УДК 681.518.2

Капустенко П.А., Илюнин О.О., Перевертайленко А.Ю., Селяков А.М., Шамраев А.А.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ БИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ

Введение. Украинские предприятия теплоснабжения, как правило, имеют древовидную топологию, определяемую распределенным географическим расположением потребителей (жилых массивов, производств). В функции предприятий входит производство теплоносителя, его транспортировка и распространение для полного и своевременного удовлетворения спроса со стороны внешних потребителей. Потребление большого количества минерального топлива приводит к отрицательному воздействию на окружающую среду и негативно влияет на экономические показатели. Это влечет необходимость формализованного описания систем управления сетями теплоснабжения с целью их анализа и построения экономных стратегий управления.

Существуют различные типы топологии рассматриваемых систем, которые определяются спецификой и размещением потребителей и промежуточных узлов распределительных тепловых районных пунктов (ТРП). В общем случае теплоноситель одновременно используется в нескольких процессах – для отопления k зданий с нагрузкой $q_k^{от}$ и для горячего водоснабжения j объектов с нагрузкой $\mathrm{q_j^{гвс}}$, таким образом, система приобретает эшелонированную структуру. Местоположение узлов играет существенную роль с точки зрения анализа динамики сети. В последние десятилетия широкое распространение получила бивалентная схема обеспечения тепловой энергией, в которой участвуют несколько узлов, производящих теплоноситель, с разной мощностью.

Предположим, что производительность и пропускная способность N узлов сети ненулевые и, учитывая, что они изменяются во времени, формально представим объект как динамическую модель сетей поставок конечным N_e потребителям.

Граф, изображающий модель сети поставок, в зависимости от стадий переработки сырья и полуфабрикатов разделяется на уровни. Уровень 1 содержит узлы сети, которые являются конечными продавцами продукции ТРП, а именно – индивидуальные тепловые пункты (ИТП) на вводах зданий. В общем случае уровень l содержит узлы, производящие и/или догревающие теплоноситель, распределяющие ресурсы, которые далее используются уровнями строго меньше l, но не менее одного вида продукции уровня (l_1).

Для графического представления сетей поставок используется ориентированный взвешенный граф, вершины которого соответствуют узлам сети и группируются в классы по мере продвижения от поставщиков к последнему классу конечных потребителей N_e. Время доставки определяет веса дуг графа, описывающих управляемые и неуправляемые потоки. Управляемые потоки перераспределяют ресурсы между узлами сети, в которых эти ресурсы могут перерабатываться (пиковый догрев теплоносителя), и планируют поставки сырья извне. Спрос на ресурсы со стороны других узлов и внешнего окружения, формирует неуправляемые потоки. Информация о путях между вершинами графа представляется в виде матрицы достижимости размерностью (N- N_e) × N.

Методология. Для математического описания сетей поставок применяются различные подходы [1] и методы исследования операций. Одним из наиболее распространенных подходов является дискретно-событийное моделирование [2], при котором используются следующие допущения:

1) выбирается период дискретизации по времени Δt и все временные интервалы считаются кратными выбранному периоду;

2) время увеличивается пошагово, текущий момент времени обозначается k = 0,1,2,..., в конце каждого периода времени состояние системы вычисляется с помощью уравнений модели;

3) состояние системы характеризуется уровнем запасов каждого вида продукции в течение данного периода.

Для описания узлов сети поставок введем следующие обозначения:

N − количество узлов сети поставок; $P=\{p_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, N}$ − производственная матрица, значение элемента p_{ij} которой равно количеству продукции i (теплоносителя с определенными характеристиками или топлива, необходимого для его производства, измеряемым в кг/ч) которое требуется для производства единицы продукции j; T_{ji}, − целочисленная переменная, значение которой кратно периоду дискретизации Δt, обозначающая время транспортировки теплоносителя из узла j в узел i; LT_i − целочисленная переменная, значение которой кратно периоду дискретизации Δt, обозначающая время выполнения заказа в узле i; C_i, CP_i − стоимости производства и хранения (соответственно) в течение периода времени Δt единицы продукции i, у.е.; h_i, W_i − максимально допустимые: пропускная способность и производительность в течение Δt (соответственно) узла i, измеряемые в кг/ч.

