УДК 532.5; 678.027

Ульев Л.М.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КОНФУЗОРЕ С ОБЩЕЙ ВЕРШИНОЙ ЕГО ГРАНИЦ

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Введение

Изучение ламинарных течений в каналах различной геометрии является одной из фундаментальных задач гидродинамики, так как на его основе проводится исследование ряда других проблем, возникающих при конструировании и расчете проточных частей промышленных аппаратов и теплообмена в них. Например, при проектировании полимерного оборудования [1, 2] или при проектировании объемных гидравлических устройств [3, 4] появляется необходимость рассчитывать параметры ламинарного течения в соосных конических конфузорах.

В работе [5] автором решена в биконической системе координат задача ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале, образованном круглыми коническими поверхностями с общей вершиной, а в работе [6] получено решение задачи конфузорного ламинарного течения при пренебрежимо малых значениях числа Рейнольдса между соосными коническими поверхностями с переменной шириной канала вдоль течения:

$$h = h_0 + b\left(R_1 - R\right), \tag{1}$$

где параметр b является тангенсом разности полууглов раскрытия внешней и внутренней границ канала (рис. 1), т.е. $b = \mathrm{tg}(\alpha_1 - \alpha)$, и, следовательно, из геометрических соображений он должен удовлетворять условию:

$$R_0\,\mathrm{tg}\,\alpha \ge h_0 + \left(\xi_1 - \xi_0\right)b \ge 0\,. \tag{2}$$

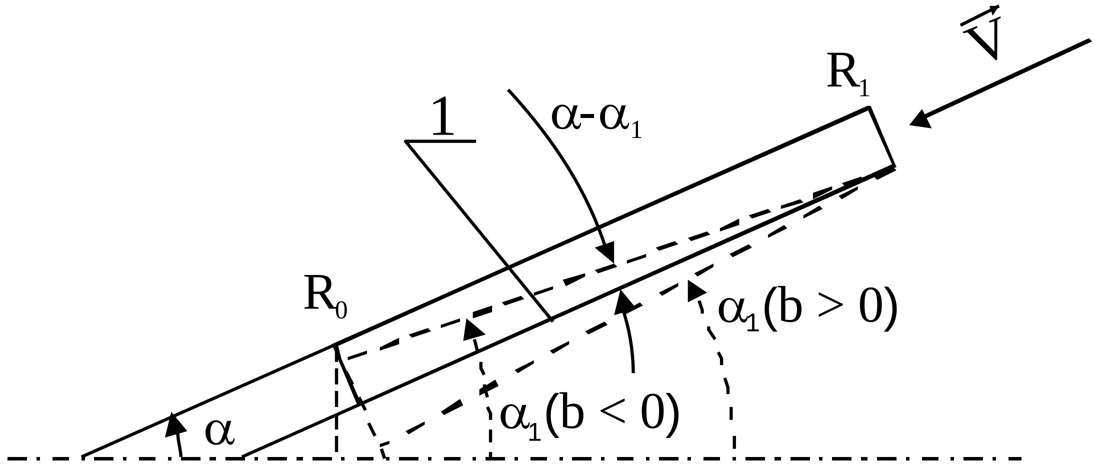


Рисунок 1 – Геометрия поперечного сечения соосного конического конфузора: 1 – внутренняя граница соосного коническтго конфузора постоянной ширины

Решение, полученное автором в [6], описывает течение практически во всем возможном диапазоне изменения параметра *b*, за исключением одного значения:

$$b = -\frac{h_0}{R_1}, \tag{3}$$

при котором зависимость, определяющая распределение безразмерного давления вдоль канала, расходится [6].

Как видно из рисунка 1, данное значение *b* соответствует случаю течения в канале, сформированном коническими поверхностями с общей вершиной.

