

**МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОГО БИНГАМОВСКОГО МАТЕРИАЛА
С ПОКАЗАТЕЛЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДАВЛЕНИЯ**

Постановка проблемы в общем виде. Изучение движения бингамовских материалов дает необходимую информацию для того, чтобы качественно, научно обоснованно организовать проведение различных процессов переработки материалов. Движение бингамовских материалов, как движение любых иных материалов с ньютоновской реологией, в равной мере зависит как от уравнения состояния, так и от граничных условий, в которых происходит движение. Граничные условия обеспечивают единственность решения и его связь с формой области движения, а уравнение состояния определяют общий вид решения.

Анализ последних исследований и публикаций. Классический бингамовский материал подразумевает постоянство плотности, вязкости, порога текучести. Материал, для которого эти условия не выполнены, является неклассическим. Зависимость характеристик уравнения состояния от аргументов представляет собой степенную или рациональную функцию от инвариантов тензора скорости деформаций [1, 2, 3, 4]. Введение в качестве аргумента давления в уравнение состояния встречается значительно реже, но вполне соответствует традиции, смысл которой заключается в том, что классические уравнения состояния, будучи неспособными соответствовать реальным материалам требуют неклассического расширения. Одним из таких видов расширения является введение в уравнение состояния зависимости от давления через вязкость и порог текучести. В сочетании с условиями баротропности получается модель, которая в качестве прототипов охватывает многие реальные материалы пищевой и химической технологий. Используемые там материалы отличаются большим разнообразием свойств, в особенности, в пищевой промышленности. Часто встречаются смеси материалов различной природы, выступающие в качестве связующих, наполнителей, сгустителей, красителей, ароматизаторов, стабилизаторов и т.д. [5, 6]. Каждый из перечисленных здесь, с точки зрения их функций в готовом продукте, материалов вносит определенный вклад в уравнение состояния. Для маловязких материалов роль компонентов в смеси играет меньшую роль, чем для высоковязких, ограничиваясь конвективным массообменом [7, 8]. Для высоковязких материалов компоненты в смеси изменяют уравнение состояния, предопределяя общие свойства течения. Возникающие в ходе течения локальные значения давления напряжения сдвига определяют уровень механофизических и механохимических воздействий на компоненты материала. Зависимость вязкости от давления отражает на макроуровне межмолекулярные взаимодействия, а зависимость от давления порога текучести в бингамовском материале обычно отражает переменную степень консолидации структурных элементов материала.

Цель и задачи статьи. Особенности движения высоковязких материалов, бингамовских в том числе, является основным фактором при конструировании червячных машин. В этих машинах основным элементом рабочей камеры является канал трапецеидальной формы, стороны которого могут быть отрезками прямых или кривых. Поперечные сечения таких каналов принято аппроксимировать прямоугольником [9, 10, 11]. При такой аппроксимации возникает вопрос о том, какой прямоугольник является наилучшим. Обычно используют изопериметрическое приближение [12]. Вся рабочая камера червячной машины представляет собой совокупность каналов с разными поперечными сечениями, которые заменяются совокупностью прямоугольных каналов той же длины. Стенки каналов образуются внутренней поверхностью корпуса машины и внешними поверхностями червяков (шнеков) или червячных элементов (если червяк является составным) [9, 10, 11, 12]. Движение червяка относительно корпуса означает движение различных стенок канала в разных направлениях. Несмотря на численные отличия, скорости движения всех стенок канала пропорциональным скорости вращения червяка, и зависят от угла подъема его винтовой линии [11, 12]. Для увеличения давления и напряжений сдвига в материале, расположенном в рабочей камере машины, каналы, из которых она состоит, делаются мелкими [10, 11, 12]. В таких каналах высоту прямоугольника, лежащего в поперечном сечении можно считать малой в сравнении с шириной так, что канал можно считать плоским.

Изложение основного материала. В соответствии с вышесказанным, в настоящей работе рассматривается течение баротропного сжимаемого материала, вязкость и порог текучести которого зависят от давления. Течение изучается в плоском канале. Движение границ предполагается чисто продольным. Поле течения продольным не является. Появление поперечной составляющей скорости обусловлено зависимостью параметров реологической модели от давления. Рассмотрение осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматривается упомянутая реологическая модель, но без сжимаемости. На втором

етапе производится учет фактора баротропной сжимаемости. Метод, принятый в данной работе, является продолжением, который применялся авторами при построении моделей течения бингамовского классического материала в прямоугольном канале в продольном и поперечном течениях [13, 14, 15, 16].

