

---

УДК 539.3

Кочуров Р.Е., Аврамов К.В.

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОМБИНАЦИОННОМ  
РЕЗОНАНСЕ**

**Введение**

Цилиндрические оболочки представляют собой обширный класс конструкций, которые широко используются в машиностроении, ракетной и космической технике, энергетике. В процессе эксплуатации такие конструкции подвержены действию значительных динамических нагрузок, которые могут привести к усталостным поломкам. Поэтому понятен интерес ученых и инженеров к динамическому поведению цилиндрических оболочек. В работах [1, 2] рассматриваются модели нелинейных колебаний цилиндрических оболочек с тремя и четырьмя степенями свободы, которые описывают свободные, вынужденные и параметрические колебания. Взаимодействие двух пар сопряженных форм колебаний цилиндрических оболочек рассмотрено в [3]. Подробный обзор работ по динамике оболочек содержится в статье [4].

В данной статье исследуются параметрические колебания цилиндрической оболочки при ее геометрически нелинейном деформировании в области комбинационного резонанса. Для описания параметрических колебаний используется модель с конечным числом степеней свободы. В этой системе учитываются три пары сопряженных форм, которые имеют близкие частоты линейных колебаний.

### 1. Модель параметрических колебаний

Рассмотрим шарнирно опертую тонкую идеально-цилиндрическую оболочку, сжатую вдоль образующей распределенной периодической нагрузкой  $N_x(t) = N_1 \cos \Omega t$ . Оболочка совершает колебания с умеренными амплитудами. Тогда деформации являются малыми, а перемещения умеренными и связь между деформациями и перемещениями описываются нелинейными уравнениями. Напряжения и деформации связаны законом Гука. Сдвигами и инерция вращения в модели оболочки не учитывается. Тогда колебания моделируются уравнениями Донелла-Муштари-Власова [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right); \\ \frac{1}{E} \nabla^4 F &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $w$  – радиальные перемещения точек срединной поверхности оболочки,  $x, y$  – продольная и окружная координаты,  $R$  – радиус оболочки,  $\rho$  – плотность материала оболочки;  $E, \mu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $F$  – функция напряжений,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость оболочки.

В цилиндрических оболочках сопряженные собственные формы колебаний  $\cos s_i y \sin r x$  и  $\sin s_i y \sin r x$  имеют одинаковые частоты. При нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек эти формы, в основном, возбуждаются совместно. В данной модели в разложении радиального прогиба учитываются три пары сопряженных форм колебаний, частоты которых близки. Тогда динамический прогиб оболочки  $w$  аппроксимируем разложением

$$w = \sum_{i=1}^3 (f_{2i-1} \cos s_i y + f_{2i} \sin s_i y) \sin r x + f_7 \sin^2 r x + f_8, \quad (2)$$

где  $s_i = n_i / R$ ;  $r = m \pi / L$ ;  $i = \overline{1,3}$ ;  $n_i$  – число волн в окружном направлении,  $m$  – число полуволн вдоль образующей. Слагаемое  $f_7 \sin^2 r x$  отражает несимметричность прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным перемещением к центру кривизны. Слагаемое  $f_8$  описывает радиальные перемещения точек, принадлежащих торцевым сечениям оболочки. Это слагаемое не зависит от окружной координаты  $y$ , то есть предполагается, что торцевые сечения при колебаниях оболочки могут «дышать» [1].

Функцию напряжений  $F$  получим из второго уравнения системы (1). Ее представим так:  $F = F_h + F_p$ . Общее решение второго уравнения системы (1)  $F_h$  определяется из условия периодичности окружных перемещений [2], и имеет следующий вид:

$$F_h = \frac{E}{16} \sum_{i=1}^6 s_i f_i^2 x^2 - \frac{1}{4} \frac{E}{R} f_7 x^2 - \frac{1}{2} \mu N_x x^2 - \frac{1}{2} N_x y^2. \quad (3)$$