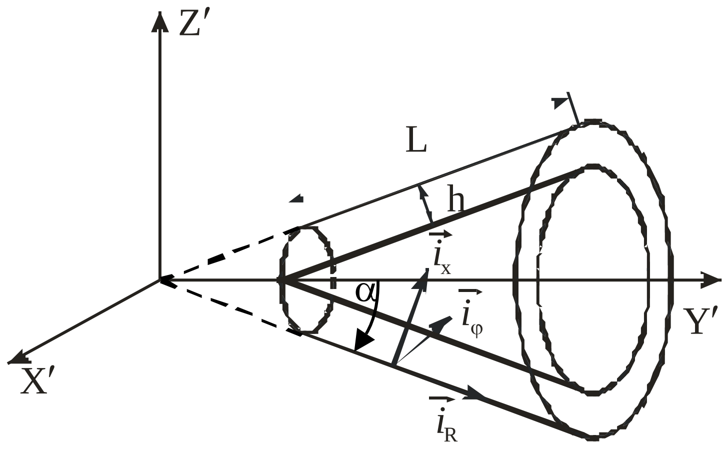


Рисунок 2 – Связь биконической системы координат с геометрией канала: L – длина конической части канала, м; h – ширина зазора, м; $\mathbf{i}_R$, $\mathbf{i}_X$, $\mathbf{i}_\varphi$- орты в биконической системе координат

В работе [7] автором получено точное решение задачи ползущего [8] конфузорного течения в соосных конических каналах с общей вершиной границ для малых чисел Рейнольдса, которое в безразмерных переменных:

$$t = 1-\xi,\ \xi = \frac{R}{R_1},\ v = \frac{V}{V_0},\ \Pi = \frac{(P-P_0)R_1}{\mu V_0}, V_0 = \frac{Q}{S_0}, \tag{4}$$

где $S_0 = 2\pi R_1^2\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha\right)$ – площадь поверхности поперечного сечения канала сферической координатной поверхностью на входе в канал запишется как:

$$v = \frac{\lambda}{6(1-t)^2}\left(A\cdot P_2(\tau) + B\cdot Q_2(\tau) - 1\right), \tag{5}$$

$$\bar{\Pi}(\xi) = \frac{\lambda+6}{3}\left[1 - \frac{1}{(1-t)^3}\right], \tag{6}$$

где $P_2(\tau) = 0.5\left(3\tau^2-1\right)$, $Q_2(\tau) = \frac{1}{2}P_2(\tau)\ln\frac{1+\tau}{1-\tau} - \frac{3}{2}\tau$ - многочлены Лежандра первого и второго рода и второго порядка, $\bar{\Pi}$ - среднее по поперечному сечению канала давление:

$$A = \frac{Q_2(\tau_2) - Q_2(\tau_1)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2) - P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)},\ B = \frac{P_2(\tau_2) - P_2(\tau_1)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2) - P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)}, \tag{7}$$

$$C = \frac{A}{2}\left(\tau_2^2 + \tau_2\tau_1 + \tau_1^2 - 1\right),\ \tau = \cos\alpha,\ \tau_1 = \cos\alpha_1,\ \tau_2 = \cos\alpha, \tag{8}$$

$$\lambda = \frac{6\xi_1^2}{C + \frac{B}{4}\left[\frac{\tau_2\left(\tau_2^2-1\right)}{\tau_1-\tau_2}\ln\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2} - \frac{\tau_1\left(\tau_1^2-1\right)}{\tau_2-\tau_1}\ln\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1} - 2\left(\tau_2+\tau_1\right)\right] - 1}. \tag{9}$$

Решение (5), (6) получено в сферической системе координат, в которой обе границы канала являются координатными поверхностями, поэтому оно учитывает все особенности геометрии канала. В то же время это решение достаточно громоздко для дальнейшего исследования течения.

В данной работе мы получим более компактное, приближенное решение указанной задачи и сравним его с ранее полученным, точным решением (5), (6).

Математическая постановка задачи и ее приближенное решение

Рассматривать течение в соосном коническом диффузоре с общей вершиной его границ будем в биконических координатах [5, 6] (рис. 2), определяемом преобразованием:

$$Z' = R\cos\alpha + X\sin\alpha, \tag{10}$$

$$Y' = (R\sin\alpha - X\cos\alpha)\sin\varphi = \Omega\times\sin\varphi, \tag{11}$$

$$X' = (\mathrm{R}\sin\alpha - X\cos\alpha)\cos\varphi = \Omega\times\cos\varphi. \tag{12}$$

Заметим, что решение в главе (5), (6) получено в сферической системе координат, в которой границами канала являются координатные поверхности, что полностью учитывает кривизну поверхностей канала и их изменение вдоль течения. В настоящем исследовании течения в биконических координатах мы кривизну поверхности канала и ее изменение вдоль течения учтем с помощью условия постоянства расхода, эквивалентного уравнению неразрывности.