В качестве переменных состояния модели выбираются уровни запаса ресурсов, имеющихся в наличии $x_i(k)$, то есть таких, которые транспортируются в соответствующие узлы сети после завершения переработки к моменту времени k.

В качестве управляемых потоков модели рассматриваются объемы заявок на поставку ресурсов $u(k)$, которые формируются узлами сети в момент времени k. В качестве неуправляемых потоков рассматриваются объемы внешнего спроса на теплоноситель $q(k)$, которые поступают в момент k на узлы 1-го уровня сети поставок.

Запаздывание, относительно момента заявки требования, при пополнении запасов происходит всегда. Это следствие затрат времени на подготовку выполнения заказов (затрат времени на приготовление и догрев теплоносителя в узлах сети), транспортировку ресурсов между узлами сети, действия физических законов и технологических ограничений работы системы, наличие человеческого фактора.

Для точного определения динамики сетей поставок в математической модели необходимо учесть временные запаздывания, порождаемые. Поэтому необходимо определить значения периодов запаздывания управляемых потоков между узлами сети и найти их максимальное значение:

$$\Lambda_i^{\max} = \max_j \Lambda_{ji}, \qquad \Lambda_{\max} = \max_i \Lambda_i^{\max}\ , \ \ i, j = \overline{1, N}\ , \tag{1}$$

где $\Lambda_{\mathbf{ij}} = T_{\mathbf{ij}} + LT_{\mathbf{i}}$, − период запаздывания потоков между узлами j и i , т.е. заявка на поставку теплоносителя j, отправленная из узла i в момент времени k, будет доставлена в момент времени (k+ $T_{\mathbf{ij}}$), и будет обработана и помещена на «выдачу» в момент времени (k+ $T_{\mathbf{ij}}$+ $LT_{\mathbf{i}}$).

Тогда следующее рекуррентное соотношение:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda_{\max}} B_t \cdot u(k-t) + E \cdot q(k) \tag{2}$$

описывает динамику сети поставок с запаздываниями управляемых потоков, где $x(k) \in R^N$ – вектор состояний системы; $q(k) \in Q = \{q \in R^d \,|\, 0 < q \le q_{max}\}$ – вектор неуправляемых воздействий, $u(k) \in R^m$ – вектор управляемых воздействий; структура сети определяется структурой матриц влияния возмущений $E \in R^{\mathbf{Nxd}}$, и матриц управлений обработки заявок $B_t \in R^{\mathbf{Nxm}}$, на моменты времени t= 0,1…, Λ_{max}. Матрица внешних возмущений (заявок) $E=\{e_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, N}$ − где $e_{ij} \neq 0$ только тогда, если существует неуправляемый поток спроса q_j на продукцию узла i.

С учетом физического смысла введенных переменных, должны выполняться следующие ограничения:

1) переменные, описывающие уровни запаса ресурсов в узлах сети, а также управляемые и неуправляемые потоки должны быть неотрицательными;

2) уровни запаса, имеющиеся в наличии, не должны превышать максимальную потребность соответствующих узлов;

3) размеры заявок не должны превышать допустимые объемы транспортировок.

Указанные ограничения могут быть представлены в виде выпуклых многогранников в пространстве соответствующей размерности:

$$x(k) \in X = \{x \in R^N \,|\, 0 \le x \le x^+\}, \quad u(k) \in U = \{u \in R^{\mathbf{m}} \,|\, 0 \le u \le u^+\}, \tag{3}$$

где элементы векторов x^+ и u^+ описывают максимальные объемы хранилищ и транспортировок считаются заданными (тепловые мощности, производительности насосов).

Для определения оптимальной стратегии управления запасами необходимо точное задание характеристик внешнего спроса – интенсивности спроса в детерминированных моделях и вероятностных характеристик в стохастических моделях. При решении практических задач эти характеристики, как правило, точно не известны. Поэтому используется подход, предложенный в работе [3], согласно которому предполагается, что сеть поставок функционирует в условиях неизвестного, но ограниченного спроса, который характеризуется нечетким интервалом. Это означает, что каждая компонента спроса $q_k^{om}(T_{нв})$ и $q_j^{гвс}(t,s)$ является нечеткой величиной и зависит от факторов неопределенности (температуры наружного воздуха – $T_{нв}$, времени суток – t, времени года – s), но ее значения принадлежат нечеткому интервалу, границы которого определяются на основании изучения статистики. Тогда к рассмотренным ограничениям добавляется:

$$q(k) \in Q = \{q \in R^d \mid q^- \le q \le q^+\}, \tag{4}$$

где векторы q^- и q^+ определяют граничные значения спроса.

