

Министерство образования и науки, молодежи и спорта
Украины
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»



ФУНДАМЕНТАЛЬНА ОСВІТА
ДЛЯ ВИСОКИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Ю. Л. ГЕВОРКЯН, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

**СКАЛЯРНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ
ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО ИНЖЕНЕРНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ**

*Общий курс высшей математики
В двух томах
Том I*

*Харьков
Видавництво «Підручник НТУ «ХПІ»
2011*

УДК 51(075) ББК 22.1я7 Г27

Рецензенты:

Ю. В. Гандель, проф., д-р физ.-мат. наук, заслуженный работник образования Украины, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина;

А. Г. Николаев, профессор, д-р физ.-мат. наук, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»;

В. Г. Солодов, профессор, д-р техн. наук, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет.

Интеллектуальная собственность авторов.

Все права защищены.

*При перепечатке материалов
ссылка на первоисточник обязательна.*

Серия основана в 2010 году

Містить систематичний виклад загального курсу вищої математики, орієнтований на використання відповідних математичних методів для розв'язання практичних інженерних задач. Призначено для студентів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників технічних університетів.

Геворкян Ю. Л.

Г27 Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования [Текст] : общий курс высшей математики : в 2-х т. / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев. - Т. 1. - Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХП»», 2011. - 652 с. - На рус. яз. - (Фундаментальна освіта для високих технологій) ISBN 978-966-2426-16-8 (полное собр.) ISBN 978-966-2426-17-5 (том 1)

Содержит систематическое изложение общего курса высшей математики, ориентированное на использование соответствующих методов для решения практических инженерных задач. Предназначается для студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников технических университетов.

Contains the systematic summary of the common course of the advanced mathematics, oriented to using the corresponding mathematical methods for solving practical engineering tasks. Intended for students, post-graduates, teachers and scientist of the technical universities.

Ил.: 442 рис. + 137 порт. Табл. 4. Библ.: 34 назв.

УДК 51(075) ББК 22.1Я7

ISBN 978-966-2426-16-8 (полное собр.)

ISBN 978-966-2426-17-5 (том 1)

© Геворкян Ю. Л., Григорьев А. Л., 2011 ©
Вид-во «Підручник «НТУ «ХП», 2011

Предисловие	8
Глава 1. Линейная алгебра	11
§ 1. Матрицы и определители	11
<i>Основные определения. Частные виды матриц. Основные действия над матрицами. Транспонирование матриц. Перестановки. Инверсия. Понятие определителя. Формулы Лапласа. Понятие линейной зависимости. Свойства определителей. Методы вычисления определителя. Определитель Вандермонда. Обратная матрица. Матричные уравнения. Теорема о базисном миноре матрицы. Элементарные преобразования. Методы вычисления ранга матрицы. Нахождение обратной матрицы по алгоритму Гаусса.</i>	
§ 2. Системы линейных алгебраических уравнений	44
<i>Условие совместности системы. Решение квадратной системы линейных уравнений. Формулы и правило Крамера. Решения однородной системы. Решения неоднородной системы. Принципы наложения и линейной суперпозиции решений. Метод Гаусса - Жордана.</i>	
§ 3. Линейные пространства	63
<i>Понятие линейного пространства. Размерность и базис пространства. Изоморфизм линейных пространств. Подпространство. Плоскость и гиперплоскость. Уравнение плоскости в пространстве \mathbb{R}^n. Уравнение прямой в \mathbb{R}^n. Евклидово пространство.</i>	
§ 4. Линейные операторы	75
<i>Понятие линейного оператора. Основные свойства. Матрица линейного оператора. Пространство линейных операторов. Сумма и произведение операторов. Обратный линейный оператор. Ранг линейного оператора. Матрица перехода к новому базису. Связь между координатами вектора в разных базисах. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Собственные значения и векторы линейных операторов. Основные свойства собственных значений и векторов. Инвариантные подпространства. Линейные сопряжённые операторы в евклидовом пространстве.</i>	

Самосопряжённые линейные операторы: основные свойства. Операторные уравнения.

§ 5. Матрицы как основа математических моделей..... 99

Разреженные матрицы. Блочная матрица: общие определения. Классификация блочных матриц. Алгебра блочных матриц. Квадратичные формы. Положительные и отрицательные матрицы. Симметрия матриц математических моделей. Матрицы влияния. Передаточные матрицы. Матрицы обмена. Матрицы колебаний.