В работах [9, 10] автором показано, что такой подход оправдывается, если выполняется условие $\xi > 2.22\mathrm{ctg}\alpha$, которое применимо почти во всех практически интересных случаях. А это позволяет пренебречь влиянием кривизны границ канала на течение и, принимая во внимание оценки, сделанные в [5, 6], записать уравнение движения для конфузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной его границ (рис. 3) в безразмерных величинах $t = \xi_1 - \xi$, $\xi = \frac{R}{h_0}$, $\chi = \frac{\mathrm{X}}{h_0}$, $V_0 = \frac{Q}{\pi h_0^2\left(2\xi_1\sin\alpha - \cos\alpha\right)}$, $v = \frac{V}{V_0}$, $\Pi = \frac{\left(P-P_0\right)h_0}{\mu V_0}$ как:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}. \tag{13}$$

Из соотношений (1) и (3) получаем выражение для определения безразмерной ширины канала вдоль течения:

$$\tilde{h}(t) = 1 + bt = \frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\xi_1 - t}{\xi_1}. \tag{14}$$

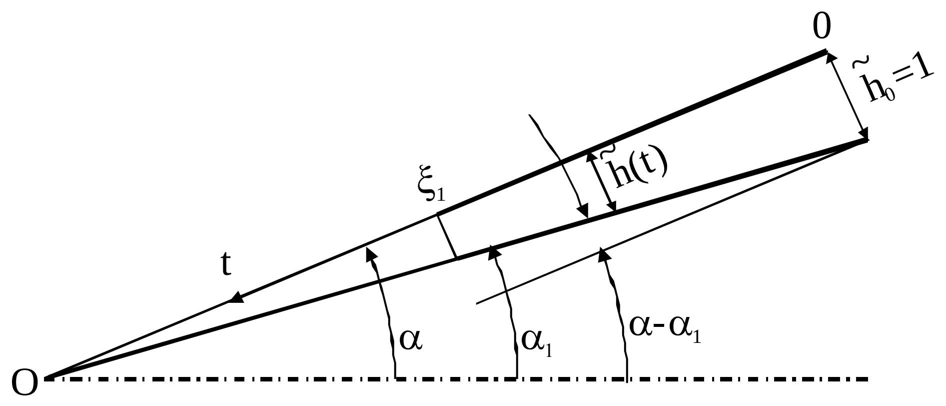


Рисунок 3 – Геометрия соосного конического конфузора с общей вершиной O: $\bar{h}_0$ – безразмерная ширина канала на входе; $\tilde{h}(t)$ – текущая безразмерная ширина канала; α, α_1 – полуугол раскрытия внешней и внутренней конической границы канала; t – текущая безразмерная координата; ξ_1, – безразмерная радиальная координата выхода

Исключительно из геометрических свойств канала получаем выражение, определяющее распределение безразмерной площади поверхности поперечного сечения канала вдоль течения:

$$\tilde{S}=\left(\frac{\xi_1-t}{\xi_1}\right)^2=\tilde{h}^2, \tag{15}$$

вследствие чего средняя по поперечному сечению канала безразмерная скорость определится как:

$$\bar{v}=\left(\frac{\xi_1}{\xi_1-t}\right)^2=\frac{1}{\tilde{h}^2}. \tag{16}$$

Граничные условия в безразмерных координатах примут вид:

$$v=0,\quad \chi=0; \tag{17}$$

$$v=0,\quad \chi=1+bt=\frac{\xi}{\xi_1}; \tag{18}$$

$$\Pi=0,\quad S=0,\quad \xi=\xi_1. \tag{19}$$

Уравнение постоянства расхода запишется как:

$$\int_0^{\frac{\xi_1-t}{\xi_1}}\left[(\xi_1-t)-\chi\,\mathrm{ctg}\alpha\right]v\,d\chi=\frac{1}{2}\left(2\xi_1-\mathrm{ctg}\alpha\right). \tag{20}$$

