремится максимизировать начальный запас ресурса  $M$ , необходимый для достижения условий (1). Рассматриваемой конфликтной ситуации соответствует игра

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \max_{x \in X} \min_{y \in Z} M(x, Y) = \min \max M(x, y); \\ M(x, Y) &= \{M^1(x^1), M^2(x^2), \dots, M^l(x^l)\}; \\ X &= \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{j=1}^n x_j = E, x_j \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $x$  — вектор, определяющий распределение  $E$  между  $A_j$ ;  $\rho(E)$  — цена игры. Игра (4) является математической моделью конфликтной ситуации среда — система, на основании которой можно оценить выживание системы в конфликте. Если  $M_B$  — минимальный объем ресурса, необходимый для уничтожения системы, то отношение  $\delta = M_B/M$ , где  $M$  — ресурс, имеющийся в распоряжении среды, характеризует «запас прочности» системы в конфликте, степень ее неуязвимости. Величину  $\delta$  обычно называют коэффициентом неуязвимости системы [2]. Оценка выживания  $A$  состоит в определении существования поведений среды, приводящих к гибели системы. Такие поведения существуют, если  $\delta \leq 1$ . При  $\delta > 1$  система выживает. Следовательно, решение задачи оценки выживания  $A$  эквивалентно определению  $\delta$ . Если  $E$  — уровень ресурса системы,  $\rho(E)$  — цена игры (4), то минимальный уровень ресурса среды, требуемый для уничтожения  $A$  при оптимальном распределении  $E$  между  $A_j$ , совпадает с  $\rho(E)$ . Поэтому  $\delta = \frac{\rho(E)}{M}$  и для оценки выживаемости системы достаточно определить цену игры (4).

Список литературы: 1. Крапивин В. Ф. Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. М., «Сов. радио» 1972. 192 с.  
2. Флейшман Б. С. Элементы теории потенциальной эффективности сложных систем. М., «Сов. радио», 1971. 224 с.



**О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ ПРИ  
СТРУКТУРНОМ АНАЛИЗЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

Важный этап при разработке автоматизированной системы управления сложными объектами, в частности технологическими процессами, — структурный анализ объекта управления в целях выявления всех связей между его элементами и параметрами, а также степени связанности между ними, что особенно существенно при анализе сложных (больших) систем, т. е. в случае, когда число связей велико. Проведение структурного анализа системы на основе ознакомления с ее качественной и количественной моделями позволяет осуществить декомпозицию системы, что в свою очередь дает возможность разработать иерархическую систему управления с координацией между уровнями.

Если для простых систем их структура и взаимосвязи между элементами выявляются довольно легко, то в сложных системах эту задачу невозможно решить без использования специальных математических методов, одним из которых является теория графов. Представив сложную систему в виде графа, можно провести ее структурный анализ путем анализа характеристик связности графа. При этом возможности декомпозиции оказываются связанными с этими характеристиками графа [1].

Предположим, что структуру некоторой системы описывает граф  $G = (X, U)$ , где  $X$  — множество вершин;  $U$  — множество дуг графа. Введем понятия слабой и сильной связности составляющих графа. Будем говорить, что вершины  $x_i \in X$ ,  $x_j \in X$  графа  $G$  являются слабо связными ( $s$ -связными), если в графе  $G$  существует путь между  $x_i$  и  $x_j$  или  $x_i = x_j$ . Если же существует контур, проходящий через вершины  $x_i$ ,  $x_j$  графа  $G$ , или  $x_i = x_j$ , то эти вершины назовем сильно связными ( $f$ -связными). Соответствующие бинарные отношения  $R_s$ ,  $R_f$  обладают свойствами эквивалентности (рефлексивность, транзитивность, симметрия). Каждое из них делит множество вершин  $X$  на классы эквивалентности, называемые соответственно слабо связными и сильно связными составляющими графа  $G$ . Подграфы графа  $G$ , соответствующие этим составляющим, назовем соответственно слабо связными и сильно связными подграфами графа  $G$ .

При структурном анализе можно воспользоваться двумя способами декомпозиции системы. *Первый способ* сводится к разделению системы на подсистемы, воедино связанные в параллельный ряд, что декомпозирует управление на последовательные и параллельные фазы. При этом граф структуры системы разбивается на слабо связные подграфы, причем в каждом подграфе выде-

ляется ранговая структура, в которой на различных уровнях находятся различные  $f$ -связные составляющие.

Для построения ранговой структуры графа  $G = (X, U)$  удобно воспользоваться алгоритмом Варфильда [2].

1. Строим матрицу смежности вершин  $M$  графа  $G$ .

2. Определяем матрицу  $\hat{M} = M^n \cup M^{n-1} \cup \dots \cup M \cup I = (M \cup I)^n$ , где  $n$  — количество элементов множества  $X$  ( $n = |X|$ );  $I$  — единичная матрица.

При возведении матрицы в степень ее элементы, отличные от нуля, в данном случае заменяются единицами.

3. По матрице  $\hat{M}$  строим иерархическую структуру, начиная снизу, с одновременным определением всех  $f$ -связных составляющих и их рангов. Составляющая  $C_{fi} \subseteq X$  является  $f$ -связной составляющей, если для любого  $x \in C_{fi}$  выполняется условие  $S(x) \cap P(x) = C_{fi}$ , где  $S(x)$  — группа всех вершин, достижимых из вершины  $x$  в графе  $\hat{G} = (X, \hat{U})$ , являющемся рефлексивно-транзитивным замыканием графа  $G$  (структуру графа  $\hat{G}$  отображает матрица  $\hat{M}$ );  $P(x)$  — группа всех вершин, предшествующих вершине  $x$  в графе  $\hat{G}$ . Если при этом  $S(x) \cap P(x) = P(x) = C_{fi}$ , то  $f$ -связная составляющая  $C_{fi}$  является составляющей нулевого ранга. Составляющая  $C_{fi}$  является  $f$ -связной составляющей первого ранга, если для любого  $x \in C_{fi}$  выполняется соотношение  $S_1(x) \cap P_1(x) = P_1(x) = C_{fi}$ , где  $S_1(x)$  — группа всех вершин, достижимых из вершины  $x$  в подграфе  $\hat{G}_1$ , получаемом из графа  $\hat{G}$  исключением составляющих нулевого ранга;  $P_1(x)$  — группа всех вершин, предшествующих вершине  $x$  в подграфе  $\hat{G}_1$ .

Аналогично определяем  $f$ -связные составляющие более высоких порядков. В результате исходный граф можно представить в виде графа с иерархической структурой, в котором на каждом уровне находятся вершины одного и того же ранга, причем траектория между уровнями имеет одно направление — по возрастанию рангов. При построении иерархической структуры удобно воспользоваться сокращенным графом, получаемым из исходного графа заменой каждой из его  $f$ -связных составляющих одной вершиной [1].

Если граф  $G = (X, U)$  не является  $s$ -связным, то ранговую структуру можно строить не для всего графа  $G$ , а последовательно для каждого из его  $s$ -связных подграфов. Считая граф  $G$  неориентированным, для выделения  $s$ -связных составляющих можно воспользоваться тем же алгоритмом Варфильда или алгоритмом Стюарда [3]. Выделяемые  $f$ -связные составляющие полученного графа будут  $s$ -связными составляющими исходного графа.

Второй способ разбиения системы на взаимосоединенные подсистемы приводит к декомпозиции управления на частично координированные управления. При этом в графе учитываются только слабые связи. Рассмотрим этот способ, введя предварительно ряд понятий.

Пусть  $G = (X, U)$  —  $s$ -связный граф (или  $s$ -связный подграф несвязного графа). Группа вершин  $C$  называется группой сочленения, если подграф, получаемый из графа  $G$  исключением из него вершин группы  $C$  и инцидентных им дуг, не является  $s$ -связным. Если  $|C| = 1$ , то  $C$  — точка сочленения [1].

Многообразным отображением  $\Gamma$  множества  $X$  в множество  $Y$  называется закон, по которому каждому элементу  $x \in X$  ставится в соответствие некоторое подмножество  $\Gamma x \subseteq Y$ , причем не исключается возможность того, что  $\Gamma x = \emptyset$ , где  $\emptyset$  — пустое множество [4].

Образом множества  $A \subseteq X$  называется множество  $\Gamma A = \bigcup_{x \in A} \Gamma x$ .

Так как множество дуг  $U$  вполне определяет отображение  $\Gamma$  графа, а отображение  $\Gamma$  определяет множество  $U$ , то граф можно записывать и в виде  $G = (X, \Gamma)$ . Пусть этот граф —  $s$ -связный, а  $A_i \subseteq X$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) — подгруппы вершин такие, что

$$\Gamma A_i \cap A_j = \emptyset; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Предположим также, что  $X_1, X_2, \dots, X_k, C$  — подмножества множества вершин  $X$  такие, что

$$\left( \bigcup_{i=1}^k X_i \right) \cup C = X; \quad X_i \supseteq A_i; \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

$$\Gamma X_i \cap X_j = \emptyset; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, k; \quad |C| = \min.$$

В этом случае множество  $C$  называется минимальной группой сочленения подгрупп вершин  $A_1, A_2, \dots, A_k$  графа  $G$ . Если граф  $G$  несвязный, то его минимальная группа сочленения — пустое множество.

Суть второго метода декомпозиции заключается в выделении минимальных групп сочленения и построении древовидного графа, который будет отображать структуру исходного графа. В нем взаимная связь между отдельными множествами вершин осуществляется через минимальные группы сочленения.

В работе [1] предлагается методика определения минимальных групп сочленения, основанная на теореме Форда — Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе, а также на алгоритме Форда — Фалкерсона [5].

Приведенные методы структурного анализа сложных систем могут быть с успехом использованы при синтезе иерархической системы управления сложным объектом.

Список литературы: 1. *Richetin M.* Analyse structurale des systemes complexes en vue d'une commande hiérarchisée. Thèse de Doctorat d'Etat. Toulouse, 1975. 183 p. 2. *Warfield J. N.* Binary matrices in system modeling.— «IEEE Trans. on Syst. Man., Cybern.», 1974, vol. SMC, № 5, p. 21—26. 3. *Steward D. V.* Partitioning and tearing systems of equations.— «J. SIAM Numer. Anal.», ser. B, 1965, vol. 2, № 2, p. 33—40. 4. *Берж К.* Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962. 320 с. 5. *Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.* Потоки в сетях. М., «Мир», 1966. 276 с.