Частное решение второго уравнения системы (1)  $F_p$  представим так:

$$F_p = F_1^{(0)} \cos 2r x + \sum_{i=1}^3 F_{i+2}^{(0)} \cos 2s_i y + \sum_{i=1}^3 F_{i+5}^{(0)} \sin 2s_i y + \\ + F_1^* \sin r x + F_2^* \sin 3r x + F_4^* + F_5^* \cos 2r x, \quad (4)$$

где  $F_k^* = \sum_{i=1}^3 (F_i^{(k)} \cos s_i y + F_{i+3}^{(k)} \sin s_i y)$ ;

$$F_l^* = F_1^{(l)} \cos(s_1 + s_2)y + F_2^{(l)} \cos(s_1 - s_2)y + F_3^{(l)} \cos(s_1 + s_3)y + F_4^{(l)} \cos(s_1 - s_3)y + \\ + F_5^{(l)} \cos(s_2 + s_3)y + F_6^{(l)} \cos(s_2 - s_3)y + F_7^{(l)} \sin(s_1 + s_2)y + F_8^{(l)} \sin(s_1 - s_2)y + \\ + F_9^{(l)} \sin(s_1 + s_3)y + F_{10}^{(l)} \sin(s_1 - s_3)y + F_{11}^{(l)} \sin(s_2 + s_3)y + F_{12}^{(l)} \sin(s_2 - s_3)y; k=1,2; l=3,4.$$

Выражения (2), (3), (4) вводятся во второе уравнение системы (1) и приравниваются коэффициенты при одинаковых гармониках. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно параметров  $F_i$  системы (4). Величины  $F_i$  здесь не приводятся для краткости изложения.

К первому уравнению системы (1) применяется метод Бубнова-Галеркина. В результате получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую колебания цилиндрической оболочки. Введем замену переменных:  $\tilde{t} = \omega_0 t$ ,  $\tilde{f}_i(t) = h^{-1} f_i(t)$ . Опуская волну в обозначениях, модель колебаний с конечным числом степеней свободы относительно безразмерных переменных и параметров представим в следующем виде:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i R_i(f_1, \dots, f_7) + G_i(f_1, \dots, f_6) + \chi_i N_x f_i = 0, \quad i = \overline{1,6}; \quad (5)$$

$$\ddot{f}_7 + \frac{4}{3} \ddot{f}_8 + \omega_7^2 f_7 + \tilde{\omega}_8^2 f_8 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{7j} f_j^2 = 0; \quad (6)$$

$$\ddot{f}_8 + \frac{1}{2} \ddot{f}_7 + \omega_8^2 f_8 + \tilde{\omega}_7^2 f_7 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{8j} f_j^2 = 0, \quad (7)$$

где  $R_i(f_1, \dots, f_7) = \sum_{j=1}^6 \gamma_{ij} f_j^2 + \lambda_i f_7 + \zeta_i f_7^2, i = \overline{1,6};$

$$G_{1,2}(f_1, \dots, f_6) = \eta_{17} (f_{5,6} (f_{3,4}^2 - f_{4,3}^2) + 2f_{3,4} f_{4,3} f_{6,5});$$

$$G_{3,4}(f_1, \dots, f_6) = \eta_{37} (f_{1,2} f_{3,4} f_{5,6} + f_{1,2} f_{4,3} f_{6,5} + f_{2,1} f_{4,3} f_{5,6} - f_{2,1} f_{3,4} f_{6,5});$$

$$G_{5,6}(f_1, \dots, f_6) = \eta_{57} (f_{1,2} (f_{3,4}^2 - f_{4,3}^2) + 2f_{3,4} f_{4,3} f_{2,1});$$