На рисунке 1 схематически показаны течения материала в канале: поперечном (а) и продольном (б) разрезах.

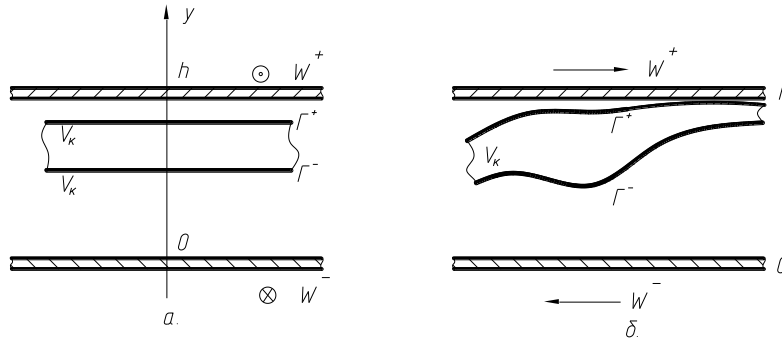


Рисунок 1 – Схема течения материала в канале: а – поперечный разрез; б – продольный разрез

Уравнения течения в напряжениях имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}; & v_z &= v_z(z, y); & \tau_{ik} &= (\mu + \frac{\tau}{\sqrt{I_2}}) (\frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{\partial v}{\partial x_i}); \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0; & v_y &= v_y(z, y); & \mu &= \mu(P); I_2 = \sum_{i,k} (\frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i})^2 \\ & & & & \tau &= \tau(P); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\tau^2 = 2\tau_{zz}^2 + 2\tau_{zy}^2 \text{ (на границах ядра),}$$

в котором τ_{zz} и τ_{zy} – компоненты тензора сдвиговых напряжений в материале; P – давление в материале; z и y – продольная и поперечная координаты в канале соответственно; v_z и v_y – продольная и поперечная составляющие скорости материалов в канале соответственно; μ и τ – вязкость и порог текучести материала соответственно.

В соответствии со схемой, развиваемой в работах авторов уравнения и соотношения (1) следует привести к задаче течения с продольной скоростью v_z , зависящей от переменных z и y , в которой продольная скорость определяется как трехчлен по переменной y , коэффициенты которого зависят только от продольной координаты. Такое представление является факторизацией решения и является приближением к точному решению. Решение в таком виде легко согласуется с граничными условиями, в результате чего получается два уравнения относительно ширины твердого ядра и его границ. Для задач течения бингамовского материала с постоянными вязкостью и порогом текучести уравнения модели сразу дают границы ядра и скорость его движения. В данном случае, в котором вязкость и порог текучести зависят от давления конечные уравнения являются не алгебраическими, а смешанными – дифференциально-алгебраическими. Они позволяют, в принципе, найти и зависимость давления от продольной координаты, после чего получаются зависимости для границ твердого ядра и скорость его движения. Суть предлагаемого подхода состоит в том, чтобы выразить компоненту тензора напряжения τ_{zz} через компоненту τ_{zy} как для уравнения равновесия в напряжениях, так и для условия на границах ядра. Компонента τ_{zz} выражается через компоненту τ_{zy} следующим образом:

$$\frac{\tau_{zz}}{\tau_{zy}} = \alpha_L \frac{\frac{\partial v_z^\pm}{\partial \zeta_L} \cdot (1 \pm \gamma)}{\frac{\partial v_z^\pm}{\partial \xi} - \alpha_L^2 \frac{\partial}{\partial \zeta_L} \int \frac{\partial v_z^\pm}{\partial \zeta_L} d\xi};$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{z}{L}; & 0 \leq \zeta_L \leq 1; \\ \xi &= \frac{y}{h}; & 0 \leq \xi \leq 1; \\ \alpha_L &= \frac{h}{L}; & \gamma^\pm = \frac{I^\pm}{h}, \end{aligned} \quad (2)$$

где L – длина прямоугольного канала; h – высота прямоугольника в сечении канала; I^\pm координаты границ твердого ядра, знаки «+» и «-» отмечают значения скорости течений, расположенных между верхней границей канала и ядра (плюс) и расположенных между нижней границей канала и ядра (минус). Если использовать для поперечной производной продольной скорости течения оцен-

ку: $\frac{\partial v_z^\pm}{\partial \xi} \sim (w^\pm - v_k)(1 \mp \gamma^\pm)$, в которой w^\pm – значение продольных скоростей границ канала, а v_k – зна-