УДК 001.89

В. Л. ЛИСИЦКИЙ, канд. техн. наук,  
И. П. ГАМАЮН

### ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Процесс создания сложного технического устройства состоит из отдельных этапов (номенклатура которых известна), выполняемых в строго заданной последовательности непрерывно один за другим. Этот процесс представим в виде ориентированного графа  $(V, A, \Delta)$ , где  $V$  — множество вершин;  $A$  — множество направленных ребер;  $\Delta$  — отображение множества  $A$  на  $V \times V$  [1]. Элементы  $v_i \in V (i \in \bar{1}, l)$  — вершины, соответствующие событию завершения работы по  $i$ -му этапу, а также в силу непрерывности следования этапов — событию начала работы по  $(i+1)$ -му этапу. Ребро  $a_i \in A$  соответствует ходу выполнения  $i$ -го этапа, причем  $\Delta(a_i) = (v_i, v_{i+1})$ . Вершина  $v_0 \in V$  соответствует событию начала выполнения первого этапа и, следовательно, всего комплекса этапов при создании технического устройства. Вершины  $v_l \in V$  характеризуют завершение последнего этапа и, таким образом, отражает конечную цель — создание технического устройства.

На производственном объекте, как правило, работы ведутся на ряде технических устройств, разработки которых технологически не связаны друг с другом. Поэтому можно говорить о множестве не связанных друг с другом ориентированных графов  $(V_j, A_j, \Delta_j) (j \in \bar{1}, J)$ , каждый из которых является элементом программы производственного объекта. В этом случае между различными элементами программы имеется лишь взаимосвязь по используемым ресурсам. В статье рассматривается один вид ресурсов — трудовые. Предполагается, что уровень ресурса производственного объекта, выполняющего программу по созданию технических устройств; на некотором интервале планирования  $[0, T]$  известен и равен  $R$ . Известными считаются также нормативы трудовых затрат на каждом этапе элементов программы  $a_{ij} — S_{ij}$ .

Длительность выполнения этапов  $a_{ij}$  зависит от количества выделяемых для этой цели ресурсов. Предполагается, что количество ресурса, выделяемого для выполнения этапа  $a_{ij}$ , в каж-

дый момент времени является величиной постоянной и равно  $r_{ij}$ . Поэтому функцию использования ресурса на этапе  $a_{ij}$  можно представить следующим образом:

$$r_{ij}(t+0) = \begin{cases} \equiv 0 & \text{при } t_{i-1j} > t; \\ r_{ij} & \text{при } t_{i-1j} \leq t \leq t_{ij}; \\ \equiv 0 & \text{при } t > t_{ij}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $t_{i-1j}$  — момент времени, соответствующий событию  $v_{i-1j}$ ;  $t_{ij}$  — момент времени, соответствующий событию  $v_{ij}$ . Очевидно, что длительность выполнения этапа  $a_{ij}$  равна

$$\tau_{ij} = t_{ij} - t_{i-1j}. \quad (2)$$

Суммарное количество ресурсо-часов, израсходованное на выполнение этапа  $a_{ij}$ , должно равняться соответствующей норме  $S_{ij}$  ресурсо-часов, необходимой для выполнения этого этапа. Поэтому

$$\tau_{ij} r_{ij} = S_{ij}. \quad (3)$$

Пусть  $T_j (j \in \overline{1, J})$  — момент наступления события  $v_{1j}$ , т. е. это момент завершения создания производственным объектом  $j$ -го технического устройства. Событию  $v_{0j}$  соответствует некоторый момент времени  $T_0$ , который в дальнейшем полагаем равным нулю. Поэтому  $T_j (j \in \overline{1, J})$  определяет длительность разработки  $j$ -го технического устройства. Длительность выполнения  $i$ -го этапа  $j$ -го элемента программы (2) представима в виде линейной зависимости от  $T_j$ :

$$\tau_{ij} = \mu_{ij} T_j, \quad i \in \overline{1, I}, \quad (4)$$

где

$$\sum_{i=1}^I \mu_{ij} = 1, \quad j \in \overline{1, J}. \quad (5)$$

С учетом (3), (4) функция использования ресурса (1) на этапе  $a_{ij}$  принимает вид

$$r_{ij}(t+0) = \begin{cases} \equiv 0 & \text{при } t_{i-1j} > t; \\ \frac{S_{ij}}{\mu_{ij} T_j} & \text{при } t_{i-1j} \leq t \leq t_{ij}; \\ \equiv 0 & \text{при } t > t_{ij}. \end{cases} \quad (6)$$

Для перевода программы производственного объекта в план необходимо принять решение о моментах времени завершения отдельных этапов  $a_{ij}$  ( $i \in \overline{1, I}$ ;  $j \in \overline{1, J}$ ). Принимаемые решения должны удовлетворять ограничениям, часть которых на вербальном уровне сформулированы в работе [2]. Это ограничения на последовательность выполнения этапов  $a_{ij}$  каждого элемента программы; ограничения на номенклатуру выполняемых в плановом периоде  $[0, T]$  этапов по каждому элементу программы;

ограничения (3), обуславливающие полное завершение каждого этапа  $a_{ij}$  из числа принятых к выполнению в плановом периоде  $[0, T]$ . Ограничения

$$\sum_{j=1}^J \frac{S_{vij}}{\mu_{vij} T_j} \leq R, \quad v_j \in \overline{1, T} \quad (7)$$

характеризуют, что в каждый момент времени уровень используемого ресурса на производственном объекте не должен превосходить имеющийся уровень  $R$ . Количество соотношений в (7) определяется последовательностью выполнения этапов  $a_{ij}$  и не превосходит  $I \times J$ .

При наличии технологических ограничений на минимально возможную длительность  $\tau_{ij}^0$  этапа  $a_{ij}$  к перечисленным ограничениям добавляются ограничения вида

$$\mu_{ij} T_j \geq \tau_{ij}^0, \quad i \in \overline{1, I}, \quad j \in \overline{1, J}. \quad (8)$$

Под планом  $\pi$  реализации программы производственного объекта понимается упорядоченный набор  $\{T_j; T_j \geq 0; \mu_{ij}; i \in \overline{1, I}; j \in \overline{1, J}\}$  моментов времени завершения этапов  $a_{ij}$ , удовлетворяющих условиям (3), ограничениям (5), (7), (8).

В случае, когда элементы программы некоторым образом ранжированы, это можно учесть введением положительных коэффициентов  $\alpha_j$ , учитывающих относительную важность  $j$ -го элемента программы. Как правило,  $\sum_{j=1}^J \alpha_j = 1$ . Если цель исследования — минимизация времени выполнения программы, в качестве целевой функции выбирают [2]  $L = \sum_{j=1}^J \alpha_j T_j$ . Тогда оптимальный план реализации программы производственного объекта может быть найден в результате решения следующей задачи:

$$l = l(\pi) \rightarrow \min; \quad \pi \in D_\pi, \quad (9)$$

где  $D_\pi$  — множество возможных планов. Задача (9) представляет собой задачу нелинейного программирования с ограничениями, образующими выпуклую область, и линейной целевой функцией. Это позволяет утверждать [3], что искомым минимум является глобальным.

Список литературы: 1. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., «Наука», 1974. 366 с. 2. Глушков В. М. Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС. М., «Статистика», 1975. 160 с. 3. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. М., «Сов. радио», 1973. 311 с.

А. В. ДАБАГЯН, д-р техн. наук,  
В. Г. БАЖЕНОВ, канд. техн. наук,  
И. Ю. АЛЕКСЕЕВ

### СИСТЕМА ИНФОРМАЦИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТИПА «БАНК ДАННЫХ» ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ БОЛЬШИХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Оптимальное проектирование любого изделия массового производства требует согласования ряда технико-экономических задач, связанных с оценкой качества проектируемого изделия. В этой связи наиболее важная проблема — точное определение экономической эффективности принятого технического решения при условии выполнения всех народнохозяйственных заявок, обслуживание которых возлагается на проектируемые изделия.

Формализованное решение поставленной задачи предполагает выполнение следующих условий.

1. Формализованный критерий качества содержит основной параметр — технико-экономическую эффективность изделия.

2. В математическую модель в качестве ограничений введено условие полного обслуживания заявок, предъявляемых со стороны народного хозяйства.

3. Математическая модель проектируемого объекта определена в виде некоторой функциональной связи, объединяющей технические параметры проектируемого изделия с технологией его производства и эксплуатации.

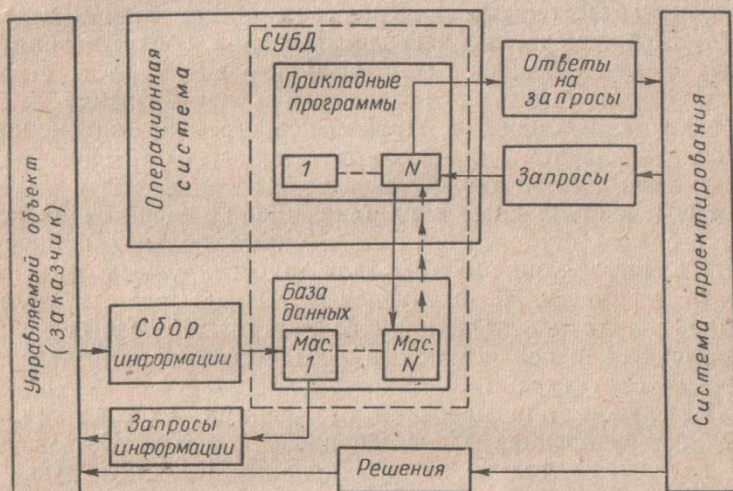
Спроектированное таким образом изделие должно также обобщать весь национальный опыт в проектировании изделий, однотипных рассматриваемому, и по возможности содержать сведения об опыте зарубежных фирм.

В связи с этим одним из авторов [1—4] предложена система проектирования, которая в достаточной мере удовлетворяет всем перечисленным требованиям. Приведем ее основные особенности: а) отдельное изделие может быть оптимальным только тогда, когда оно удовлетворяет всем перечисленным выше условиям (при этом, как правило, оптимальному решению соответствует некий типоразмерный ряд); б) каждый оптимальный типоразмер, являющийся составной частью типоразмерного ряда в свою очередь должен удовлетворять тем же условиям, которым должен удовлетворять и типоразмерный ряд (отличие заключается только в ограничениях — каждому типоразмеру отводится часть заявок, подлежащих обслуживанию).

Для получения оптимального решения предложена методика построения систем стоимостных характеристик разного типа [1—4]: стоимостных характеристик элементов, из которых формируется изделие; оптимальных стоимостных характеристик,

определяющих вектор качества проектируемого изделия; интегральных характеристик, необходимых для построения типоразмерных рядов, а также целая система программ, предназначенных для построения оптимального типоразмерного ряда и отдельных его элементов.