Глава 2. Аналитическая геометрия..... 125

§ 6. Векторная алгебра..... 125

Определение вектора. Линейные операции над векторами. Свойства линейных операций. Декартова система координат. Угол между векторами. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Векторное произведение. Свойства векторного произведения. Векторное произведение в ортонормированном базисе. Некоторые приложения векторного произведения. Смешанное произведение трёх векторов. Смешанное произведение в ортонормированном базисе. Геометрический смысл смешанного произведения. Свойства смешанного произведения. Двойное векторное произведение.

§ 7. Преобразования прямоугольных декартовых координат..... 148

Преобразования координат точек плоскости. Свойства ортогональных матриц второго и третьего порядка. Преобразования координат точек пространства.

§ 8. Плоскость в геометрическом пространстве 154

Нормальное уравнение плоскости. Исследование общего уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

§ 9. Прямая в пространстве 163

Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Уравнения прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

§ 10. Прямая и плоскость в пространстве..... 167
Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

§ 11. Прямая на плоскости 172
Общее уравнение прямой на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

§ 12. Кривые второго порядка 177
Алгебраические кривые. Окружность. Эллипс. Гипербола. Асимптоты гиперболы. Парабола. Исследование общего уравнения второй степени. Эллиптические и гиперболические орбиты. Уравнение кривой, проходящей через заданные точки.

§ 13. Поверхности второго порядка 202
Алгебраические поверхности. Поверхности вращения. Линейчатые поверхности. Классификация поверхностей второго порядка. Асимптотические конусы гиперboloидов. Исследование общего уравнения поверхности второго порядка. Уравнение поверхности, проходящей через заданные точки.

Глава 3. Теория пределов и непрерывность функции 218

§ 14. Алгебра и начала анализа: выравнивающий курс 218
Кванторы. Методы доказательств. Математическая индукция. Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Основные множества и подмножества. Операции над подмножествами. Мощность множества. Парадоксы теории множеств. Модуль действительного числа. Метрика числовой оси. Корень из отрицательного числа. Формула Кардано. Определение и геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Алгебраическая и тригонометрическая формы представления комплексных чисел. Арифметика комплексных чисел. Алгебра комплексных чисел. Формулы Муавра. Сопряжённые корни вещественных уравнений. Матричная факторизация комплексных чисел.

§ 15. Числовые последовательности 243
Общие понятия. Предел числовой последовательности.

§ 16. Понятие функции одной переменной 254
Основные определения. Способы задания функции. Параметрические уравнения некоторых замечательных кривых. Обратная и сложная функции. Элементарные функции.

§ 17. Предел функции 262
Определения предела. Левый и правый пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Основные теоремы о пределах. Сравнение бесконечно малых величин. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Третий замечательный предел. Формула Стирлинга.

§ 18. Непрерывность функции 283
Определение непрерывности. Точки разрыва. Свойства функций, непрерывных в точке. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке. Теорема Вейерштрасса. Метод золотого сечения. Теоремы Больцано-Коши. Метод дихотомии. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора. Теорема о неподвижной точке и сжимающем отображении. Метод простой итерации.

Глава 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной 298

§ 19. Производная и некоторые её приложения 299
Определение производной. Вычисление скорости движущейся точки, теплоёмкости тела, силы тока. Уравнения касательной и нормали. Связь между понятиями непрерывности и дифференцируемости.

§ 20. Основные правила дифференцирования 304

§ 21. Производные основных элементарных функций 306

Производные показательной, логарифмической и степенной функции. Производные тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

§ 22. Дифференцирование гиперболических функций.
Правило логарифмического дифференцирования.....309
Гиперболические функции их простейшие свойства.
Производные гиперболических функций. Логарифмическое дифференцирование.

§ 23. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически.....312
Производная функции, заданной неявно. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

§ 24. Дифференциал функции 314
Определение дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила вычисления дифференциалов.

§ 25. Производные и дифференциалы высших порядков..... 317
Производные высших порядков. Формула Лейбница.
Дифференциалы высших порядков. Производная второго порядка от функции, заданной параметрически.

§ 26. Основные теоремы дифференциального исчисления.. 321
Теорема Ролля. Теорема и формула Коши. Теорема Лагранжа.
Формула конечных приращений. Формулы Тейлора и Маклорена.

§ 27. Правило Лопиталья.. 333
Раскрытие неопределенности $\| 0/0 \|$. Неопределённость $\| \infty / \infty \|$.
Неопределенности видов $\| 0 - \infty \|$, $\| \infty - \infty \|$, $\| 1^\infty \|$, $\| 0^0 \|$, $\| \infty^0 \|$.

§ 28. Исследование функции с помощью производных..... 337
Интервалы монотонности. Точки экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Схема исследования функции и построения её графика. Некоторые приложения дифференциального исчисления: простейшие задачи геометрии плоских кривых, задачи нахождения скорости изменения параметров процесса, задачи оптимизации, интерполяционные и экстраполяционные задачи.