чение скорости движения твердого ядра, то отношение $\frac{\tau_{zz}}{\tau_{zy}}$ можно записать так:

$$\frac{\tau_{zz}}{\tau_{zy}} = \alpha_L \rho^\pm \cdot (1 \pm \gamma^\pm), \quad \rho^\pm = \frac{\frac{\partial v_z^\pm}{\partial \zeta_L}}{w^\pm - v_k - \alpha_L^2 \frac{\partial}{\partial \zeta_L} \int \frac{\partial v_z^\pm}{\partial \zeta_L} d\xi}. \quad (3)$$

Прежде чем использовать выражение (3) необходимо отметить следующее обстоятельство. Запись уравнения течения в напряжениях с помощью безразмерных координат ζ_L и ξ приводит к тому, что производная от давления по продольной координате приобретает множитель α_L , который, имея ввиду происхождение рассматриваемых каналов, всегда гораздо больше единицы. В предельном случае $\alpha_L > 0$ исчезнет движущая сила процесса – продольный градиент давления. На самом деле с неограниченным ростом длины канала растет и разность давлений на его концах так, что градиент давлений остается конечным, чтобы отразить этот факт, необходимо использовать безразмерное давление P такое, что разное давление P связано с безразмерным давлением \bar{P} множителем P^* таким, что разность давлений на концах канала равна P^* ; и $P^* \alpha_L \sim 1$. Тогда, фактический множитель α_L при градиенте давления \bar{P} не присутствует; и предельный переход $\alpha_L \rightarrow 0$ можно выполнить без того, чтобы потерять движущую силу течения. Это равносильно операции деления компонентов тензора напряжений τ_{zz} и τ_{zy} на величину изменения давления в поперечном направлении на расстоянии ширины каналы, равную $(P_L - P_0)h/L$. Чтобы не вводить новых обозначений ниже везде под $\bar{\tau}_{zz}$ и $\bar{\tau}_{zy}$ понимаются безразмерные компоненты $\bar{\tau}_{zz} / ((P_L - P_0)h/L)$ и $\bar{\tau}_{zy} / ((P_L - P_0)h/L)$.

В безразмерных координатах производные от компонента $\bar{\tau}_{zy}$ по направлениям имеют один порядок:

$$\frac{d\bar{\tau}_{zy}}{d\zeta_L} = \frac{d\bar{\tau}_{zy}}{d\xi}. \quad \text{С учетом этого соотношения и сказанного выше для величины продольной скорости}$$

$v_z^\pm(z, y)$ можно записать следующие уравнения и граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_L^2 P^\pm (1 \mp \gamma^\pm)} &= \frac{d\bar{\tau}_{zy}}{d\xi}; & \bar{\tau}_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v_z^\pm}{\partial y} + \frac{\partial v_y^\pm}{\partial z} \right); \\ \bar{\tau}_{zy}(\gamma^\pm) &= \pm \frac{\frac{\bar{\tau}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + \alpha_L^2 (P^\pm)^2 \cdot (1 \mp \gamma^\mp)^2}}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_z^+(h) &= w^+; & v_z^-(-h) &= w^-; \\ v_z^+(\Gamma^+) &= v_k; & v_z^-(\Gamma^-) &= v_k. \end{aligned}$$

Интегрирование уравнения (4) приводит к такому выражению для скорости v_z^\pm :

$$v_z^\pm(\zeta_L, \xi) = \frac{h}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \frac{\xi^z}{1 + \alpha_L^2 P^\pm (1 \mp \gamma^\pm)} + c_1 \xi + (\alpha_L^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta_L} \int \frac{\partial v_z^\pm}{\partial \zeta_L} d\xi) \xi + c_2^\pm, \quad (5)$$

в котором c_1 и c_2^\pm – постоянные, которые нужно найти с помощью граничных условий. Постановка в (5) значений $\xi = \pm 1$ и γ^\pm и условие (1) на границах твердого ядра приводит к следующей системе уравнений для c_2^\pm :