Для получения модели сети поставок без запаздываний применяется метод расширения пространства состояний. В результате модель (2) примет вид:

$$\xi(k+1) = A\cdot\xi(k) + F\cdot u(k) + G\cdot q(k), \quad x(k) = C\xi(k), \tag{5}$$

где блочно-диагональные матрицы: A – состояний сети, F – управляющих воздействий, G – заявок, формируются соответственно структуре матрицы достижимости, описывающей граф системы. Расширенная модель имеет большую размерность, и после замены базиса вектор состояний примет вид:

$$\xi^*(k) = [\, x(k)^T,\ \cdot u(k-1)^T, u(k-2)^T, \ldots, u(k-\Lambda_{max})^T\,]^T. \tag{6}$$

Динамика системы (5) эквивалентна динамике системы, вектор состояний которой имеет вид:

$$\xi^*(k) = [\, z(k)^T,\ \cdot u(k-1)^T, u(k-2)^T, \ldots, u(k-\Lambda_{max})^T\,]^T, \tag{7}$$

где переменные $z(k) \in R^N$ называют фиктивными уровнями запаса и определяют как сумму уровня запаса ресурсов, «находящихся в хранилищах», и ресурсов, которые находятся в процессе транспортировки между узлами сети:

$$z(k) = x(k) + \sum_{t=1}^{\Lambda_{\max}} \hat{B}_t \cdot u(k-t), \quad \text{где} \quad \hat{B}_i = \sum_{t=i}^{\Lambda_{\max}} B_t \quad , i = \overline{1, \Lambda_{\max}}. \tag{8}$$

Полученная система с вектором состояний $\xi^*(k)$ может быть декомпозирована на две подсистемы. Первая представляет собой модель сети с нулевыми задержками поставок, которая описывается уравнением:

$$z(k+1) = z(k) + B\cdot u(k) + E\cdot q(k), \quad \text{где } B = \sum_{t=0}^{\Lambda_{\max}} B_t. \tag{9}$$

Переменными состояний второй подсистемы являются задержанные управляющие воздействия $u(k-t)$, $t = \overline{1, \Lambda_{\max}}$ расширенной модели сети (5). При этом вторая подсистема является асимптотически устойчивой. Поэтому для анализа и синтеза стратегии управления запасами целесообразно применение «мгновенной» модели распределенной сети поставок (9).

Задача *синтеза системы управления запасами*, являющаяся основной целью работы, состоит в отыскании стратегии управления, которая задает управляемые потоки сети в соответствии с поставленной целью управления и с учетом ограничений (3,4). Множество допустимых начальных условий определяется выражением:

$$X_0 = (\{x : -\delta^- \le x \le x^+ - \delta^+\} - B\,U) \cap \{x : 0 \le x \le x^+\}, \tag{10}$$

где векторы δ^- и δ^+, определяющие величины наименьшего и наибольшего влияния внешнего спроса, вычисляются следующим образом:

$$\delta^- = \min_{q\in Q} E_i \cdot q\,, \ \delta^+ = \max_{q\in Q} E_i \cdot q\,, \tag{11}$$

где E_i обозначает i-ю строку матрицы E.

Одним из главных вопросов, на которые необходимо дать ответ в процессе анализа, является следующий: существует ли для построенной модели сети поставок допустимая стратегия управления, которая обеспечивает полное и своевременное удовлетворение внешнего спроса при заданных ограничениях. Допустимая стратегия управления существует, согласно теореме [3], если и только если выполняется условие:

$$EQ \subset -BU. \tag{12}$$

Условие (12) выполняется, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $EQ + \varepsilon\Omega \subset -BU$, где $\Omega = \{x\colon 0 \le x \le x^+ -(\delta^+ - \delta^-)\}$. Множество $EQ + \varepsilon\Omega$ представляет собой множество векторов, которые могут быть представлены в виде $x = [E \quad I] \begin{bmatrix} q \\ \varepsilon\omega \end{bmatrix}$, где $q \subset Q$, $\varepsilon \subset \Omega$.