Величины  $\gamma_{ij}; \zeta_i; \eta_{ij}$  зависят от параметров оболочки и здесь не приводятся для краткости. В формулах берутся отдельно первые или вторые индексы, разделенные запятой. Частоты  $\omega_7, \omega_8$  значительно больше частот  $\omega_1, \dots, \omega_6$ . Поэтому уравнения (6), (7) можно заменить квазистатическими:  $\ddot{f}_7 = 0, \ddot{f}_8 = 0$ . В результате, из уравнений (6), (7) получаем:

$$f_7 = \eta^{-1} \sum_{j=1}^6 [(\tilde{\omega}_8 \gamma_{8j} - \omega_8 \gamma_{7j}) f_j^2]; \quad f_8 = \eta^{-1} \sum_{j=1}^6 [(\omega_7 \gamma_{7j} - \tilde{\omega}_7 \gamma_{8j}) f_j^2]; \quad \eta = \tilde{\omega}_7 \tilde{\omega}_8 - \omega_7 \omega_8. \quad (8)$$

Уравнения (8) введем в (5). Тогда функции  $R_i$ ,  $i = \overline{1,6}$  системы (5) примут следующий вид:

$$R_i(f_1, \dots, f_6) = \sum_{j=1}^6 \eta_{ij} f_j^2, \quad i = \overline{1,6}. \quad (9)$$

Итак, параметрические колебания оболочки описываются системой уравнений (5) с функциями  $R_i$  в виде (9). В систему (5) введем слагаемые, которые описывают линейное демпфирование колебаний. Так как вклад нелинейных слагаемых в упругие свойства оболочек значительно меньший в сравнении с линейными слагаемыми, в систему (5) можно ввести малый параметр. Тогда эта система примет следующий вид:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + \varepsilon (\tilde{\xi}_i \dot{f}_i + f_i \tilde{R}_i(f_1, \dots, f_7) + \tilde{G}_i(f_1, \dots, f_6) + \tilde{\chi}_i N_x f_i) = 0, \quad i = \overline{1,6}, \quad (10)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

## 2. Асимптотический анализ колебаний

Для исследования динамики системы (10) воспользуемся методом многих масштабов [5]. Тогда решение представим так:

$$f_j(t, \varepsilon) = f_j^{(0)}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon f_j^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + \dots, \quad j = \overline{1,6}, \quad (11)$$

где  $T_0 = t$ ;  $T_1 = \varepsilon t$  – масштабы времени. Асимптотические разложения (11) введем в (10) и, приравнявая слагаемые при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ; получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial T_0^2} + \omega_i^2 f_i^{(0)} &= 0; \\ \frac{\partial^2 f_i^{(1)}}{\partial T_0^2} + \omega_i^2 f_i^{(1)} &= -2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial T_0 \partial T_1} - \tilde{\xi}_i \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial T_0} - \\ &- f_i^{(0)} \tilde{R}_i(f_1^{(0)}, \dots, f_6^{(0)}) - \tilde{G}_i(f_1^{(0)}, \dots, f_6^{(0)}) - \tilde{\chi}_i f_i^{(0)} N_1 \cos(\Omega T_0), \quad i = \overline{1,6}. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим колебания в области следующих комбинационных и внутренних резонансов:

$$\Omega = 2\omega_1 + \omega_3 - \omega_5 + \varepsilon \delta, \quad (14)$$

$$\omega_1 - \omega_5 = \varepsilon \delta_1; \quad \omega_3 - \omega_5 = \varepsilon \delta_2; \quad (15)$$

где  $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  – параметры расстройки.

Из уравнений (12) получим следующие соотношения:

$$f_j^{(0)}(T_0, T_1) = A_j(T_1) \exp(i\omega_j T_0) + \bar{A}_j(T_1) \exp(-i\omega_j T_0), \quad j = \overline{1,6}. \quad (16)$$

Введем (16) в (13) и приравняем нулю секулярные члены. Получим систему модуляционных уравнений относительно  $A_j$ ,  $j = \overline{1,6}$ . Тогда комплексные переменные  $A_j$  представим в следующем виде:

$$A_j = (x_j + iy_j) \exp(iT_1 \Delta_j / 2), j = \overline{1,6}, \quad (17)$$

где  $\Delta_k = \delta + \delta_2, k = 1,2, \Delta_l = \delta + 2\delta_1 - \delta_2, l = 3,4, \Delta_m = \delta + 2\delta_1 + \delta_2, m = 5,6$ .