$$\begin{aligned} \frac{h}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \frac{1}{1 + \alpha_L^2 P^+ (1 - \gamma^+)} + \alpha_L^2 \frac{\mu}{h} \Delta^+ + c_1 + c_2^- &= w^+; \\ \frac{h}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \frac{1}{1 + \alpha_L^2 P^- (1 + \gamma^-)} - \alpha_L^2 \frac{\mu}{h} \Delta^- - c_1 + c_2^- &= w^-; \\ \frac{h}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \frac{(\gamma^+)^2}{1 + \alpha_L^2 P^+ (1 - \gamma^+)} + \alpha_L^2 \frac{\mu}{h} \Delta^+ \gamma^+ + c_1 \gamma^+ + c_2^+ &= \\ = \frac{h}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \frac{(\gamma^-)^2}{1 + \alpha_L^2 P^- (1 + \gamma^-)} + \alpha_L^2 &; \\ \Delta^- \gamma^- + c_1 \gamma^- + c_2^- &; \\ \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \cdot \frac{\gamma^+}{1 + \alpha_L^2 P^+ (1 - \gamma^+)} + C_1 &= \frac{\bar{\tau} \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \alpha_L^2 (P^+)^2 (1 - \gamma^+)^2}}; \\ \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \cdot \frac{\gamma^-}{1 + \alpha_L^2 P^- (1 + \gamma^-)} + C_1 &= \frac{\bar{\tau} \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \alpha_L^2 (P^-)^2 (1 + \gamma^-)^2}}; \\ \Delta^\pm &\equiv \frac{\partial}{\partial \zeta_L} \int \frac{\partial v_z^\pm}{\partial \zeta_L} d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Из последних двух уравнений выражения для c_1 подставляются в первые два уравнения, после чего эти постоянные исключаются. Третье уравнение системы (6) и разность двух последних уравнений приводит к двум уравнениям для давления и границ ядра:

$$\frac{(1 - \gamma^+)^2}{1 + \alpha_L^2 P^+ (1 - \gamma^+)} - \frac{(1 + \gamma^-)^2}{1 + \alpha_L^2 P^- (1 + \gamma^-)} = \frac{2\mu(w^+ - w^-)}{h d\bar{P}/d\zeta_L} + \alpha_L^2 \frac{2\mu}{h d\bar{P}/d\zeta_L} [\Delta^+ (1 - \gamma^+) + \Delta^- (1 + \gamma^-)];$$

$$\frac{\gamma^+}{1+\alpha_L^2 P^+(1-\gamma^+)} - \frac{\gamma^-}{1+\alpha_L^2 P^-(1+\gamma^-)} = \frac{\bar{\tau}/\sqrt{2}}{d\bar{P}/d\zeta_L} \cdot \left[\frac{1}{1+\alpha_L^2 (P^+)^2 (1-\gamma^+)^2} + \frac{1}{1+\alpha_L^2 (P^-)^2 (1+\gamma^-)^2} \right]; \quad (7)$$

$$v_k = \frac{w^+ + w^-}{2} - \frac{h}{4\mu} \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \left[\frac{(1-\gamma^+)^2}{1+\alpha_L^2 P^+(1-\gamma^+)} + \frac{(1+\gamma^-)^2}{1+\alpha_L^2 P^-(1+\gamma^-)} \right] + \alpha_L^2 \frac{1}{2} [\Delta^+(1-\gamma^+) + \Delta^-(1+\gamma^-)].$$

Выражения для скорости движения твердого ядра v_k представляет собой уравнение первого порядка для давления $\bar{P}(\zeta_L)$, а само давление должно удовлетворить граничным условиям на концах канала: $P(\zeta_l = 0) = \bar{P}_0$; \bar{P}_L . Для этого имеется одна постоянная интегрирования, а в роли второй постоянной выступает величина v_k . Первые два уравнения в (7) служат для нахождения границ ядра γ^\pm . Для материала, у которого μ и τ – постоянные, $\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} = const$; и v_k дается третьим уравнением из (7). Тем самым это уравнение превращается в определение величины v_k . При этом границы γ^\pm ядра становятся постоянными, а $\Delta^\pm \equiv 0$.

Модель течения неклассического бингамовского материала, которая сведена к совокупности уравнений (7) можно распространить на сжимаемые материалы, удовлетворяющие условию баротропности. Баротропный материал отличается от несжимаемого видом уравнения сохранения количества вещества и видом диагональных компонентов тензора скорости деформаций [17]. Уравнение состояния и сохранения количества вещества можно записать следующим образом:

$$\sigma_{ik} = -P\sigma_{ik} + \left(\mu + \frac{\tau}{\sqrt{I_2}} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \sigma_{ik} \right); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) &= 0; \\ \dot{I}_2 &= \sum_{i,k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \sigma_{ik} \right)^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где σ_{ik} – означает компоненты полного тензора напряжений в материале. Из этих выражений следует, что выражения и уравнения (3)–(7) сохраняют свой общий вид, а представления для величин ρ^\pm и Δ^\pm изменяются и становятся такими:

$$\begin{aligned} \rho^\pm &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\left[\frac{\partial v_z^\pm}{\partial \zeta_L} + \frac{2\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial \rho v_z^\pm}{\partial \zeta_L} d\xi \right) \right]}{w^\pm - v_k - \alpha_L^2 \frac{\partial}{\partial \zeta_L} \left(\frac{1}{P} \int \frac{\partial \rho v_z^\pm}{\partial \zeta_L} d\xi \right) \cdot (1 \mp \gamma^\pm)}; \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dP} \left(\frac{dP}{dP} v_z + \frac{dP}{dy} v_y \right); \\ \Delta^\pm &= \frac{\partial}{\partial \zeta_L} \left(\frac{1}{P} \int \frac{\partial P v_z}{\partial \zeta_L} d\xi \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (9) с формулами (10) составляют модель сжимаемого баротропного бингамовского материала с зависящими от давления вязкостью и порогом текучести.

Вывод уравнений данной модели опирается на два принципиальных момента. Первый момент состоит в том, что качественно оценивались производные $\frac{\partial v_z^\pm}{\partial \xi}$, и второй момент состоит в том, что в безразмерных переменных продольные и поперечные производные компонента τ_{zy} одного порядка. Коль скоро эти допущения сделаны, модель с необходимостью принимает вид уравнений (9). Далее возможно развитие модели в таких направлениях. На первом направлении для величин ρ^\pm и Δ^\pm делаются априорные оценки с помощью граничных условий на стенках канала и на его торцах. Тогда, как уже отмечалось, уравнение (9) разрешаются относительно давления $P(z)$ и границ ядра $\gamma^\pm(z)$, причем для последних уравнения являются алгебраическими. На втором направлении величины ρ^\pm и Δ^\pm считаются функциями координаты $z(\zeta_L)$. Для их определения необходимо использовать выражение (6) для скорости v_z^\pm . При этом, ввиду того, что скорость v_z^\pm зависит от величин γ^\pm , а ρ^\pm и Δ^\pm содержит производные по z для определения границ ядра $\gamma^\pm(z)$ получаются нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка. Однозначная разрешимость этих уравнений требует задать на торцах канала условия вида: $\gamma^\pm(\zeta_L = 0) = \gamma_0^\pm$; $\gamma^\pm(\zeta_L = 1) = \gamma_L^\pm$. Таким образом уравнения (9) превращаются в совокупность трех дифференциальных уравнений – двух уравнений второго порядка для γ^\pm , и одного дифференциального уравнения первого порядка для давления, в котором скорость ядра v_k выполняет роль недостающей постоянной.

В последующем изложении изучаются некоторые решения модели в приближении $\varepsilon_L = 0$ то есть не зависящие от выбора одного из двух описанных направлений, а также выводятся уравнения первого порядка по малости параметра ε_L^2 в рамках первого направления.

В уравнения (7) входит естественный малый параметр ε_L , который для каналов, образующих рабочую камеру червячной машины весьма мал [9]. Поэтому имеет смысл рассмотреть решение этих уравнений в приближении $\varepsilon_L = 0$. В этом случае для производной $\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L}$ получается следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\left(-v_k + \frac{w^+ + w^-}{2} \right) \cdot \frac{4\mu}{h} = \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \left\{ \left[1 - \frac{\bar{\tau}}{\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L}} - \frac{\frac{\mu \cdot \frac{w^+ + w^-}{2}}{2h} \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L}}{\frac{\tau}{\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L}} - 1} \right]^2 + \left[1 - \frac{\bar{\tau}}{\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L}} + \frac{\frac{\mu w^+ - w^-}{2h} \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L}}{\frac{\tau}{\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L}} - 1} \right]^2 \right\} - \frac{2h}{\mu} \varepsilon_L^2 \left[\Delta^+ (1 - \gamma^+) + \Delta^- (1 + \gamma^-) \right]. \quad (11)$$

Сначала рассматривается течение с неподвижными границами, движущей силой которого является градиент давления. В таком течении $w^+ = w^- = 0$. Тогда для величины $\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L}$ получается квадратное уравнение, решение которого имеет вид:

$$\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} = \left(\frac{v_k \mu}{\Delta P_h h} - \tau \right) \pm \left(\frac{v_k \mu}{\Delta P_h h} - \tau \right)^2 - \tau^{-2}, \quad \mu = \mu(P), \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}(P). \quad (12)$$

Даже тогда, когда зависимости от \bar{P} являются простейшими, это уравнение не интегрируется в квадратурах. Для каждого конкретного вида зависимостей $\mu(\bar{P})$ и $\tau(\bar{P})$ требуется численное решение. Однако имеется специальный случай, когда, с одной стороны, можно получить явный результат большой