Для организации эффективного оптимального проектирования больших систем обслуживания необходимо рационально организовать исходную статистическую информацию. Методы организации массивов для каждой задачи в отдельности неприемлемы, так как в этом случае неизбежны частая реорганизация файлов и программ, отсутствие динамических связей между



элементами данных, дублирование информации, невозможность диалога пользователей с хранимой на запоминающих устройствах информационной совокупностью. Более эффективный уровень организации информации — представление ее в виде банка данных (БД), который является комплексом массивов данных и программ, предназначенных непосредственно для организации централизованного хранения и поиска информации, а также для связи с прикладными программами, выполняющими ее обработку. В общем случае БД состоит из базы данных, системы программного обеспечения, системы технического обеспечения, системы управления базой данных (СУБД).

В системе, основанной на БД, прикладные программы обращаются за данными для обработки не к внешним носителям, а к программам банка, составляющим СУБД, которая организует поиск, ввод и представление информации соответствующим программам из специально организованных массивов — базы данных (рисунки). Основная функция БД — поддержание в си-



стеме динамической информационной модели сложного исследуемого объекта и обеспечение доступа к этой информации со стороны пользователей. Исходя из данного определения БД можно сделать вывод, что именно БД является той организацией информационного обеспечения, которая удовлетворит все требования при рациональном проектировании больших систем обслуживания. БД состоит из двух подсистем. Первая предназначена для сбора, хранения, обработки и корректировки фактологического материала (база данных), вторая — для хранения серии производственных алгоритмов функционирования информационной системы, которая управляется единой программой-монитором (СУБД), обеспечивающей автоматическое использование всего материала для построения параметров изделий разного типоразмера, предназначенных для обслуживания отдельных пакетов заявок. При этом необходимо так строить банк, чтобы он был универсален для проектирования любого типа изделий. Отличие в процессе построений оптимальных решений заключается лишь в соответствующих фактологических данных, хранимых в первой подсистеме банка. База данных должна содержать данные и их описание, хранящиеся на носителях, т. е. весь портфель заявок. Данные должны полностью описывать информационную модель проектируемых объектов. Основная их часть, используемая во время работы, должна храниться на устройствах прямого доступа. Исходные данные в базе данных располагаются в соответствии с определенной логической структурой.

СУБД служит для описания баз данных, их создания, обновления, расширения, для выборки из данных. Создаваемая СУБД должна не только модифицировать существующую базу данных, но и включать в нее данные с существенно отличной от уже хранящихся данных структурой, должна предоставлять универсальные и удобные средства доступа к ним.

Список литературы: 1. *Дабаян А. В., Голоскоков А. Е., Умерова Н. Л.* Об одном методе построения оптимального типажа. — *Тр. Новосибир. науч.-техн. семинара «Оптимизационные технические системы»*. 1976, с. 29—31. 2. *Дабаян А. В., Годлевский М. Д., Голоскоков А. Е.* Методика оптимального проектирования больших систем обслуживания. — *Тр. VII Всесоюз. совещ. по проблемам управления*. Минск, 1977, с. 43—46. 3. *Дабаян А. В., Годлевский М. Д.* Иерархический метод оптимизации сложных систем. — *Тр. Новосибир. науч.-техн. семинара «Оптимизационные технические системы»*. 1976, с. 52. 4. *Дабаян А. В., Годлевский М. Д., Пинаев Е. Г.* Оптимизация перспективного парка самолетов ГА. — *Труды ГосНИИГА ЦНТИ «Исследование больших систем ГА»*. 1976, № 140, с. 69—75. 5. Информационные системы общего назначения. Аналитический обзор систем управления базами данных. Пер. с англ. Под ред. Е. Л. Ющенко, М., «Статистика», 1975. 472 с.

### ОБ ОДНОЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ

Анализ работы автоматических линий (АЛ), работающих в режиме смены отказавших элементов, показывает, что экономически обоснованная величина запасных элементов существенно влияет на эффективность функционирования таких систем. В качестве оценки эффективности примем приведенные затраты. Этот критерий характеризует, с одной стороны, потери от дефицита запасных элементов, с другой — объем капиталовложений на приобретение запасных элементов. Минимизация приведенных затрат приводит к экономически обоснованной величине запасных элементов и определяет следующую математическую модель:

$$F(y) = \alpha_1 \sum_{j=1}^m c_j y_j + \sum_{j=1}^m b_j y_j + \alpha_2 [1 - P(x \leq y)] \Phi_g \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^m c_j y_j \leq l; \quad (1) \quad [1 - P(x \leq y)] \Phi_g \leq T_{\text{пр}}; \quad (2)$$

$$0 < y_j < d_j, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (3) \quad y_j \in N, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Здесь  $\alpha_1$  — нормативный коэффициент, включающий в себя также затраты на транспортировку и монтаж запасных элементов;  $y_j$  — число запасных элементов  $j$ -го типа;  $c_j$  — стоимость одного элемента  $j$ -го типа;  $b_j$  — затраты на содержание одного элемента  $j$ -го типа;  $\alpha_2$  — потери от часа простоя АЛ;  $\Phi_g$  — годовой действительный фонд времени работы оборудования;  $T_{\text{пр}}$  — среднее время простоя АЛ;  $P(x \leq y)$  — вероятность того, что на заданном интервале времени количество отказов будет не больше, чем количество запасных элементов для каждого типа элемента.

Ограничение (1) является естественным, так как первоначальные затраты на приобретение запасных элементов всегда ограничены сверху. Соотношение (2) ограничивает простои АЛ вследствие дефицита. Перепишем его в виде  $P(x \leq y) \geq A$ , где  $A = 1 - T_{\text{пр}}/\Phi_g$ . Отсюда видно, что (2) фактически выражает требование того, чтобы надежность АЛ в смысле вероятности безотказной работы была больше заданной. Природа ограничений (3) может быть различной. Так, в частности, некоторые типы элементов могут быть лимитированы вышестоящими планирующими организациями. Ограничение (4) характеризует целочисленность сформулированной задачи. Таким образом, мы видим, что задача определения экономически обоснованного числа запасных элементов для обеспечения заданной надежности функционирования АЛ приводит к решению задачи нелинейного

целочисленного программирования. При этом в общем случае нелинейными являются целевая функция и ограничения типа (2).

Проанализируем целевую функцию  $F(y)$ . Две ее компоненты линейны. Составляющая  $P(x \leq y)$  характеризует функцию распределения числа отказов и, в общем случае, не выпукла. Для малых участков времени функция  $F(y)$  практически не отличается от своей линейной части, так как  $P(x \leq y)$  мало отличается от нуля. Поэтому  $F(y)$  в этой области возрастает, а по мере роста  $P(x \leq y)$  — убывает. Вводя ограничения (2), область определения функции  $F(y)$  можно уменьшить настолько, чтобы  $F(y)$  стала выпуклой.

Для решения сформулированной задачи предлагается следующий алгоритм:

а) для каждой координаты вычисляются приращения  $\Delta F_j = F(y_1, y_2, \dots, y_j + 1, \dots, y_m) - F(y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m)$ ; б) если для  $j$ -й координаты приращение последней на единицу ведет к нарушению ограничений (1), (3), то для этой координаты приращение  $\Delta F_j$  принимается равным нулю; в) определяется  $j$ -я координата, для которой функция  $F(y)$  убывает быстрее, т. е. координата, для которой  $\Delta F_j$  минимальна; г) если  $\Delta F_{j_0} \geq 0$  и выполняются ограничения (1) — (4), то найденная точка является оптимальной; д) если  $\Delta F_{j_0} < 0$ , то переходим к следующей точке по формуле

$$y_j^{(k+1)} = \begin{cases} y_j^{(k)} + 1 & \text{при } j = j_0; \\ y_j^{(k)} & \text{при } j \neq j_0; \end{cases}$$

е) возврат к пункту а).

При увеличении числа переменных минимизация функции  $F(y)$  может привести к определенным вычислительным трудностям. В ряде случаев последние можно избежать. Учитывая, что нормы запасных элементов в условиях одного предприятия по предложенной методике рассчитываются неоднократно (предполагается устойчивая статистическая информация об отказах), математическую модель можно упростить. Для этого достаточно ограничиться лишь линейными составляющими целевой функции  $F^*(y) = a_1 \sum_{j=1}^m c_j y_j + \sum_{j=1}^m b_j y_j \rightarrow \min$  при ограничениях (1) — (4).

Минимизируя функцию  $F^*(y)$  при различных значениях величины  $T_{\text{пр}}$  ограничения (2), добиваемся выполнения условия

$$\min F(y) = \min F^*(y). \quad (5)$$

Следовательно, величину  $T_{\text{пр}}$ , удовлетворяющую условию (5), можно принять за норму простоя. Последняя обеспечивает заданную надежность при минимальных затратах. Задачу же отыскания  $\min F^*(y)$  можно свести к итеративному алгоритму решения последовательности задач линейного целочисленного программирования.

**ПОСТРОЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
ПЛАНИРОВАНИЯ**

В сфере управления общественным производством большое внимание уделяется разработке методов оптимального планирования. Планирование обычно производится в условиях, когда параметры показателя качества и ограничений могут оказаться случайными или неопределенными. Так, в одном случае статистика позволяет установить числовые характеристики случайных величин или законы распределения с известными параметрами, в другом — известны только области существования параметров модели. Следовательно, задача планирования является стохастической задачей.

В статье, носящей описательный характер, рассматривается построение одноэтапной стохастической модели планирования. При этом используется подход, предложенный в работах [1—3].

Построение стохастической модели разбивается на несколько этапов. На первом этапе строится детерминированная модель и исследуется ее адекватность реальному процессу. На следующем этапе определяются параметры модели, носящие случайный характер. В этом случае необходимо выяснить информацию о параметрах. В зависимости от нее могут иметь место следующие случаи [2].

1. Значение параметра  $A$  в модели заранее не определено. В этом случае возможны два подхода: усреднение по  $A$ , если имеется априорная информация о параметре; рассмотрение наилучшего по  $A$  случая.

2. Известен закон распределения или числовые характеристики случайной величины. В этом случае удается построить наиболее полную стохастическую модель и искать решение в виде детерминированного вектора; случайного вектора; вероятностных распределений компонент оптимального плана.

Рассматриваемый подход в работе основывается на предположении о том, что известны законы распределения случайных параметров модели. Часто предполагают, что случайные параметры распределены по нормальному закону. Это предположение не всегда оправдано [1]. Часто физический смысл случайных величин, определяющих целевую функцию или ограничения задачи, заставляет считать их неотрицательными величинами и таким образом исключает допущение об их нормальном распределении. Однако, если случайные параметры даже неотрицательны, они все же могут быть распределены по закону, достаточно близкому к нормальному на отрезке длиной в  $6\sigma$ , так как на их значения обычно влияет множество случайных факторов, не зависящих друг от друга [4]. А как известно, в

пределе закон распределения композиции таких факторов стремится к нормальному закону распределения.