После замены переменных, получим систему 12-ти модуляционных уравнений относительно действительных амплитуд  $x_i, y_i, i = \overline{1,6}$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\frac{1}{2} \tilde{\xi}_i x_i + \frac{1}{2} y_i \Delta_i + \frac{1}{4} \omega_i^{-1} \tilde{\chi}_i N_1 y_i + \omega_i^{-1} F_i^x(x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6), \\ \dot{y}_i &= -\frac{1}{2} \tilde{\xi}_i y_i - \frac{1}{2} x_i \Delta_i + \frac{1}{4} \omega_i^{-1} \tilde{\chi}_i N_1 y_i + \omega_i^{-1} F_i^y(x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6), i = \overline{1,6}. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим неподвижные точки системы (18), используя условия  $\dot{x}_i = \dot{y}_i = 0, i = \overline{1,6}$ . Для исследования колебаний, соответствующих этим неподвижным точкам, задается величина  $\delta$  с некоторым шагом. Для каждого значения  $\delta$  величины  $x_i, y_i$  определяются численным решением системы (18) методом Ньютона. Исследуем следующие решения системы:

- 1.1).  $x_1 = x_2 \neq 0, y_1 = y_2 \neq 0, x_j = y_j = 0, j = 3, \dots, 6;$
- 1.2).  $x_1 = x_2 \neq 0, y_1 = y_2 \neq 0, x_5 = x_6 \neq 0, y_5 = y_6 \neq 0, x_j = y_j = 0, j = 3, 4;$
- 1.3).  $x_1 = x_2 \neq 0, y_1 = y_2 \neq 0, x_3 = x_4 \neq 0, y_3 = y_4 \neq 0, x_5 = x_6 \neq 0, y_5 = y_6 \neq 0. \quad (19)$

Решения (19) описывают движения системы на нелинейных нормальных формах  $f_{2i-1} = \pm f_{2i}, i = \overline{1,3}$ , которые являются прямыми линиями в конфигурационном пространстве динамической системы (5). Подчеркнем, что эти прямые линии являются точным решением системы (5). Метод определения нелинейных нормальных форм в параметрически возбуждаемых системах предложен в статьях [6, 7].

Кроме движений на нелинейных нормальных формах, рассмотрим движения следующего вида:

- 2.1).  $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0, x_j = y_j = 0, j = 2, \dots, 6;$
- 2.2).  $x_1 \neq 0, x_5 \neq 0, y_1 \neq 0, y_5 \neq 0, x_j = y_j = 0, j = 2, 3, 4, 6;$
- 2.3).  $x_1 \neq 0, x_3 \neq 0, x_5 \neq 0, y_1 \neq 0, y_3 \neq 0, y_5 \neq 0, x_j = y_j = 0, j = 2, 4, 6. \quad (20)$

Эти решения описывают движение системы в случае, когда активны формы колебаний  $\cos s_i y_i \sin rx, i = \overline{1,3}$ , а формы  $\sin s_i y_i \sin rx, i = \overline{1,3}$  – не активны:  $f_1 \neq 0, f_3 \neq 0, f_5 \neq 0, f_2 = f_4 = f_6 = 0$ .

Параметры колебаний связаны с радиальными прогибами оболочки в случае движения на нелинейных нормальных формах следующим образом:

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= 2\sqrt{2} \sin \frac{m\pi x}{L} \sum_{i=1}^3 [x_{2i-1} \cos(\Omega_{2i-1}^* t) - y_{2i-1} \sin(\Omega_{2i-1}^* t)] \cos\left(\frac{n_i y}{R} \pm \frac{\pi}{4}\right) + C \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + E; \\
 C &= 2\eta^{-1} \sum_{j=1,3,5} [(\tilde{\omega}_8 (\gamma_{8j} + \gamma_{8j+1}) - \omega_8 (\gamma_{7j} + \gamma_{7j+1})) (x_j \cos(\Omega_j^* t) - y_j \sin(\Omega_j^* t))]; \\
 E &= 2\eta^{-1} \sum_{j=1,3,5} [(\omega_7 (\gamma_{7j} + \gamma_{7j+1}) - \tilde{\omega}_7 (\gamma_{8j} + \gamma_{8j+1})) (x_j \cos(\Omega_j^* t) - y_j \sin(\Omega_j^* t))]; \quad (21)
 \end{aligned}$$