общности, а с другой стороны, с серьезным ограничением на эту общность. Это случай, когда $\mu(\bar{P})$ и $\tau(\bar{P})$ пропорциональны друг другу. Если коэффициент пропорциональности между ними обозначить через λ , то для произвольного характера зависимости, например, $\mu(\bar{P})$, для давления P получается такое соотношение:

$$\int \frac{\bar{P}}{P_0} \frac{d\bar{P}}{\mu(\bar{P})} = \left[\left(\lambda - \frac{v_k}{\Delta P_h h} \right) + \sqrt{\frac{v_k}{\Delta P_h h} \left(\frac{v_k}{2h\Delta P_h} - \lambda \right)} \right] \zeta_L. \quad (13)$$

Соотношение (13) является тривиальным следствием (12), в котором перед квадратным корнем оставлен знак «плюс». Выбор знака продиктован тем обстоятельством, что если в формуле (12), положить $\tau \equiv 0$, $\mu = const$ то для v_k должно получиться значение скорости вязкого ньютоновского течения на оси плоского канала. Такому соответствию удовлетворяет выбор знака «плюс». Величина v_k определяется из условия, что $\bar{P} = \bar{P}_L$ при $\zeta_L = 0$. Отсюда следует, что скорость ядра v_k равна:

$$v_k = \frac{h}{2} \cdot \frac{(F_\mu + \lambda)^2}{F_\mu}, F_\mu \equiv \int_{P_0}^{\bar{P}_L} \frac{d\bar{P}}{\mu(P)}. \quad (14)$$

В общем случае $w^+ \neq w^- \neq 0$. Результат решения соотношения (11) приводит к такому уравнению:

$$\left(\frac{\mu}{2h} \frac{(w^+ - w^-)}{\Delta P_h} - \frac{2v_k \cdot \mu}{\Delta P_h h} \right) \left(\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} - \bar{\tau} \right) \frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} = 2 \left\{ \left(\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} \right)^2 \left(\frac{\mu}{2h} \frac{(w^+ - w^-)}{\Delta P_h} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} - \bar{\tau} \right)^4 \right\}. \quad (15)$$

Это уравнение допускает только численное решение из-за того, что включает все степени $\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L}$. Пу-

тем огрубления это уравнение можно свести к предыдущему, относящемуся к случаю. Для этого надо обратиться к соотношению (11), из вида которого следует, что в правой части фактически имеется два слагаемых, представляющих собой квадраты слагаемых, из которых состоят выражения в квадратных скобках. Легко видеть, что если $w^+ = w^- = 0$ то получается уравнение (12). Поэтому вместо уравнения (15) можно записать близкое к нему уравнение такого вида:

$$\frac{d\bar{P}}{d\zeta_L} = \left[\frac{1}{R} \left(\frac{v_k \cdot \mu}{h\Delta P_h} - \frac{\mu(w^+ + w^-)}{\Delta P_h h} \right) - \bar{\tau} \right] + \sqrt{\left[\frac{1}{R} \left(\frac{v_k \cdot \mu}{h\Delta P_h} - \frac{\mu(w^+ + w^-)}{\Delta P_h h} \right) - \bar{\tau} \right]^2 - \bar{\tau}^2}, \quad (16)$$

$$R = 1 + \left[\frac{\mu_0 + \mu_L}{4h} \cdot \frac{L}{P_L - P_0} \cdot (w^+ - w^-) \right]^2 / \left[1 - \frac{(\tau_L + \tau_0)L}{2(P_L - P_0)} \right]^4.$$

Снова ограничиваясь случаем когда, $\tau(P) = \lambda\mu(P)$ для величины v_k получается такая формула:

$$v_k = \frac{w^+ + w^-}{2} + \frac{h}{2} \cdot \frac{F_\mu + \lambda)^2}{F_\mu} R. \quad (17)$$

Для того, чтобы получить уравнения первого приближения по величине малого параметра ε_L следует обратиться к уравнениям (7). В этих уравнениях нужно все входящие в них величины представить в виде рядов по величине ε_L^2 так, как этот параметр присутствует в уравнениях только во второй степени. При этом следует разложить в ряд давление \bar{P} и вязкость, и порог текучести. В первом уравнении в (7) слагаемое с величинами Δ^\pm следует оставить в нулевом приближении, равно как и все остальные ввиду наличия множителя ε_L^2 . В разложениях всех величин нулевые их приближения отмечаются индексом