На третьем этапе осуществляем рандомизацию, т. е. переход от детерминированного эквивалента к его стохастическому аналогу. Ее производим по трем признакам [1]: по характеру решений; по выбору показателя качества; по способу расчленения ограничений задачи. Следовательно, для постановки задачи стохастического программирования необходимо определить вид нахождения решения задачи; вид целевой функции; характер ограничений.

При построении модели перспективного планирования обычно предполагается, что решение предшествует наблюдению. В этом случае решение определяется как детерминированный вектор. Решение задачи в виде случайного вектора позволяет установить связь между компонентами оптимального плана и реализациями параметров условий задачи. Каждой реализации условий задачи соответствует реализация решения. Следовательно, решение в виде случайного вектора целесообразно определять тогда, когда решение может быть принято после наблюдения реализаций условий задачи. Это ценно также при создании инструмента, позволяющего исследовать влияние изменения параметров модели на ее решение, поскольку в некоторых случаях можно моделировать наблюдение реализации условий задачи.

В качестве целевой функции обычно используются такие функционалы; как математическое ожидание, дисперсию линейной формы или вероятность превышения линейной формой некоторого фиксированного порога.

В ряде задач более целесообразным способом является максимизация порога  $K$ , который должен быть превышен линейной формой с заданной вероятностью. Действительно, минимизируя дисперсию, мы не определяем целевую функцию. Максимизация математического ожидания целевой функции не гарантирует уменьшения среднеквадратичного отклонения от ее среднего значения. При максимизации же порога  $K$  с заданной вероятностью удается максимизировать математическое ожидание целевой функции и минимизировать ее дисперсию [3]. Условия задачи могут быть записаны в следующем виде [1]:

$$P\{AX \geq B\} \geq \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (1)$$

или

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}X_{ij} \geq b_i\right\} \geq \alpha_i, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Ограничения, записанные в форме (1), позволяют учесть тот факт, что все случайные параметры условий задачи могут быть коррелированы. Однако в этом случае не учитывается сравнительная важность отдельных ограничений. В ограничениях (2) могут быть учтены только стохастические связи слу-

чайных параметров условий задачи, принадлежащих одной строке. Однако это позволяет учесть различную значимость невязок в ограничениях задачи. Ограничения (2) часто используются в задачах транспортного типа,  $\lambda$ -задачах [4]. Далее для исследования стохастического аналога его преобразуют в детерминированный эквивалент.

Таким образом, рассмотрен один из возможных подходов к построению стохастических моделей, который может быть рекомендован для исследования задач планирования.

**Список литературы:** 1. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М., «Сов. радио», 1974. 400 с. 2. Каплинский А. И., Пропой А. И. О стохастическом подходе к задачам нелинейного программирования. — «Автоматика и телемеханика», 1970, № 3, с. 122—134. 3. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. радио», 1966. 524 с. 4. Голоскоков А. Е. Стохастическая постановка распределительной задачи. — «Тезисы докл. Всесоюз. науч. техн. конф. Эффективность и оптимизация систем и процессов гражданской авиации и совершенствование системы комплексного планирования». М., 1977, с. 21.

УДК 656.073

А. Е. ГОЛОСКОКОВ

#### О ДЕКОМПОЗИЦИИ НЕСЕПАРАБЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Широкое распространение при решении задач большой размерности получили методы декомпозиции, использующие механизм цен, принцип распределения ресурсов между отдельными подсистемами [1—2], достаточно хорошо разработанные и обоснованные для задач с сепарабельной целевой функцией. Однако на практике приходится решать несепарабельные задачи.

В статье излагается один из подходов расчленения задачи с несепарабельной целевой функцией, основанный на характерной особенности задачи. Рассмотрим полученную в работе [3] модель распределения самолетов по всей сети авиалиний гражданской авиации в условных обозначениях.

Максимизировать

$$\sum_{ij} f_{ij}(X) + \Phi_1^{-1}(\alpha_0) \left( \sum_{ij} \varphi_{ij}(X) \right)^{1/2} \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

все пассажиры на  $j$ -й авиалинии должны быть перевезены;

$$\sum_{i=1}^m f_i(X) + \Phi_2^{-1}(\alpha_j) \left( \sum_{i=1}^m \varphi_i(X) \right)^{1/2} \leq \bar{\Pi}_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2)$$

пропускная способность к-аэродрома не должна быть нарушена;

$$\sum_{ij} \psi_{ij}(X) + \Phi_3^{-1}(\gamma_k) \left( \sum_{ij} g_{ij}(X) \right)^{1/2} \leq B_k, \quad k = \overline{1, 200}; \quad (3)$$

количество используемых самолетов не должно превосходить число существующих;

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq d_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4)$$

условие неотрицательности

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где  $f_{ij}$ ,  $\varphi_{ij}$ ,  $f_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $\psi_{ij}$ ,  $g_{ij}$  — известные функции модели;  $\Phi_1^{-1}$ ,  $\Phi_2^{-1}$ ,  $\Phi_3^{-1}$  — обратные функции от интеграла вероятностей;  $X_{ij}$  — количество самолетов  $i$ -го типа, назначаемых на  $j$ -ю авиалинию;  $V_k$  — пропускная способность к-аэродрома;  $\overline{P}_j$  — количество пассажиров, подлежащих перевозке на  $j$ -й линии;  $d_i$  — количество самолетов  $i$ -го типа;  $m$ ,  $n$  — соответственно количество типов самолетов и авиалиний.

Анализируя данную модель, можно отметить следующее: модель (1)—(5) относится к классу нелинейных задач большой размерности; ограничения (3)—(4) являются связывающими звеньями, не позволяющими задаче распадаться на ряд простейших подзадач; целевая функция (1) не является сепарабельной.

Рассмотрим применение метода параметрической декомпозиции для расчленения модели (1)—(5) на ряд подзадач меньшей размерности, чем исходная. В задаче (1)—(5) необходимо распределить самолеты по всей сети авиалиний гражданской авиации. Модель, отражающую этот процесс, не удастся расчленить в силу несепарабельности целевой функции. Однако, используя характерную особенность задачи, состоящую в том, что сеть авиалиний можно представить в виде совокупности узлов, удастся построить иную модель, эквивалентную (1)—(5). Таким образом, представляя сеть авиалиний как совокупность узлов, объединяющих ряд авиалиний, исходную задачу рассматриваем как задачу оптимального распределения вектора ресурсов (самолетов) по отдельным подсистемам (узлам). В этом случае можно применить метод параметрической декомпозиции.

Для каждой подсистемы строим математическую модель. Модели объединяются условием связи — ограничением на парк самолетов. В этом случае целевая функция всей задачи представляет собой сумму значений целевых функций подзадач, полученных при их решении. Поскольку решение одной подзадачи влияет на решение других через условие связи, необходимо построить специальную координирующую задачу.

Используя алгоритм построения стохастической задачи [3], представим модель  $k$ -подсистемы в виде

$$F_k = \sum_{ij} f_{ij}^k(X) + \Phi_1^{-1}(\alpha_k) \left( \sum_{ij} \varphi_{ij}^k(X) \right)^{1/2}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i=1}^m f_i(X) + \Phi_2^{-1}(\alpha_j) \left( \sum_{i=1}^m \varphi_i(X) \right)^{1/2} \leq \bar{P}_j, \quad j \in K;$$

$$\sum_{i,j} \psi_{ij}(X) + \Phi_3^{-1}(\gamma_k) \left( \sum_{i,j} g_{ij}(X) \right)^{1/2} \leq B_k;$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq Y_{ik}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

С учетом условия связи координирующую задачу запишем в виде: максимизировать  $\sum_{k=1}^{200} F_k(Y)$  при условии  $\sum_{k=1}^{200} Y_{ik} \leq d_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $Y_{ik} \geq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, 200}$ , где  $Y_{ik}$  — вектор управляющих параметров.

Таким образом, для решения исходной задачи формируется система двухуровневой оптимизации. Алгоритм решения задачи представляет собой итеративный процесс обмена информацией между множеством подзадач, ограничения которых включают управляющие параметры, и координирующей задачей. На первом этапе выбираем вектор управляющих параметров, удовлетворяющий условиям связи, и вводим его в подзадачи. Затем координирующая задача использует решение подзадач для формирования новых  $Y_{ik}$ . Управляющие параметры вновь вводим в подзадачи, и итерационный процесс продолжаем до удовлетворения критерия оптимальности. При этом предполагается, что ресурсы, получаемые каждой подсистемой, используем оптимально.

Таким образом, при помощи предложенного подхода удалось представить задачу в виде, удобном для применения метода параметрической декомпозиции, что существенно упрощает алгоритм ее решения.

Список литературы: 1. Лядон Л. С. Оптимизация больших систем. М., «Наука», 1975. 432 с. 2. Голоскоков А. Е., Емельянов В. И., Гиттик Ю. Л. Об одном подходе к решению распределительной задачи большой размерности. — «Тр. ГосНИИГА. Исследование больших систем ГА», 1977, № 149, с. 63—68. 3. Голоскоков А. Е. Стохастическая постановка распределительной задачи. — Тезисы докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. «Эффективность и оптимизация систем и процессов гражданской авиации и совершенствование системы комплексного планирования». М., 1977, с. 21.



**МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРИ  
ОПТИМИЗАЦИИ КОМПЛЕКСА ТЕХНИЧЕСКИХ  
СРЕДСТВ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ**

Во многих отраслях народного хозяйства среди всех составляющих комплекса технических средств (КТС) можно выделить основной элемент (подсистему). Все остальные подсистемы КТС зависят от него, являясь в той или иной мере обслуживающими устройствами основного элемента. Такая ситуация наиболее характерна для транспорта. Например, в гражданской авиации основной элемент КТС-самолет, обслуживающие устройства: авиационно-технические базы (АТБ), службы управления воздушным движением (УВД), аэродромы (АД), аэровокзалы (АВ). То же можно сказать и для железнодорожного, морского, речного и автомобильного транспорта. Задача основного элемента заключается в обслуживании некоторого перечня заявок (портфеля заявок). В транспортных системах под портфелем заявок понимается множество линий, характеризующихся потоками пассажиров или грузов и протяженностью. Учитывая большую разнородность заявок и широкие пределы изменения их параметров, обычно используем несколько типов основных элементов (параметрический ряд). Параметрический ряд строим на основании портфеля заявок. Он определяется количеством типов основных изделий, их параметрами количеством изделий каждого типа и областью использования. Это — исходная информация для формирования облика остальных составляющих КТС. Некоторые обслуживающие подсистемы зависят только от портфеля заявок. Примером может служить АВ, пропускная способность которого характеризуется не типами самолетов и вертолетов, а потоками пассажиров и грузов.