Решая уравнение (13) с условиями (18) и (18), получим:

$$v=\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}\left(\chi^2-\tilde{h}\chi\right)=\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}\chi\left(\chi^2-\frac{\xi}{\xi_1}\chi\right). \tag{21}$$

Подставляя выражение для определения скорости v (21) в (20), находим зависимость, определяющуюе распределение безразмерного градиента давления в канале:

$$\frac{d\Pi}{dt}=-\frac{12\xi_1^4}{(\xi_1-t)^4}=-12\bar{v}^2=-\frac{12}{\tilde{h}^4}. \tag{22}$$

Далее подставляя (22) в (21) найдем выражение, определяющее распределение безразмерной скорости в рассматриваемом канале:

$$v = 6\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^3 \left(\chi - \frac{\xi_1}{\xi}\chi^2\right) = 6\frac{1}{\tilde{h}^4}\left(\chi\tilde{h} - \chi^2\right). \tag{23}$$

Интегрируя (22) с условием (19), получаем распределение безразмерного давления в канале:

$$\Pi = 4\xi_1\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^3\right] = 4\xi_1\left[1 - \frac{1}{\tilde{h}^3}\right]. \tag{24}$$

В полученном решении содержится только один постоянный параметр задачи – ξ_1, который однозначно определяется разностью полууглов раскрытия внешней конической поверхности и внутренней:

$$\xi_1 = \mathrm{ctg}\left(\alpha - \alpha_1\right). \tag{25}$$

Краткий анализ полученного решения

Подставляя (25) в (24), получим для распределения безразмерного давления в канале:

$$\Pi = 2\mathrm{ctg}\left(\alpha - \alpha_1\right)\left\{1 - \left[\frac{\mathrm{ctg}\left(\alpha - \alpha_1\right)}{\mathrm{ctg}\left(\alpha - \alpha_1\right) - t}\right]^3\right\}. \tag{26}$$

Если в (26) перейти от переменной t к переменной ξ, то мы увидим, что выражения, определяющее распределения безразмерного давления при конфузорном течении в соосном коническом канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной:

$$\Pi = 2\mathrm{ctg}\left(\alpha - \alpha_1\right)\left\{1 - \left[\frac{\mathrm{ctg}\left(\alpha - \alpha_1\right)}{\xi}\right]^3\right\}, \tag{27}$$

и при диффузорном течении [5], совпадают с точностью до знака, и, понятно, что данные выражения будут справедливы лишь при выполнении следующих условий:

– для конфузорного течения

$$\xi \le \mathrm{ctg}\left(\alpha - \alpha_1\right); \tag{28}$$

– для диффузорного течения

$$\xi \ge \mathrm{ctg}\left(\alpha - \alpha_1\right). \tag{29}$$

Распределение скорости при конфузорном (21) и диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной будет совпадать с точностью до отношения масштабных множителей. Но задача конфузорного течения в соосном коническом канале, образованном поверхностями с общей вершиной, может представлять самостоятельный интерес, поэтому мы далее сравним полученное здесь решение с решением, полученным ранее в сферических координатах [7]. Для этого запишем в одинаковом масштабе выражение для определения скорости в канале. Площадь поверхности поперечного сечения канала в сферических координатах запишется как [7]:

$$S_s = 2\pi h_0^2\left(\xi_1 - t\right)^2\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha\right), \tag{30}$$

а в биконических координатах вычислим это решение с помощью интегрирования:

$$S_b = \pi \int\limits_0^{(R_1 - T)} \left[(R_1 - T)\sin\alpha - \chi\cos\alpha \right] d\chi =$$
$$= \pi (R_1 - T)^2 \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_1)\left[2\sin\alpha - \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_1)\cos\alpha \right], \quad (31)$$

где T = th_0 – размерная продольная координата.