Тогда множество $EQ + \varepsilon\Omega$ содержится в $-BU$, если и только если условие:

$$x^{ij} = \begin{bmatrix} E & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^i \\ \varepsilon\omega^j \end{bmatrix} \in -BU \tag{13}$$

выполняется для каждого $q^i \in \mathrm{vert}\{Q\}$ и $\omega^j \in \mathrm{vert}\{\Omega\}$, где vert $\{A\}$, обозначает множество вершин многогранника A. Значение ε, удовлетворяющее условию (13), может быть найдено с помощью следующего алгоритма:

1) установить $\varepsilon = +\infty$;

2) для каждого $q^i \in \mathrm{vert}\{Q\}$ и $\omega^{j\in}$ vert$\{\Omega\}$, решить следующую задачу линейного программирования (ЛП):

$$\mu_{ij} = \max \varepsilon, \quad Eq^i + B\varepsilon\omega^j = -Bu, \quad 0 \le u \le u^+, \varepsilon \ge 0. \tag{14}$$

Если хотя бы для одного из наборов q^i и ω^j задача (14) не имеет решения, значит для данной модели сети поставок условие (12) не выполняется. В противном случае установить $\varepsilon = \min\limits_{i,j} \{\varepsilon, \mu_{ij}\}$.

3) Если ε =0, то нестрого выполняется условие $EQ \subseteq -BU$, поэтому сходимость последовательности $x(k)$, $k = 0,1,2,...$ к некоторому оптимальному уровню запасов x^{opt} не гарантируется.

4) Если $\varepsilon > 0$, значит условие (12) выполняется.

Если условие (12) выполняется, тогда выбор допустимой стратегии управления для модели сети с нулевыми задержками поставок (9) определяется следующими соображениями. Определяются конструктивные ограничения сети поставок для переменных, определяющих фиктивные уровни запаса:

$$z(k) \in Z = \{z \in R^N \mid z^- \le z \le z^+\}. \tag{15}$$

Значения вектора нижней границы z^- должны обеспечивать неотрицательность значений вектора наличного уровня запаса $x(k)$. Тогда из (8) следует, что «минимум» значения вектора нижней границы определяются выражением:

$$z^- = \sum_{i=1}^{\Lambda_{\max}} B_i \cdot u^+. \tag{16}$$

На практике, чтобы обеспечить $x(k) > 0$, накладывается ограничение (16), согласно которому чем выше мощность дуги, которая определяется максимальным объемом транспортируемого теплоносителя, тем выше должна быть нижняя граница. В моделях реальных объектов, чем большими являются мощности управляемых дуг, тем большими могут быть мгновенные объемы отгрузки ресурсов (массы теплоносителя в системах транспортировки), которые невозможно сразу компенсировать из-за наличия запаздываний. Чтобы избежать математического «опустошения складов», понадобятся большие страховые уровни запаса (теплогенерирующие мощности, мощности насосных перекачивающих станций).

Для решения этой проблемы необходимо минимизировать стоимость величины в правой части выражения (16), используя вектор стоимостей производства единицы продукции $C=\{C_i > 0\}$, $i = 1, N$. Тогда необходимо найти вектор $\hat{u}^+$ нечетких значений u такой, что $0 \le \hat{u}^+ \le u^+$, который минимизирует соответствующую стоимость при выполнении условия $EQ \subset -B\hat{U}$, где $\hat{U} = \{u\colon 0 \le u \le \hat{u}^+\}$.

Это означает, что если управляемые дуги сети не используются в полную силу, то можно заменить в выражении (16) u на $\hat{u}^+$ чтобы свести к минимуму затраты. Значения вектора определяются путем решения следующей задачи ЛП:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{\Lambda_{\max}} B_i\right)\cdot \hat{u}^+ ,\quad 0\le \hat{u}^+ \le u^+ ,\, EQ \subset -B\hat{U}. \tag{17}$$

Тогда векторы, определяющие оптимальную нижнюю и верхнюю границы фиктивного уровня запаса, вычисляются следующим образом:

$$\check{z}^- = \sum_{i=1}^{\Lambda_{\max}} B_i\cdot \hat{u}^+,\quad z^+ = x^+ + \sum_{i=1}^{\Lambda_{\max}} B_i\cdot \hat{u}^+, \tag{18}$$

где $\check{z}^-$ – нечеткое значение нижней границы z. Для организации допустимой стратегии управления, формируемой в виде обратной связи по состоянию $u(k) = \Phi(z(k))$ с учетом ограничений (15), кроме выполнения условия (12), необходимо выполнение условия $\check{z}^- + (\delta^+ - \delta^-) \le z^+$.