Чтобы определить оптимальные параметры любой системы, в том числе и КТС, необходимо построить ее модель. Обычно чем больше параметров входит в модель, тем ближе она отражает реальный процесс, происходящий в системе. Однако наличие большого количества параметров затрудняет ее изучение. Поэтому возникает задача создания такой модели, которая отражает только важнейшие черты изучаемого процесса. При этом не учитываем отдельные стороны реальных явлений, имеющих второстепенный характер. Но даже в том случае, если рассматривать довольно укрупненные параметры КТС транспортной системы, связи между подсистемами настолько сложны, что практически нельзя составить и исследовать модель, которая опишет сразу всю систему. Поэтому предлагается оптимизацию проводить методом последовательных приближений. На первой итерации определяем ряд основных элементов без учета харак-

теристик обслуживающих устройств. Полученный параметрический ряд является основой для построения моделей остальных подсистем КТС, которые включаем в целевую функцию. На следующих итерациях характеристики ряда основных элементов изменяем таким образом, чтобы постоянно уменьшалась расширенная целевая функция.

Такой подход можно сравнить с разложением некоторой функции  $F(x)$  в ряд Тейлора в точке  $x_0$ , которая является первым приближением параметров основных элементов. Затем в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0$  определяем минимальное значение целевой функции и соответствующую ей точку  $x_1$ . Таким образом получаем последовательность  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_p\}$ .

Не исключено (скорее всего это будет правилом), что целевая функция окажется не выпуклой. Поэтому берем различные начальные значения  $x_0^{(i)}$  и получаем несколько последовательностей  $\{x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_p^{(i)}\}$ . Практическое использование таких решений возможно в том случае, если хотя бы одно из них лучше всех известных вариантов. Трудности при решении задачи оптимизации связаны не только с тем, что целевая функция многоэкстремальная. Они также заключаются в правильном выборе  $\varepsilon$ -окрестности, внутри которой на каждой итерации приближенное значение расширенной целевой функции должно довольно точно отражать ее истинный вид.

Сформулируем поставленную задачу в общем математическом виде, используя некоторые термины [1]. Даны две замкнутые ограниченные области:  $X$  — покрываемая область (портфель заявок),  $Y$  — область возможного расположения центров (параметры основного изделия), которые должны оптимально покрыть область  $X$ . Совокупность любых центров (типов основных изделий)  $y_j \in Y$  назовем некоторой стратегией  $A: A = \{y_j\} \subset Y, j = 1, 2, \dots, m$ . Каждому центру  $y_j$  ставится в соответствие некоторая область  $D_j$  из множества  $X$ , в каждой из которых определена функция  $S(y_j, x)$ , где  $x \in D_j$ . Области  $D_j$  не пересекаются, а их объединение задает множество  $X$ :

$$D_j \cap D_k = \emptyset; \forall j, k = 1, 2, \dots, m, j \neq k; \bigcup_{i=1}^m D_i = X.$$

Необходимо решить задачу полной оптимизации

$$S^* = \min_{A \subset Y} \sum_{D_i}^m S(y_i, x),$$

которая соответствует постановке долгосрочного планирования развития транспортной системы. Обычно ее практическое решение весьма затруднительно. Поэтому предлагается решать вспомогательную задачу оптимизации стратегии для различного количества типов основных элементов. В результате получим некоторую функцию  $S(m)$ , минимум которой даст решение зада-

чи полной оптимизации:  $S^* = \min_m S(m)$ . Таким образом, на первой итерации определяем оптимальные значения  $m^*$ ,  $y_1^*$ ,  $y_2^*$ , ...,  $y_m^*$ ,  $D_1^*$ ,  $D_2^*$ , ...,  $D_m^*$  и количество элементов каждого типа  $n_1$ ,  $n_2$ , ...,  $n_m$ . Обозначим перечисленную выше совокупность параметров некоторой стратегией  $B$ :  $B = (\{y_j\}, \{D_j\}, \{n_j\}, m)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Оптимальное значение стратегии  $B = B^*$  доставляет минимум функции  $S$ .

Любая транспортная система состоит из отдельных узлов, связанных множеством линий. Каждый узел представляет собой объединение обслуживающих устройств. Стратегия  $B$  и множество  $X$  полностью определяют необходимые капитальные вложения и эксплуатационные расходы, идущие на функционирование узлов:  $F_i = \varphi_i(\{y_j\}, \{D_j\}, \{n_j\}, m)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $N$  — количество узлов транспортной системы.

Суммарные затраты  $\Delta S = \sum_{i=1}^N F_i$ . Структура функций  $F_i$  и метод

их построения принципиально зависят не только от состава обслуживающих подсистем узлов, но и от выбранной стратегии  $B$ . Любое отклонение  $B$  от  $B^*$  увеличивает  $S$ , величина же  $\Delta S$  может увеличиваться или уменьшаться. Задача состоит в том, чтобы за конечное число итераций определить экстремум функции  $F = S + \Delta S$ . Трудности при этом заключаются в выборе процедуры изменения стратегии  $B$ , обеспечивающей на каждом шаге уменьшение функции  $F$ . Предлагаемый подход используется при оптимизации перспективного комплекса технических средств гражданской авиации [2].

Список литературы: 1. Пияяский С. А., Брусов В. С., Хэйлон Е. А. Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1974. 168 с. 2. Дабагян А. В., Годлевский М. Д., Пичаев Е. Г. Оптимизация перспективного парка пассажирских самолетов гражданской авиации. — «Тр. ГосНИИГА, /Исследование больших систем ГА», 1977, № 149, с. 69—75.

УДК 621.317

Ю. В. МАРГАНИЯ,  
С. А. ЦЫБУЛЬНИК

#### АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА КТС АСУП

Рассматривается следующая задача. Имеется трехуровневая структурная схема комплекса технических средств (КТС) иерархического типа (рисунок), представляющая КТС в виде некоторой взаимосвязанной совокупности отдельных его частей (подсистем). Например, первый уровень интерпретируется как подсистемы регистрации информации, второй — как подсистемы

передачи, третий — как ЦВМ. Связи между подсистемами показывают направления движения потоков информации. Заданы множества возможных вариантов  $l_i$  для каждой из подсистем. Варианты оцениваются временем преобразования заданных объемов информации  $t_i$  и приведенными затратами (стоимостью)  $c_i$ . Необходимо найти вариант КТС (набор вариантов, по одному от каждой подсистемы), имеющий минимальные приведенные затраты и удовлетворяющий ограничению на полное время преобразования информации в КТС.

Формально задача может быть записана в следующем виде: минимизировать

$$C = f(t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (1)$$

при ограничении

$$g(t_1, t_2, \dots, t_n) \leq T_{\text{доп}}; t_i \in A_i, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где  $C$  — приведенные затраты на КТС;  $t_i$  — время преобразования заданного объема информации в  $i$ -й составной части КТС;  $T_{\text{доп}}$  — допустимое время преобразования информации в КТС;  $A_i$  — множество значений времени преобразования информации, соответствующее множеству заданных вариантов  $i$ -й подсистемы;  $n$  — общее число подсистем. Очевидно, общее число вариантов КТС  $N = \prod_{i=1}^n l_i$ , где  $l_i$  — число вариантов  $i$ -й подсистемы.

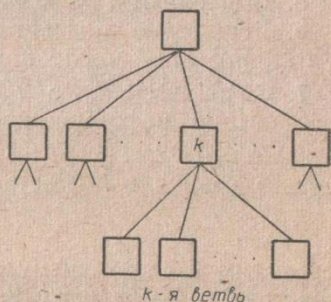
Порядок обработки информации в подсистемах предполагается следующий. Сначала объемы информации перерабатываются в подсистемах первого (нижнего) уровня (обработка ведется параллельно). Затем информация передается на второй уровень в соответствии с информационными связями, т. е. на разных уровнях информация обрабатывается последовательно.

Сформулированная задача является задачей математического программирования с дискретными переменными при нелинейных целевой функции и ограничении. Общий метод решения таких задач, кроме полного перебора, отсутствует. В статье предлагается алгоритм для решения задачи (1)—(2), в котором применен частичный направленный перебор вариантов.

### Алгоритм

1. Фиксируем значение  $t_{ni}$  ( $t_{ni}$  — время преобразования заданного объема информации в  $i$ -м варианте подсистемы третьего уровня;  $i = 1, 2, \dots, l_n$ ;  $l_n$  — число заданных вариантов подсистем третьего уровня).

2. Вычисляем  $T'_{\text{доп}} = T_{\text{доп}} - t_{ni}$ .



3. Фиксируем  $k$ -ю подсистему второго уровня ( $k = 1, 2, \dots, f$ ;  $f$  — число подсистем второго уровня);  $k$ -я подсистема второго уровня определяет  $k$ -ю ветвь структурной схемы КТС (см. рисунок).

4. Фиксируем  $t_{kj}$  ( $t_{kj}$  — время преобразования заданного объема информации  $j$ -м вариантом  $k$ -й подсистемы второго уровня;  $j = 1, 2, \dots, l_k$ ;  $l_k$  — число заданных вариантов  $k$ -й подсистемы второго уровня).

5. Вычисляем  $T''_{\text{доп}} = T'_{\text{доп}} - t_{kj}$ .

6. Берем  $q$ -ю подсистему первого уровня  $k$ -й ветви ( $q = 1, 2, \dots, m_k$ ;  $m_k$  — число подсистем первого уровня в  $k$ -й ветви).

7. Сравниваем  $t_{qh}^k$  с  $T''_{\text{доп}}$  ( $t_{qh}^k$  — время преобразования заданного объема информации  $h$ -м вариантом  $q$ -й подсистемы в  $k$ -й ветви;  $h = 1, 2, \dots, l_q^k$ ;  $l_q^k$  — число вариантов  $q$ -й подсистемы первого уровня в  $k$ -й ветви). Если выполняется условие

$$t_{qh}^k \leq T''_{\text{доп}}, \quad (3)$$

переходим к следующему шагу. Если условие (3) не выполняется, переходим к шагу 9.

8. Берем следующее значение  $t_{qh}^k$  ( $h = h + 1$ ) и переходим к шагу 7 и т. д. до тех пор, пока не будут перебраны все значения  $t_{qh}^k$  ( $h = 1, 2, \dots, l_q^k$ ) или перестанет выполняться условие (3).

9. Для максимального  $t_{qh}^k$  ( $h = 1, 2, \dots, l_q^k$ ), удовлетворяющего условию (3), определяем приведенные затраты  $c_{qh}^k$ .

10. Берем следующую подсистему  $k$ -й ветви, переходим к п. 7 и так до тех пор, пока не будут перебраны все подсистемы первого уровня  $k$ -й ветви.