«ноль», а первые приближения – индексом «два». Опуская все промежуточные преобразования ввиду их громоздкости, окончательный результат принимает вид следующей линейной системы уравнений для координат границ ядра γ_2^\pm :

$$\begin{aligned} \gamma_2^+(1-\gamma^+)+\gamma_2^-(1+\gamma_0^-) &= -\frac{1}{2}P_0^+(1-\gamma_0^+)^3 + \frac{1}{2}P_0^-(1+\gamma_0^-)^3 + \frac{w^+ - w^-}{h} \frac{\mu(\bar{P}^0)}{\frac{d\bar{P}^0}{d\zeta_L}}; \\ &\left(\frac{\frac{d\bar{P}_2}{d\zeta_L}}{\frac{d\bar{P}^0}{d\zeta_L}} - \frac{1}{\mu(\bar{P}^0)} \frac{d\mu}{d\bar{P}} \Big|_{\bar{P}^0} \cdot \bar{P}_2 \right); \\ \gamma_2^+ - \gamma_2^- &= P_0^+ \gamma_0^+ (1-\gamma_0^+) + P_0^- \gamma_0^- (1+\gamma_0^-) + \frac{\tau(\bar{P}^0)}{\frac{d\bar{P}^0}{d\zeta_L}} \cdot \left(\frac{\frac{d\bar{P}_2}{d\zeta_L}}{\frac{d\bar{P}^0}{d\zeta_L}} - \frac{1}{\tau(\bar{P}^0)} \frac{d\tau}{d\bar{P}} \Big|_{\bar{P}^0} \cdot \bar{P}_2 \right), \end{aligned} \quad (18)$$

в которой во избежание путаницы с граничным условием для давления $\bar{P}(\zeta_L) = \bar{P}_0$ нулевое приближение для давления отмечено индексом «ноль» вверху. Система уравнений (18) не связана ограничениями $\tau = \lambda\mu$ и имеет универсальный вид. Если же связь между τ и μ в виде пропорциональности имеет место, то в качестве $\gamma_0^\pm(\zeta_L)$ и $\bar{P}_0(\zeta_L)$ следует подставить (17) и (16) в качестве функций в систему уравнений (7), взятую в нулевом приближении. Разложение выражения для скорости ядра v_k дает для второго приближения следующее выражение, которое можно считать уравнением для поправки к давлению \bar{P}_2 :

$$\frac{v_{k2} - \left(\frac{1}{2}\right) [\Delta_0^+ \cdot (1-\gamma_0^+) + \Delta_0^- \cdot (1+\gamma_0^-)]}{\frac{h}{2\mu(\bar{P}^0)} \frac{d\bar{P}^0}{d\zeta_L} [(1-\gamma_0^+)^3 - (1+\gamma_0^-)^3] - (w^+ - w^-)} \cdot \frac{d\bar{P}^0}{d\zeta_L} = \frac{d\bar{P}_2}{d\zeta_L} - \frac{d \ln \mu(P^0)}{d\zeta_L} \cdot \bar{P}_2. \quad (19)$$

Это линейное уравнение первого порядка по \bar{P}_2 интегрируется в квадратурах на основе нулевого приближений, если таковое известно. Для случая $\tau = \lambda\mu$ все величины являются известными: $P^{(0)}(\zeta_L)$ по уравнению (13); величины γ_0^\pm имеют следующий вид:

$$\gamma_0^\pm = -\frac{\tau}{\frac{d\bar{P}^0}{d\zeta_L}} \pm \frac{\mu(\bar{P}^0)(w^+ - w^-)}{\frac{2hd\bar{P}^0}{d\zeta_L}} / \left(\frac{\tau(\bar{P}^0)}{\frac{d\bar{P}^0}{d\zeta_L}} - 1 \right). \quad (20)$$

Таким образом, в рамках предлагаемой модели получены уравнения нулевого и второго приближения для характеристик бингамовского течения в плоском канале. При этом использовалось допущение о малости параметра \varkappa_L , которое не является ограничивающим в свете возможных приложений к течениям в винтовых каналах червячных машин. Уравнения (7), (18) и (19) являются общими и не зависят от гипотезы. Различные виды зависимости $\mu(P)$ и $\tau(P)$ могут быть изучены только численно. Гипотеза о пропорциональности вязкости и порога текучести в реальной ситуации, когда μ и τ произвольные, характеризует посредством параметра λ степень их отличия друг от друга на интервале оси давлений (P_0, P_L). Результат, выражаемый формулой (14), фактически означает, что скорость движения квазитвердого ядра определяется мерой отклонения величин μ и τ , и средним значением величины обратной вязкости на том же интервале давлений. Из формулы (15) следует, что скорость твердого ядра зависит как от суммы, так и от разности скоростей на границах канала. Сжимаемость бингамовского материала отражена в величинах