Определение допустимой стратегии управления, гарантирующей полное удовлетворение внешнего спроса $q(k)\in Q$, подразумевает решение на каждом k-м шаге следующей задачи ЛП [5]:

$$u(k) = \Phi(z(k)) = \arg\min_{\lambda\ge 0}\lambda,\quad \overline{z} \le z(k) + Bu(k) \le \overline{z} + \lambda\theta, u(k)\in \hat{U}, \tag{19}$$

где $\overline{z} = \check{z}^- - \delta^-$, $\theta = z^+ - \check{z}^- - (\delta^+ - \delta^-)$.

Выводы. Предложенный подход к построению математической модели распределенной сети поставок позволяет учесть запаздывания управляемых потоков и интервальную нечеткость внешнего спроса, что обеспечивает возможность формирования допустимой стратегии управления как стандартной ЛП-задачи.

Литература

1. Питеркин С.В., Оладов Н.А.,Исаев С.Н.Практика применения EPR-систем / Питеркин С.В. – Альпина Паблишер, 2003 – 368 с.

2. Daganzo C.A. Theory of Supply Chains. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003– p.125.

3. Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W. Least inventory control of multi-storage systems with non-stochastic unknown input // IEEE Transaction on robotics and automation. 1997. Vol. 13, p. 633–645.

4. Hennet, J.-C., A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control //Automatica. 2003, № 39, p. 793–805.

5. Дорофеев Ю.И., Никульченко А.А. Анализ распределенных сетей поставок как объектов автоматического управления.—Вісник НТУ «ХПІ»// Збірник наукових праць, тематичний випуск «Системний аналіз, управління та інформаційні технології».–Харків: НТУ «ХПІ», 2012, Вип.29, с. 15–21.

Bibliography (transliterated)

1. Piterkin S.V., Oladov N.A.,Isaev S.N.Praktika primenenija EPR-sistem Piterkin S.V. –Al'pina Pablisher, 2003 – 368 p.

2. Daganzo C.A. Theory of Supply Chains. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003– r.125.

3. Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W. Least inventory control of multi-storage systems with non-stochastic unknown input IEEE Transaction on robotics and automation. 1997. Vol. 13, p. 633–645.

4. Hennet, J.-C., A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control Automatica. 2003, # 39, r. 793–805.

5. Dorofeev Ju.I., Nikul'chenko A.A. Analiz raspredelennyh setej postavok kak ob"ektov avtomaticheskogo upravlenija.—Visnik NTU «HPI» Zbirnik naukovih prac', tematichnij vipusk «Sistemnij analiz, upravlinnja ta informacijni tehnologiї».–Harkiv: NTU «HPI», 2012, Vip.29, p. 15–21.

УДК 681.518.2

Капустенко П.О., Ілюнін О.О., Перевертайленко О.Ю., Селяков О.М., Шамраєв А.А.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗПОДІЛЕНОЇ БІВАЛЕНТНОЇ СИСТЕМИ ТЕПЛОПОСТАЧАННЯ

У роботі розглянуто систему, що являє собою сукупність взаємопов'язаних об'єктів, що здійснюють виробництво, транспортування і поширення теплоносія. Запропоновано підхід до побудови математичної моделі розподіленої теплової мережі з урахуванням запізнювання керованих потоків і інтервальної нечіткості зовнішнього попиту. Формування допустимої стратегії управління в *k*-момент часу зводиться до рішення стандартної задачі лінійного програмування.

Kapustenko P.O., Ilunin O.O., Perevertaylenko O.Yu., Selyakov O.M., Shamraev A.A.

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE DISTRIBUTED A BIVALENT HEAT SUPPLY SYSTEM

The system of a connected objects set that generate, transport and distribute the heat by the heat carrier is discussed. The approach of distributed heating system is proposed taking into account the controlled streams delay and fuzzy intervals of external demand. The generation of permissible strategy management at *k*-th moment leds to solution of the uniform linear programming problem.