11. Вычисляем суммарные затраты подсистем первого уровня  $k$ -й ветви  $c_{1, \dots, m_k} = \sum_{q=1}^{m_k} c_{qh}^k$ .

12. Находим суммарные приведенные затраты группы подсистем входящей в  $k$ -ю ветвь,  $c_{k, 1, \dots, m_k} = c_k + c_{1, \dots, m_k}$ , где  $c_k$  — приведенные затраты зафиксированного на четвертом шаге варианта  $k$ -й подсистемы.

13. Вычисленное значение  $c_{k, 1, \dots, m_k}$  сравниваем с предыдущим значением и выбираем меньшее.

14. Фиксируем следующее значение  $t_{kj}$  ( $j = j + 1$ ), переходим к шагу 5 и так до тех пор, пока не будут перебраны все значения  $t_{kj}$  ( $j = 1, 2, \dots, l_k$ ).

15. Фиксируем следующую подсистему второго уровня ( $k - k + 1$ ), переходим к шагу 4 и так до тех пор, пока не будут перебраны все подсистемы второго уровня ( $k = 1, 2, \dots, f$ ).

16. Вычисляем суммарные приведенные затраты по всем ветвям структурной схемы:  $c_{1, \dots, a-1} = \sum_{k=1}^f c_{k, 1, \dots, m_k}$ .

17. Определяем приведенные затраты КТС для зафиксированного на первом шаге варианта подсистемы третьего уровня  $C = c_n + c_1, \dots, c_{n-1}$ , где  $c_n$  — приведенные затраты зафиксированного на данном этапе вычислений варианта подсистемы третьего уровня.

18. Сравниваем  $C$  с предыдущим значением и выбираем меньшее.

19. Фиксируем следующее значение  $t_{ni}$  ( $i = i + 1$ ), переходим к шагу 2 и так до тех пор, пока не будут перебраны все значения  $t_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots, l_n$ ).

Эффективность алгоритма покажем на следующем примере. Пусть структурная схема состоит из двух ветвей ( $f = 2$ ); каждая ветвь содержит по две подсистемы на нижнем уровне ( $m_1 = m_2 = 2$ ); каждая подсистема имеет пять возможных вариантов ( $l_1 = l_2 = \dots = l_n = 5$ ). Тогда общее число подсистем  $n = 7$ , а возможное число вариантов КТС  $N = \prod_{i=1}^7 l_i = 78\,125$ . Нетрудно подсчитать, что для отыскания оптимального решения потребуется перебрать только 150 вариантов.

УДК 621.391

Ю. Ф. СЕНЧУК, канд. физ.-мат. наук

#### ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ФУНКЦИЙ УОЛША К ЗАДАЧАМ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Во многих приложениях с успехом используются так называемые функции Уолша. В работе [1] изложены свойства этих функций и дается обзор их основных применений. Использование функций Уолша в теории случайных сигналов рассмотрено в работе [2].

В статье затрагивается один вопрос, связанный с применением функций Уолша при фильтрации случайных сигналов. Возьмем произвольное целое  $n > 0$  и положим  $N = 2^n$ . Функцию Уолша, заданную для целочисленных  $t = 0, 1, \dots, N - 1$ , можно определить [2] формулой

$$\omega_k(t) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} k_i t_i} \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1).$$

Здесь  $k_i, t_i$  —  $i$ -е составляющие двоичных представлений чисел  $k, t$ . Существуют и несколько иные определения функций Уолша [1, 3, 4]. Функции  $\omega_k(t)$  ортогональны в том смысле, что

$$\sum_{t=0}^{N-1} \omega_k(t) \omega_i(t) = N \delta_{kj}. \quad (1)$$

Далее, если символом  $\oplus$  обозначить действие так называемого диагонального сложения, то, как нетрудно проверить,

$$\omega_k(t \oplus \tau) = \omega_k(t) \omega_k(\tau). \quad (2)$$

Пусть  $\{x(t)\}$  — совокупность отсчетов некоторого сигнала  $x$  в моменты  $t = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда равенство

$$x^*(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} \omega_k(t) x(t)$$

определяет [2] преобразование Адамара. Формула обратного преобразования  $x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k(t) x^*(k)$ .

Предположим теперь, что на вход диадного фильтра [2] с передаточной функцией  $H(k)$  поступает сигнал  $x$ . Импульсная реакция этого фильтра [2]  $h(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k(t) H(k)$ , а сигнал на выходе представляет собой диадную свертку импульсной реакции и входного сигнала:  $y(t) = \sum_{\tau=0}^{N-1} h(t \oplus \tau) x(\tau)$ . (3)

Применим сказанное ранее к получению некоторых соотношений между характеристиками сигналов на входе и на выходе. Для этого, используя (2), имеем из (3)

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{\tau=0}^{N-1} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k(t \oplus \tau) H(k) \right] x(\tau) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \omega_k(t) H(k) \sum_{\tau=0}^{N-1} \omega_k(\tau) x(\tau) \right] = \sqrt{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k(t) H(k) x^*(k). \end{aligned}$$

Вычисляя энергию сигнала на выходе, находим

$$\sum_{t=0}^{N-1} [y(t)]^2 = N \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} [H(k) x^*(k)]^2 + 2 \sum_{\substack{j+k \\ j \neq k}} \omega_k(t) \omega_j(t) H(k) H(j) \times (j) x^*(k) x^*(j) \right\},$$

$$\text{или на основании (1) } \sum_{t=0}^{N-1} [y(t)]^2 + N^2 \sum_{k=0}^{N-1} [H(k) x^*(k)]^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} [y(t)]^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} [H(k) x^*(k)]^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} P_W(k), \quad (4)$$

где  $P_W(k)$  — спектр Уолша [2] сигнала на выходе. Если  $x$  — случайный сигнал, то место (4) получим

$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \overline{[y(t)]^2} = N \sum_{k=0}^{N-1} [H(k)]^2 \overline{[x^*(k)]^2}. \quad (5)$$

Наконец, если параметры фильтра также случайны и зависят от входного сигнала, то

$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \overline{[y(t)]^2} = N \sum_{k=0}^{N-1} [H(k) x^*(k)]^2. \quad (6)$$

Предположим теперь, что на вход фильтра поступает сигнал  $u(t) + x(t)$ , где  $u(t)$  — детерминированный сигнал, а  $x(t)$  — стационарный (в широком смысле) шум с нулевым средним и с однородным спектром Уолша  $c$ , причем  $x(t)$ ,  $u(t)$  статистически независимы. Пусть  $v(t)$ ,  $y(t)$  — отвечающие им составляющие сигнала на выходе. Тогда на основании (5)

$$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{[y(t)]^2} = Nc \sum_{k=0}^{N-1} [H(k)]^2.$$

Следовательно, отношения сигнал — шум (ОСШ) на входе и на выходе соответственно равны

$$\text{ОСШ}_{\text{вх}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} [u^*(k)]^2}{c}, \quad \text{ОСШ}_{\text{вых}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} [H(k) u^*(k)]^2}{c \sum_{k=0}^{N-1} [H(k)]^2},$$

а значит,

$$\frac{\text{ОСШ}_{\text{вых}}}{\text{ОСШ}_{\text{вх}}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} [H(k) u^*(k)]^2}{\sum_{k=0}^{N-1} [H(k)]^2 \sum_{k=0}^{N-1} [u^*(k)]^2}. \quad (7)$$

Отсюда, в частности, следует, что в этом случае всегда  $\text{ОСШ}_{\text{вых}} \leq \text{ОСШ}_{\text{вх}}$ . Далее, из (7) вытекает, что для «однокомпонентного» фильтра

$$H(k) = \begin{cases} H, & k = r \\ 0, & k \neq r \end{cases} \text{ будет } \frac{\text{ОСШ}_{\text{вых}}}{\text{ОСШ}_{\text{вх}}} = \frac{[u^*(r)]^2}{\sum_{k=0}^{N-1} [u^*(k)]^2}.$$

Аналогичный результат имеем, если  $H(k)|_{k \neq r}$  малы по сравнению с  $H(r)$ .

Преобразуем (7) следующим образом. Если  $u(t) = \omega_m(t)$ , то  $u^*(k) = \sqrt{N} \delta_{km}$ . Поэтому, если  $u(t)$  — произвольный детерминированный сигнал, то, представив его в виде

$$u(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \omega_j(t), \quad (8)$$

получим, что  $u^*(k) = \sqrt{N} a_k$ , а значит, (7) принимает вид

$$\text{ОСШ}_{\text{вых}}/\text{ОСШ}_{\text{вх}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} [H(k)]^2 a_k^2}{\sum_{k=0}^{N-1} [H(k)]^2 \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2}. \quad (9)$$

В некоторых приложениях задача состоит в «подавлении» составляющей  $v(t)$  на выходе. Для этого полагают  $H(k) = \frac{1}{\sqrt{c + [u^*(k)]^2}}$ . Тогда из (6) имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{[y(t)]^2} = cN \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{c + [u^*(k)]^2}.$$



Представив  $u(t)$  в виде (8), из (9) находим

$$\text{ОСШ}_{\text{ВЫХ}}/\text{ОСШ}_{\text{ВХ}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k^2}{c + Na_k^2} \left/ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{c + Na_k^2} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \right. \quad (10)$$

Получим некоторые следствия этой формулы. Пусть  $L$  — число коэффициентов  $a_k$  таких, что  $Na_k^2 \gg c$ . Тогда из (10)

$$\text{ОСШ}_{\text{ВЫХ}}/\text{ОСШ}_{\text{ВХ}} \approx \frac{L}{N} \left/ \left\{ \frac{N-L}{c} + \left[ \frac{1}{a_k^2} \right] \frac{L}{N} \right\} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \right. \quad (11)$$

где  $\left[ \frac{1}{a_k^2} \right]$  — символ усреднения по тем  $k$ , для которых  $Na_k^2 \gg c$ . В частности, если  $N-L \ll N$ , а числа  $a_k$  мало различаются между собой, то (11) дает  $\text{ОСШ}_{\text{ВЫХ}}/\text{ОСШ}_{\text{ВХ}} \approx \frac{1}{N}$ . В другом крайнем случае, когда  $L \ll N$ , положив  $\frac{L}{N} = \alpha$ , получим из (11)

$$\text{ОСШ}_{\text{ВЫХ}}/\text{ОСШ}_{\text{ВХ}} \approx \alpha \left/ \frac{N}{c} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 = \alpha c \left/ \sum_{k=0}^{N-1} [u^*(k)]^2 \right. \right.$$

т. е. теперь эффект подавления зависит не только от малости  $\alpha$ , но и от отношения спектров шума и сигнала на входе.