И учитывая соотношение (25) из (31) получим:

$$S_\text{b} = \pi h_0^2 \left(\frac{\xi_1 - t}{\xi_1} \right)^2 (2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha). \quad (32)$$

Для того, чтобы привести значения скорости, найденные при решении задачи в сферических координатах, необходимо их умножить на отклонение масштаба скорости, принятого в сферических координатах к масштабу, который мы использовали при решении задачи в биконической системе координат:

$$V_\text{Sb} = V_\text{S} \cdot \frac{V_\text{0s}}{V_\text{0b}} = V_\text{S} \frac{S_\text{b}(0)}{S_\text{s}(0)} = V_\text{S} \frac{2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi_1^2 (\tau_1 - \tau_0)}. \quad (33)$$

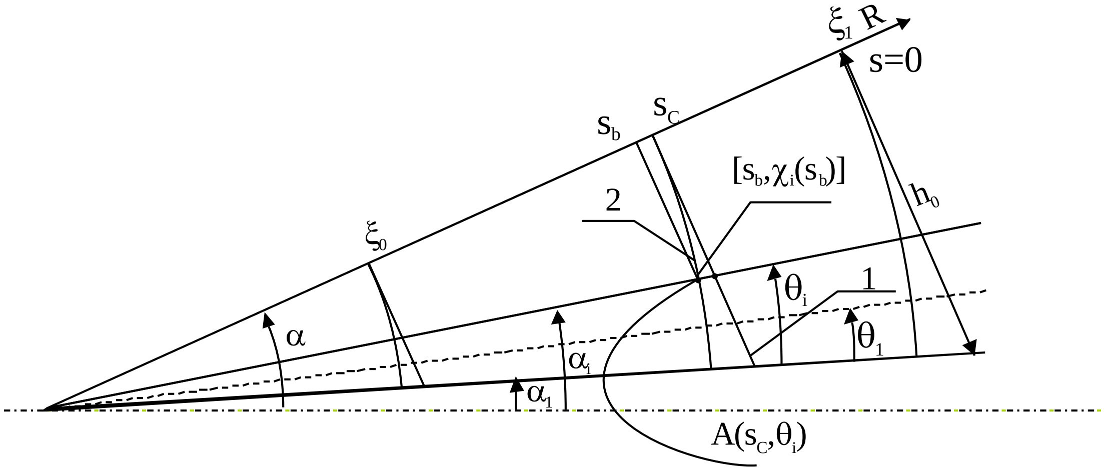


Рисунок 4 – Геометрические параметры соосного конического конфузора с общей вершиной границ:
1 – проекция поперечного сечения канала координатной поверхностью в биконических координатах;
2 – проекция поперечного сечения канала координатной поверхностью в сферической системе координат

Сравнивать распределение скоростей (33) и (23) будем на поверхностях поперечного сечения, образованных сферическими координатными поверхностями (рис. 4). Для того, чтобы вычислить значение скорости по (23) в сферических координатах, необходимо сделать замену переменных. В соответствии с рис. 4 будем иметь:

$$t_\text{b} = \xi_1 - (\xi_1 - t_\rho)\cos(\alpha - \theta), \quad (34)$$

$$\chi_\text{b} = (\xi_1 - t_\text{S})\sin(\alpha - \theta), \quad (35)$$

где $\theta = \operatorname{ar}\cos\tau$.

Сравнение распределения безразмерной скорости, полученных при решении задачи ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале с геометрическими параметрами $\alpha_1 = 10°$, $\alpha = 20°$, $\xi_0 = 1{,}244$, $\xi_1 = 3{,}73$ в биконических координатах (23) и в сферических (33) дает хорошее согласие (рис. 5). Оба распределения несимметричны относительно серединной поверхности канала. Причины нессиметричности квадратичного распределения (23) были рассмотрены при анализе конфузорного течения в соосном коническом канале в работе [7]. Здесь следует заметить, что область определения на рисунке 5 связана с областью определения задачи изоморфным преобразованием:

$$t' = t_b ;\quad \chi' = \frac{\chi_b \xi_1}{\xi_1 - t} . \tag{36}$$

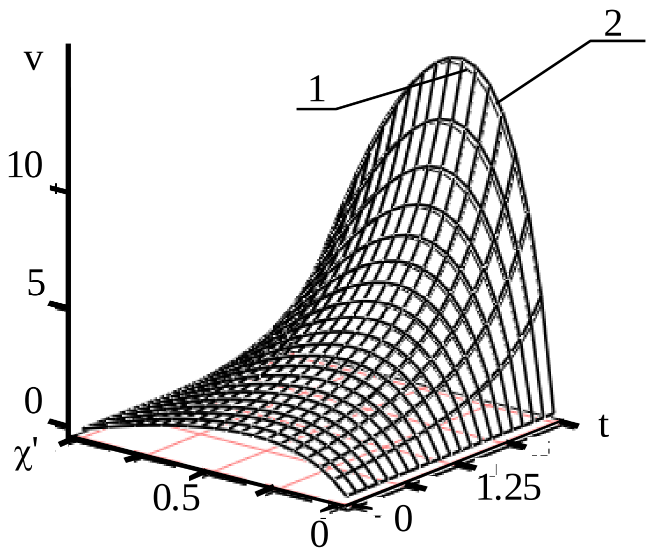


Рисунок 5– Распределение безразмерной скорости в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ: 1 – распределение полученное при решении задачи в сферической системе координат; 2 – в биконической системе координат

Величина относительного отклонения значений скорости, вычисленных по (23) от величин (33), практически не превышает 5 % в пределах всего рассматриваемого канала (рис. 6).

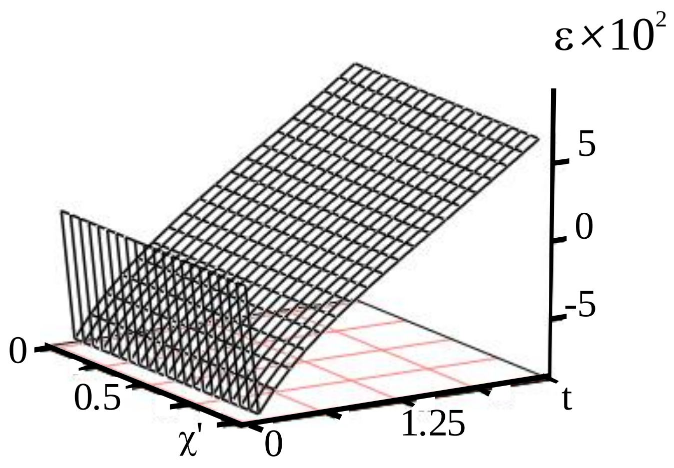


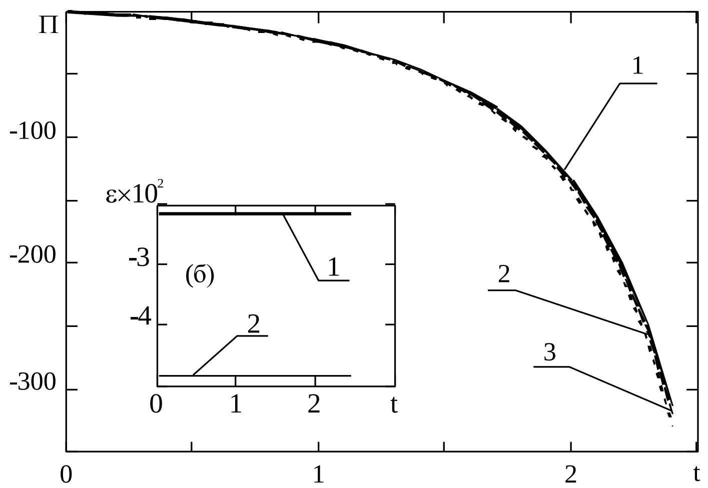
Рисунок 6 – Распределение относительного отклонения скорости в соосном коническом конфузоре, полученной при решении задачи в биконической системе координат от скорости , полученной при решении задачи в сферической системе координат

Сравним распределение безразмерных давлений, полученных при решении исследуемой задачи в биконических координатах (26) и в сферических (6), которое при выборе в качестве линейного масштаба величины h_0, записывается в виде:

$$\bar{\Pi}(t) = \frac{\lambda + 6\xi_1^2}{3\xi_1^3}\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^3\right], \tag{37}$$

где величина λ [8] определяется выражением (9).

Распределение (26) и (37) практически совпадает в исследованных технически интересных вариантах каналов. Для уже выбранных размеров канала относительное отличие (37) от (48) составляет ~ 2 % (рис. 7).