ρ^\pm и Δ^\pm но таким образом, что для длинных каналов в нулевом приближении сжимаемость не оказывает влияния на течение. Только во втором приближении сжимаемость оказывает влияние. Объяснение этого факта заключается в том, что неявно считается, что при $\alpha_L = 0$ средний градиент давления остается конечной величиной. Это значит, что разность давлений на концах канала становится бесконечной. Для баротропного сжимаемого материала это означает, что хотя бы на одном конце канала величина давления становится бесконечной так, что плотность материала на этом конце тоже должна стать бесконечной. То есть плотность должна возрасти, по крайней мере, как $1/\alpha_L^2$. Но тогда величины ρ^\pm и Δ^\pm , в которые входит $\rho(P)$ становится бесконечно большими так, что их произведение на малый параметр α_L^2 становится конечным и разложения по малому параметру в уравнениях (7) производить нельзя. Поскольку такие разложения выполнены, то это означает, что зависимость плотности материала от давления является ограниченной. Иными словами, плотность при стремлении величины давления к бесконечности остается конечной величиной. Отсюда следует, что при конструировании величин $\rho(\bar{P}^0)$ в ρ^\pm и Δ^\pm следует использовать зависимости, удовлетворяющие условию $\lim_{\bar{P}^0 \rightarrow \infty} \rho(\bar{P}^0) \rightarrow \rho^\infty$ если $\bar{P}^0 \rightarrow \infty$.

Выводы. Представленная модель допускает ряд уточнений и усложнений, связанных с более точным определением ρ^\pm и Δ^\pm по формуле (10), а также численные исследования влияния конкретных зависимостей $\mu(P)$ и $\tau(P)$ на характеристики бингамовского течения.

Литература

1. Рейнер М. Реология. [Текст]. – М.: Наука. ГРФМЛ. 1965. – 223 с.
2. Фрейденталь А., Гейнрингер Х. – Математические теории неупругой сплошной среды. [Текст]. – М.: ГИТТЛ. 1962. – 432 с.
3. Спенсер Э. Теория инвариантов [Текст]. – М.: Мир. 1974. – 156 с.
4. Дытнерский Ю.И. Процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия. 1995. – 768 с.
5. Коган В.Б. Теоретические основы типовых процессов химической технологии. [Текст]. – М.: Химия. Лен. Отд. 1977. – 784 с.
6. Ясногородский А.Я., Звездин А.Г. Многоцелевые двухшнековые машины для перерабатывающих технологий. [Текст]. – Харьков.: Прапор. 2006. – 184 с.
7. Геррман Х. Шнековые машины в технологии. [Текст]. – Л.: Химия. Лен. Отд. 1975 – 229 с.
8. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. [Текст]. – М.: Химия. 1984. – 628 с.
9. Бернхардт С. Переработка пластических масс. [Текст]. – М.: Химия. 1965 – 746 с.
10. Білецький Є.В. Течія в`язкопластичної рідини в плоскому каналі [Текст]. / Білецький Є.В., Толчинський Ю.А. // Наукові праці: збір.наук. праць / ОНАХТ. – Одеса, 2010 – Вип. 37 с. 122–126
11. Білецький Є.В. Модель в`язкопластичного бінгамовського плинину в прямокутному каналі [Текст]: / Білецький Є.В. Толчинський Ю.А. // Обладнання та технології харчових виробництв: темат.збір наук.праць / Донецький нац. ун-т економіки і торгівлі ім. Туган-Барановського. – 2010. – Вип. 24. с. 45–54
12. Лойцинский Л.Г. Механика жидкости и газа. [Текст]. М. : Наука. ГРФМЛ. 1973. – 848 с.

УДК 532. 135; 532.5

Білецький Є.В., Толчинський Ю.А.

МОДЕЛЬ РУХУ СТИСНУТОГО БІНГАМОВСЬКОГО МАТЕРІАЛУ, З ПОКАЗНИКАМИ ЯКІ ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ТИСКУ

У статті розглядається модель проходження бінгамовського матеріалу, в'язкість та поріг текучості якого залежить від тиску.

Beletsky E.V., Tolchinskiy Y.A.

MODEL OF COMPRESSED BANGAMO MATERIAL WITH CHARACTERISTICS WHICH DEPEND ON PRESSURE

The article deals with the model of Bangamo material with viscosity and fluidity threshold depending on pressure.