§ 29. Геометрия плоской дифференцируемой кривой.....359
Гладкие и особые точки кривой. Точки возврата. Соприкасающаяся окружность и кривизна кривой. Нормальный вектор и кривизна кривой, заданной параметрически. Кривая в полярных координатах. Профити и спирали. Угол подъёма и кривизна профиля. Выпуклые профили. Условие Геронимуса. Эвольвента и эволюта. Эвольвента окружности. Дифференцирование плоской вектор - функции.

Глава 5. Неопределённый интеграл.....382

§ 30. Неопределённый интеграл: определение и свойства..382
Первообразная и её геометрический смысл. Неопределённый интеграл. Таблица основных интегралов. Свойства неопределённого интеграла. Обратные задачи дифференциального исчисления.

§ 31. Основные методы интегрирования.....392
Метод подстановки. Интегрирование путём замены переменной. Интегралы от функций, содержащих квадратный трёхчлен. Интегрирование по частям.

§ 32. Интегрирование рациональных функций404
Разложение многочлена на множители. Разложение рациональной функции на простейшие дроби. Интегралы от рациональных функций.

§ 33. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций419
Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

Глава 6. Определённые и несобственные интегралы.....432

§ 34. Определённый интеграл как предел интегральных сумм.....432
Суммы Дарбу и их свойства. Определение интеграла. Классы интегрируемых функций.

§ 35. Свойства определённого интеграла439

§ 36. Интеграл с переменным пределом. Формула Ньютона - Лейбница.....446

*Свойства интеграла с переменным пределом интегрирования.
Формула Ньютона - Лейбница.*

§ 37. Методы вычисления определённого интеграла.....450
Интегрирование по частям. Замена переменной в определённом интеграле. Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному промежутку.

§ 38. Приложения определённого интеграла458
Вычисление площади плоских фигур в прямоугольных координатах. Вычисление площади в полярной системе координат. Вычисление длины дуги плоской кривой. Натуральная параметризация кривой. Вычисление объёмов тел по площадям поперечных сечений. Объём тела вращения. Приложения интегралов к решению физических задач.

§ 39. Приближённое вычисление определённых интегралов.....480
Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Погрешность квадратурных формул.

§ 40. Несобственные интегралы486
Несобственные интегралы первого рода: определение и свойства. Признаки сходимости интеграла от неотрицательной функции. Абсолютная и условная сходимость интегралов. Несобственные интегралы второго рода. Приложения несобственных интегралов.

Глава 7. Пределы и дифференцирование функции нескольких переменных513

§ 41. Основные понятия функции двух или нескольких переменных и методы её графического изображения514
Определение функции двух переменных и её график. Линии уровня. Функция трёх переменных. Поверхности уровня. Абстрактное геометрическое пространство R^n . Функция n вещественных переменных. “Проклятие размерности”. Элементарные и не элементарные функции нескольких переменных.

§ 42. Предел и непрерывность функции нескольких переменных..... 525

Некоторые определения теории геометрических множеств. Компактификация плоскости и пространства. Предел функции в точке и по направлению. Непрерывность функции в точке плоскости или пространства. Классификация точек разрыва функции. Непрерывность на компакте. Метод координатного спуска. Свойства функции, непрерывной в замкнутой области.

§ 43. Дифференциальное исчисление функции двух переменных..... 544

Частные производные. Геометрический смысл частной производной. Полный дифференциал функции. Применение полного дифференциала к приближённым вычислениям. Дифференцирование сложной функции. Матрица Якоби, Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференцирование функций, заданных неявно. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Производные по направлению и градиент. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

§ 44. Минимизация дифференцируемой функции двух переменных.....568

Определения локального и глобального экстремумов. Необходимые условия существования экстремума функции. Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных. Решение задачи минимизации методами наискорейшего спуска. Условный экстремум. Метод исключения неизвестной. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

§ 45. Геометрические приложения дифференциального исчисления.....586

Уравнения огибающей линии или поверхности. Виды уравнения поверхности и пространственной кривой. Трёхгранник Френе. Кривизна и кручение кривой. Кривизна поверхности.

§ 46. Минимизация и аппроксимация дифференцируемой функции многих переменных..... 604

Экстремум и условный экстремум функции нескольких переменных. Минимизация линейных функций. Симплекс - метод. Минимизация нелинейных функций. Методы сканирования. Компромиссные решения и паретовские множества.

Аппроксимация функции по методу дифференциалов и наименьших квадратов. Матрица Грама. Принцип Лежандра. Классификация и векторная идентификация математических моделей.

Краткий именной указатель	634
Список дополнительной литературы	636
Алфавитный указатель терминов	637