Список литературы: 1. *Логонов В. П.* Функции Уолша и области их применения. — «Зарубеж. радиоэлектроника», 1973, № 4, с. 73—101. 2. *Пирл Д.* Обработка случайных сигналов функциями Уолша. — «Зарубеж. радиоэлектроника», 1972, № 8, с. 42—50. 3. *Ахмед Н., Рао К. Р., Абдуссамтар А. Л.* Преобразование Адамара. — «Зарубеж. радиоэлектроника», 1972, № 4, с. 62—76. 4. *Френкс Л.* Теория сигналов. М., «Сов. радио», 1974. 344 с.

УДК 681.51

И. В. КОНОНЕНКО

#### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ САМООРГАНИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Техническое обслуживание и ремонт сложных систем по фактическому состоянию возможен лишь при надлежащем развитии средств диагноза. Поскольку процесс диагноза, в частности проверка исправности, работоспособности, правильности функционирования, и поиск неисправностей требуют значительных затрат времени и часто не может быть проведен в реальном масштабе времени, организация технического обслуживания и ремонта сложных систем по фактическому состоянию встречает трудности, связанные с дорогостоящими простоями объекта диагноза. Затраты на простои могут поглотить эффект, достигаемый внедрением подобных систем диагноза. Для предотвращения этого положения процесс диагноза и принятия решения при диагностическом управлении следует осуществлять для некоторого  $p + j$  отрезка времени, где  $p$  — текущий отрезок времени,  $j$  — номер отрезка в будущем. В этом случае, во-первых, простои могут быть сведены к минимуму либо совсем устране-

ны, поскольку требуется лишь съём информации с датчиков, а вся дальнейшая обработка ее ведется параллельно с работающим изделием, во-вторых, постановка диагноза для отрезка времени в будущем позволяет предотвратить возможные аварии и более обоснованно назначить время для следующего технического обслуживания или ремонта.

Для диагностирования состояния сложных механических систем (двигатель внутреннего сгорания, дизель, турбина) информативен спектральный анализ сигналов, снимаемых с датчиков, в частности выделение преобладающих по мощности спектральных составляющих. Подобный анализ часто служит основой при оценке состояния создаваемого изделия, а также эксплуатируемого или хранимого изделия.

Разработана адаптивная модель фильтрации и прогнозирования обобщенных параметров спектральной плотности мощности нестационарных случайных процессов, позволяющая формально оценить доминирование в спектре частот и выдать прогноз обобщенной кривой спектральной плотности мощности на  $p + j$  наблюдение.

Адаптивный оптимальный предиктор использует оценки спектральной плотности мощности квазистационарных участков анализируемых сигналов, эргодичных по отношению к корреляционной функции. Выборочную спектральную плотность мощности вычисляем по алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ), используемому метод прореживания по времени. БПФ реализовано с использованием подпрограмм упаковки и распаковки чисел, что позволило экономно занять память ЦВМ. Адаптивный фильтр [1] выделяет с помощью алгоритма распознавания пиков доминирующие ритмы в выборочном спектре. Распознавание доминирующих ритмов ведется двумя способами. Первый основан на поиске групп оценок спектральной плотности, интенсивность которых превосходит заданный уровень максимума. Ширину найденных групп (объем группы) выбираем таким образом, чтобы крайние спектральные составляющие имели интенсивность, меньшую, чем заданный уровень минимума. Второй способ распознавания использует корреляционно-экстремальный поиск, базирующийся на вычислении коэффициента корреляции между первичными оценками спектральной плотности мощности и положительной полуволной функции синус.

Оператор задает первое приближение для величины  $T$  периода синусоиды, затем в ЦВМ производится одномерный поиск максимума величины коэффициента корреляции по всем имеющимся оценкам спектральной плотности мощности для  $p$ -го наблюдения. Машина выбирает  $q$  доминирующих областей в порядке убывания коэффициента корреляции. Величины  $T$ ,  $q$  отражают понятие «пик» спектральной плотности и вместе с пределами их варьирования определяют свободу выбора решений алгоритма само-

организации. Они могут целенаправленно изменяться для получения требуемой точности прогноза.

После выделения по одному из методов распознавания доминирующих областей ЦВМ определяет параметры обобщенной модели спектральной плотности мощности квазистационарного участка анализируемого процесса в классе сумм дробно-рациональных функций от частоты

$$I(p, f) = I_1(p, f) + I_2(p, f) + \dots + I_q(p, f) = \\ = \sum_{k=1}^q \frac{\xi_{pk1} + \xi_{pk2}f}{(f - \xi_{pk3})^2 + \xi_{pk4}^2},$$

где  $q$  равно количеству выделенных алгоритмом распознавания пиков доминирующих участков частот;  $\xi_{pk1}$ ,  $\xi_{pk2}$ ,  $\xi_{pk3}$ ,  $\xi_{pk4}$  — параметры адаптивной модели;  $p$  — номер анализируемого отрезка электрограммы.

Предварительное выделение доминирующих ритмов предназначено для определения сложности модели и для вычисления первых приближений параметров модели  $\xi_{pkl}^0$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ). Первые приближения находим, решая систему  $4q$  уравнений. Далее по методу Дэвидона — Флетчера — Пауэлла минимизируем среднеквадратичное отклонение уравнения модели от экспериментально определенных первичных оценок спектральной плотности мощности. Выбор данного алгоритма минимизации объясняется его высокой эффективностью. Метод не требует аналитического вычисления матрицы Гессе, что существенно в рассматриваемом нами случае. Когда изменение целевой функции на последнем шаге многошагового процесса становится меньше наперед заданного  $\epsilon$ , процесс минимизации прекращается.

Полученная модель не только выделяет диагностически важные компоненты в выборочной спектральной плотности квазистационарных участков электрограмм, адаптируясь под явно выраженные (доминирующие) составляющие, но и сглаживает первичные оценки, уменьшая величину случайной ошибки смещения, действуя подобно сглаживанию по частоте. Функция  $I(p, f)$  учитывает характерные особенности спектральных плотностей мощности квазистационарных участков сигнала.

Оптимальный по сложности предиктор представляет собой самоорганизующуюся модель, аппроксимирующую ряды параметров  $\xi_{1kl}$ ,  $\xi_{2kl}$ , ...,  $\xi_{pkl}$ , которые предварительно делятся на обучающую и проверочную последовательности. Модель построена по методу группового учета аргументов с частными описаниями  $r$ -го ряда селекции  $Y = a + bX_1 + cX_2$ , где  $X_1$ ,  $X_2$  равны промежуточным переменным, полученным на  $r-1$  ряду селекции, либо их произведению по два. Линейные частные описания позволяют постепенно увеличивать сложность аппроксимирующих функционалов, не давая значительной ошибки многоградности.

На основании прогнозируемых значений параметров  $\xi_{p+j, k, i}$  строим обобщенную кривую спектральной плотности мощности на  $p + j$  наблюдение.

Качество прогнозирования является критерием для оценки используемого понятия «пик», т. е. критерием адекватности сформированной адаптивной модели реально существующим закономерностям в динамике изменения спектральной плотности мощности. Оптимальный по сложности предиктор строим для каждого из варьируемых определений понятия «пик». Выбираем то определение, которое обеспечивает минимум среднеквадратичного отклонения прогнозируемых параметров и параметров, полученных экспериментально для отрезков времени, выделенных в экзаменационную последовательность. Найденное таким образом понятие «пик» обеспечивает оптимальную сложность самоорганизующейся модели фильтрации и прогнозирования.

Результаты адаптивной фильтрации и прогнозирования в виде обобщенных кривых позволяют классифицировать состояние сложной системы исходя из допустимых границ функции  $I_k(p, f)$ . Для отрезка времени  $p + j$  получим

$$I(p + j, f) = I_1^+(p + j, f) + I_2^-(p + j, f) + \dots + I_q^+(p + j, f),$$

где присутствуют  $q - t$  допустимых для данного состояния функций  $I^+(p + j, f)$  и  $t$  недопустимых  $I^-(p + j, f)$ . Результат классификации используем для окончательного принятия решения человеком-оператором о состоянии механической системы. Он может служить основой для управления объектом диагноза. Применяя априорно известные связи входных воздействий различной природы с функциями  $I^-(p + j, f)$ , принимаем решение о виде управляющего воздействия.

Процесс диагностирования можно построить путем задания перечня возможных неисправностей объекта диагноза с последующим построением графа причинно-следственных связей с неисправностями. Граф отражает доминирующие связи между неисправностями и информативными событиями типа неравенств  $\xi_{p+j, k, i} > M$ , где  $M$  — верхняя граница допустимых изменений параметра при данном состоянии объекта диагноза. По графу заполняем таблицу функций неисправностей и определяем минимальную проверяющую и различающую совокупности событий. Сравнение результатов прогноза состояния с данными таблицы функций неисправностей позволяет поставить диагноз технического состояния объекта для  $p + j$  отрезка времени.

Список литературы: 1. Дабагян А. В., Кожухарь Л. С., Кононенко И. В. Автоматизированный анализ квазистационарного случайного процесса с помощью адаптивного фильтра. — Тезисы докл. III Всесоюз. совещ. по технической диагностике. М., 1975, с. 180—182. 2. Дабагян А. В., Кононенко И. В. Автоматизированная аналого-цифровая система диагностирования и прогнозирования состояния сложных непрерывных объектов. — Материалы семинара «Пойск неисправностей в технических системах при их производстве и эксплуатации». Л., 1977, с. 42—43.