а

Рисунок 7 – Распределение безразмерного давления вдоль течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ – а. 1 – зависимость, полученная при решении задачи в биконической системе координат; 2 – зависимость, полученная в сферической системе координат и представленная в масштабе принятом при решении задачи в биконических координатах; 3 – зависимость, полученная при решении задачи в сферической системе координат. б – относительное отклонение зависимости 1 от зависимости 3; 2 – относительное отклонение зависимости 1 от зависимости 2

Интересно заметить, что согласие между безразмерными давлениями в биконических и сферических координатах, приведенных к одному масштабу, несколько хуже, чем между (26) и (37), а это в свою очередь позволяет получить простое выражение для определения значения постоянной разделения λ в случае решения задачи конфузорного ламинарного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ. Приравнивая (26) и (37), получаем выражение для определения λ:

$$\lambda = 12\xi_1^4 - 6\xi_1^2. \tag{38}$$

Выражение (38) аналогично выражению, полученному в [5], но при использовании этих выражений для определения λ необходимо иметь в виду, что (38) получено при обезразмеривании по величине h_0, которое является шириной конфузора на его входе, т.е. при $R = R_1$, а при вычислении λ в [5] в качестве линейного масштаба выбиралась ширина диффузора на его входе, т.е. при $R = R_0$.

Заключение

Получено приближенное решение задачи ламинарного конфузорного течения с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса в соосных конических каналах с общей вершиной границ. Решение, полученное в биконической системе координат, хорошо согласуется с точным решением и удобно для практических применений и использования в дальнейшем исследовании течения.

Обозначения

h – ширина канала, м; P, P_0 – давление текущее и на входе, Па; Q – объёмный расход, м^3/с; R, R_0, R_1 – координата радиальная, выхода из канала и входа в него, м; V – скорость, м/с; X', Y', Z' – координаты в декартовой системе, м; X – поперечная биконическая координата, м; α, α_1 – половина угла раскрытия внешней и внутренней конической поверхности, рад; φ – азимутальная биконическая координата, рад.

Индексы

b – характеризует величину, относящуюся к биконическим координатам; s –характеризует величину, относящуюся к сферическим координатам

Литература

1. Басов Н.И., Казанков Ю.В., Любартович В.А. Расчет и конструирование оборудования для производства и переработки полимерных материалов. М.: Химия. 1986. С. 488.
2. Технология нанесения покрытий на поверхности / О.М. Яхно, С.Г. Кравченко, В.С. Кривошеев и др. – К.: Техника. 1993. С. 121.
3. Осипов А.Ф. Объемные гидравлические машины. М.: Машиностроение. 1966. С. 160.
4. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов и др. – М.: Машиностроение. 1982. С. 423.
5. Ульев Л.М. Приближенное решение задачи ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ // Інтегровані технології та енергозбереження.. 2004, № 2. С. 60-65.
6. Ульев Л.М. Медленные конфузорные течения в соосных конических каналах переменной ширины // Вестник НТУ "ХПИ". 2002. № 3. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 122-130.
7. Ульев Л.М. Решение задачи ламинарного течения между коническими поверхностями с общей вершиной при частичном учете инерционных свойств // Вестник НТУ "ХПИ". 2001. № 3. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 224-235.
8. Гогос К., Тадмор З. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия, 1984. С. 632.
9. Ульев Л.М. Влияние кривизны границ на ламинарное установившееся течение в кольцевом коническом канале постоянной ширины // Інтегровані технології та енергозбереження. 2001, № 1. С. 34-44.
10. Ulyev L.M. Solution of Slow Steady State Flow Problem in a Constant Width Channel with Taking into account curvature distinction of its Boundaries // 15th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA'2002, Prahga, 2002, Summaries Vol. 3.Fluid Flow. Multiphase System. Praha. 2002. P. 178 –179. (Paper No. P5. 102. P. 11).

УДК 532.5; 678.027

Ульєв Л.М.

НАБЛИЖЕНЕ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ У СПІВВІСНОМУ КОНІЧНОМУ КОНФУЗОРІ ЗІ СПІЛЬНОЮ ВЕРШИНОЮ ЙОГО МЕЖ

Одержано наближено рішення задачі ламінарної конфузорної течії з зневажено малими числами Рейнольдса у співвісному конічному каналі з спільною вершиною меж. Рішення, яке побудовано у біконічної системі координат, добре погоджується з точним рішенням та зручно до використання у практиці та до подальшого вивчення даної течії.