## СОДЕРЖАНИЕ

Голоскоков Е. Г., Дмитренко В. В. К вопросу об усталостной долговечности трехслойной пластинки при флаттере . . . . .	3
Ольшанский В. П., Лавинский В. И. Об одном представлении локального напряженного состояния оболочек на линиях главных кривизн . . . . .	5
Голоскоков Е. Г., Бешенков С. Н. Излучение звука пластиной при возвратно-поступательном движении возбуждающей силы . . . . .	8
Пономарев А. С. Релаксационные колебания и их расчет . . . . .	11
Овчарова Д. К. К вопросу об устойчивости колебаний нелинейных систем . . . . .	13
Карабан В. Н., Шатохин В. М. О численной реализации метода Ньютона-Канторовича для систем с нелинейностью общего вида . . . . .	16
Гринев В. Б., Гарев О. Л. О некоторых особенностях задач оптимизации круглых пластинок . . . . .	19
Герасименко Б. П., Шипулина Л. В., Чайка Э. Г., Бабило В. Ю., Прошин Н. Г., Бондаренко И. Н., Борисенко Ю. Ф. Определение движения чувствительного элемента гиротеодолита по результатам измерений . . . . .	22
Зайцев Ю. И. Оптимизация процесса частотного пуска асинхронного привода . . . . .	25
Фролов Ю. А. Синтез квазиоптимального управления некоторыми объектами на основе решения монотонной вспомогательной задачи . . . . .	28
Пикур Э. А., Рожанский В. Е., Рохленко В. Ю., Рудницкий Г. М., Северин В. П. Исследование электрогидравлических преобразователей для системы регулирования паровых турбин ХТГЗ им. С. М. Кирова . . . . .	32
Киреев Н. Г., Захаренко П. И. К вопросу идентификации и оптимального управления динамической системой . . . . .	34
Северин В. П. Сравнение методов безусловной минимизации на примере плохо обусловленной функции . . . . .	37
Горелый А. В. Оптимизация по эффективности двухуровневой экономической системы . . . . .	40
Дабагян А. В., Заруба В. Я. Об одном определении решения игры в форме характеристической функции . . . . .	43
Лисицкий В. Л. Об одной модели конфликтной ситуации . . . . .	45
Костенко Ю. Т., Безменов Н. И., Серокуров В. Е. О применении теории графов при структурном анализе сложных систем . . . . .	48
Лисицкий В. Л., Гамаюн И. П. Об одном подходе к формализации задачи распределения ресурсов . . . . .	51
Дабагян А. В., Баженов В. Г., Алексеев И. Ю. Система информационного обеспечения типа «банк данных» для задач оптимального проектирования больших систем обслуживания . . . . .	54
Гамбаров Л. А. Об одной экономико-математической модели оптимального резервирования . . . . .	57
Голоскоков А. Е. Построение стохастической модели планирования . . . . .	59
Голоскоков А. Е. О декомпозиции несепарабельной задачи . . . . .	61
Годлевский М. Д. Метод последовательных приближений при оптимизации комплекса технических средств транспортной системы . . . . .	64
Маргания Ю. В., Цыбульник С. А. Алгоритм решения одной задачи оптимального выбора КТС АСУП . . . . .	66
Сенчук Ю. Ф. Об одном применении функций Уолша к задачам фильтрации случайных сигналов . . . . .	69
Кононенко И. В. Применение методов самоорганизации в задачах диагностического управления . . . . .	72

## РЕФЕРАТЫ

УДК 629.1.

К вопросу об усталостной долговечности трехслойной пластинки при флаттере. Голоскоков Е. Г., Дмитренко В. В. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, №148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 3—5.

Исследуется распределение напряжений в слоях трехслойной пластинки при движении со скоростями выше «критической» скорости флаттера.  
Ил. 2. Список лит.: 4 назв.

УДК 539.4.

Об одном представлении локального напряженного состояния оболочек на линиях главных кривизн. Ольшанский В. П., Лавинский В. И. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 5—8.

Исследовано напряженное состояние оболочек нулевой и положительной гауссовых кривизн в зоне приложения сосредоточенной касательной нагрузки.  
Список лит.: 2 назв.

УДК 534.26.

Излучение звука пластиной при возвратно-поступательном движении возбуждающей силы. Голоскоков Е. Г., Бешенков С. Н. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 8—10.

Методом интегральных преобразований решена задача об излучении звука пластиной при возвратно-поступательном движении по ее поверхности сосредоточенной гармонической силы.

Список лит.: 4 назв.

УДК 517.913.

Релаксационные колебания и их расчет. Пономарев А. С. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 11—13.

Показано, что природа релаксационных колебаний в сложных системах объясняется переменностью этих систем, т. е. блокировкой отдельных связей. Это имеет место при выбранных зазорах, при фрикционном контакте.

Ил. 1. Список лит.: 4 назв.

УДК 534.1.

К вопросу об устойчивости колебаний нелинейных систем. Овчарова Д. К. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 13—15.

Рассматривается применение метода малого параметра для исследования устойчивости вынужденных колебаний нелинейной системы.

Ил. 1. Список лит.: 3 назв.

УДК 621.01

О численной реализации метода Ньютона-Канторовича для систем с нелинейностью общего вида. Карабан В. Н., Шатохин В. М. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с.16—19.

Изложен алгоритм расчета установившихся вынужденных колебаний нелинейных цепных систем методом последовательных приближений.

Ил. 2. Список лит.: 5 назв.

УДК 518:517

О некоторых особенностях задач оптимизации круглых пластинок. Гринев В. Б., Гарев О. Л.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 19—22.

Исследуются качественные особенности задач оптимизации круглых пластинок при вынужденных колебаниях. Необходимые условия оптимальности получены на основании принципа максимума Понтрягина.

Ил. 1. Список лит.: 6 назв.

УДК 62—501. 7

Определение движения чувствительного элемента гиротеодолита по результатам измерений. Герасименко Б. П., Шипулина Л. В., Чайка Э. Г. и др.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 22—25.

Рассматривается методика определения направления меридиана по измерениям, получаемым с гиротеодолита. Разработан алгоритм вычислений, основанный на методе динамической фильтрации Калмана.

Ил. 1. Библиогр. ссылка в подстроч. примеч.

УДК 62—83

Оптимизация процесса частотного пуска асинхронного привода. Зайцев Ю. И.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 25—28.

Рассматривается задача определения оптимального с точки зрения быстродействия частотного управления асинхронным приводом с учетом электромагнитных явлений в двигателе.

Ил. 1. Список лит.: 5 назв.

УДК 681.5

Синтез квазиоптимального управления некоторыми объектами на основе решения монотонной вспомогательной задачи. Фролов Ю. А.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 28—32.

Рассматривается задача синтеза управления движениями динамических объектов, для которых оптимальные программные управления определяются совокупностью критерия оптимальности и ограничений из ряда энерго-силовых функционалов.

Список лит.: 2 назв.

УДК 62—523.3

Исследование электрогидравлических преобразователей для системы регулирования паровых турбин ХТГЗ им. С. М. Кирова. Пикур Э. А., Рожанский В. Е., Рохленко В. Ю. и др.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 32—34.

Исследуются различные конструкции ЭГП, применяемые в системах регулирования паровых турбин и использующие в качестве рабочего тела воду.

Библиогр. ссылка в подстроч. примеч.

УДК 62.505

К вопросу идентификации и оптимального управления динамической системой. Киреев Н. Г., Захаренко П. И.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 34—37.

Решается задача одновременного оптимального управления и идентификации двух параметров сложной нелинейной динамической системы.

Список лит.: 2 назв.

УДК 517.27

Сравнение методов безусловной минимизации на примере плохо обусловленной функции. Северин В. П.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 37—40.

Исследуется эффективность ряда известных методов минимизации функций при отсутствии ограничений на примере плохо обусловленной текстовой функции Розенброка.

Табл. 1. Список лит.: 3 назв.

УДК 519.95

Оптимизация по эффективности двухуровневой экономической системы. Горелы А. В.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 40—42.

Исследуется состав целевых функций элементов в двухуровневой иерархической системы без горизонтальных связей в случае оптимизации системы по эффективности вложенных ресурсов.

Ил. 2.

УДК 518.9

Об одном определении решения игры в форме характеристической функции. Дабатян А. В., Заруба В. Я.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 43—45.

Рассматривая игровые ситуации, во многих случаях можно полагать, что игроки до момента, когда они оценят свои возможности в игре, разрабатывают правило, определяющее рациональные выигрыши.

Список лит.: 2 назв.

УДК 621.391

Об одной модели конфликтной ситуации. Лисицкий В. Л.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 45—47.

Рассматривается математическая модель для исследования поведения сложных систем в конфликтных ситуациях. Предлагается методика оценки выживаемости системы в конфликте.

Список лит.: 2 назв.

УДК 62.501

О применении теории графов при структурном анализе сложных систем. Костенко Ю. Т., Безменов Н. И., Серокуров В. Е.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 48—51.

Создание автоматизированной системы управления технологическим процессом невозможно без тщательного исследования объекта управления, в част-



ности без проведения структурного анализа.

Список лит.: 5 назв.

УДК 001.89

Об одном подходе к формализации задачи распределения ресурсов. Лисицкий В. Л., Гамаюн И. П.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 51—53.

Рассматриваются вопросы формализации задачи распределения ресурсов при оптимальном планировании множества разработок, каждая из которых включает в себя известную номенклатуру этапов, выполняемых в заданной последовательности и следующих непрерывно один за другим.

Список лит.: 3 назв.

УДК 653.012

Система информационного обеспечения типа «банк данных» для задач оптимального проектирования больших систем обслуживания. Дабагян А. В., Баженов В. Г., Алексеев И. Ю.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная математика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 54—56.

Рассматривается проблема информационного обеспечения задач оптимального проектирования больших систем обслуживания, представляющих собой типоразмерные ряды.

Ил. 1. Список лит.: 5 назв.

УДК 62—501

Об одной экономико-математической модели оптимального резервирования. Гамбаров Л. А.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 57—58.

Предложена математическая модель для определения экономически обоснованного числа запасных элементов автоматических линий, работающих в режиме смены отказавших элементов.

УДК 519.283

Построение стохастической модели планирования. Голоскоков А. Е.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 59—61.

Планирование можно производить в условиях, когда параметры показателя качества и ограничений оказываются случайными или неопределенными.

Список лит.: 4 назв.

УДК 656.073

О декомпозиции несепарабельной задачи. Голоскоков А. Е.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 61—63.

Рассмотрен один из подходов расчленения несепарабельной задачи распределения самолетов по сети авиалиний гражданской авиации, основанный на использовании характерной особенности задачи, которая состоит в том, что сеть авиалиний можно представить в виде совокупности узлов.

Список лит.: 3 назв.

УДК 629.734

Метод последовательных приближений при оптимизации комплекса технических средств транспортной системы. Годлевский М. Д.—Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 64—66.

Рассматривается один из подходов проектирования комплекса технических средств (КТС) транспортной системы. Метод основан на построении оптимального параметрического ряда основных элементов КТС, который является первым приближением при оптимизации всей системы.

Список лит.: 2 назв.

УДК 621.317

Алгоритм решения одной задачи оптимального выбора КТС АСУП. Марганя Ю. В., Цыбульник С. А. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 66—69.

Рассматривается задача выбора оптимального варианта КТС АСУП по минимуму приведенных затрат при ограничении на время преобразования информации.

Ил. 1.

УДК 621.391

Об одном применении функций Уолша к задачам фильтрации случайных сигналов. Сенчук Ю. Ф. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 69—72.

Рассматривается применение функций Уолша к изучению прохождения случайных сигналов через диадный фильтр.

Список лит.: 4 назв.

УДК 681.51

Применение методов самоорганизации в задачах диагностического управления. Кононенко И. В. — Вестн. Харьк. политехн. ин-та, № 148, «Прикладная механика и процессы управления», вып. 1. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 72—75.

Описывается адаптивная модель фильтрации и прогнозирования обобщенных параметров спектральной плотности мощности существенно нестационарных случайных процессов, сочетающая в себе обучение и самообучение.

Список лит.: 2 назв.