В случае движения системы, которое описывается решениями (20), параметры колебаний связаны с радиальными прогибами оболочки так:

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= 2 \sin \frac{m\pi x}{L} \sum_{i=1}^3 [x_{2i-1} \cos(\Omega_{2i-1}^* t) - y_{2i-1} \sin(\Omega_{2i-1}^* t)] \cos \frac{n_i y}{R} + \tilde{C} \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + \tilde{E}; \\
 \tilde{C} &= 2\eta^{-1} \sum_{j=1,3,5} [(\tilde{\omega}_8 \gamma_{8j} - \omega_8 \gamma_{7j}) (x_j \cos(\Omega_j^* t) - y_j \sin(\Omega_j^* t))]; \\
 \tilde{E} &= 2\eta^{-1} \sum_{j=1,3,5} [(\omega_7 \gamma_{7j} - \tilde{\omega}_7 \gamma_{8j}) (x_j \cos(\Omega_j^* t) - y_j \sin(\Omega_j^* t))]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

где  $\Omega_i^* = \omega_i + \varepsilon \Delta_i / 2$ .

### 3. Численный анализ колебаний

В дальнейшем будем рассматривать оболочку со следующими численными значениями параметров [8]:  $h = 0.002\text{м}$ ;  $L = 0.4\text{м}$ ;  $R = 0.2\text{м}$ ;  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{Н/м}^2$ ;  $\mu = 0.3$ ;  $\rho = 7850 \text{кг/м}^3$ ;  $\tilde{\xi}_i = 0.001 \omega_i \omega_0^{-1} \varepsilon^{-1}$ ,  $i = \overline{1,6}$ ;  $\varepsilon = 0.01$ ;  $\omega_0 = 3165.03$ ;  $N_1 = 0.6 N_{cr}$ , где  $N_{cr} = Eh^2 / [R\sqrt{3(1-\nu^2)}]$  - статическая критическая нагрузка [9], которая для заданных параметров оболочки принимает значение:  $N_{cr} = 2.54 \times 10^6 \text{Н/м}$ . Собственные частоты линейных колебаний оболочки в  $\text{рад/с}$  таковы:  $\omega_{1,3} = 5636.32$ ;  $\omega_{1,4} = 3745.32$ ;  $\omega_{1,5} = 3165.03$ ;  $\omega_{1,6} = 3437.18$ ;  $\omega_{1,7} = 4214.28$ ;  $\omega_{1,8} = 5289.51$ , где первый индекс показывает число полуволн вдоль образующей, а второй индекс число волн в окружном направлении. В дальнейшем учтем моды колебаний, имеющие такие параметры волнообразования:  $n_1 = 4$ ;  $n_2 = 5$ ;  $n_3 = 6$ ;  $m = 1$ .

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) нормальных форм (19), которая выражает зависимость амплитуд колебаний  $x_1$ ,  $y_1$  от частоты параметрической силы  $\nu$  представлена на рисунке 1. Буквами  $x_1^{(1,1)}$ ,  $y_1^{(1,1)}$ ,  $x_1^{(1,2)}$ ,  $y_1^{(1,2)}$  обозначены ветви АЧХ для случая 1.1), в формулах (19). Здесь в колебаниях участвует только одна из трех пар сопряженных форм колебаний из разложения (2). На рисунке 1 показаны ветви  $x_1^{(2,1)}$ ,  $y_1^{(2,1)}$ ,  $x_1^{(2,2)}$ ,  $y_1^{(2,2)}$ , которые отвечают случаю возбуждения двух пар сопряженных форм колебаний. Эти решения отражают случай 1.2), представленный в формулах (19). Ветви АЧХ  $x_1^{(3,1)}$ ,  $y_1^{(3,1)}$  отражают случай возбуждения всех трех пар сопряженных форм колебаний, что отвечает 1.3) в формулах (19).

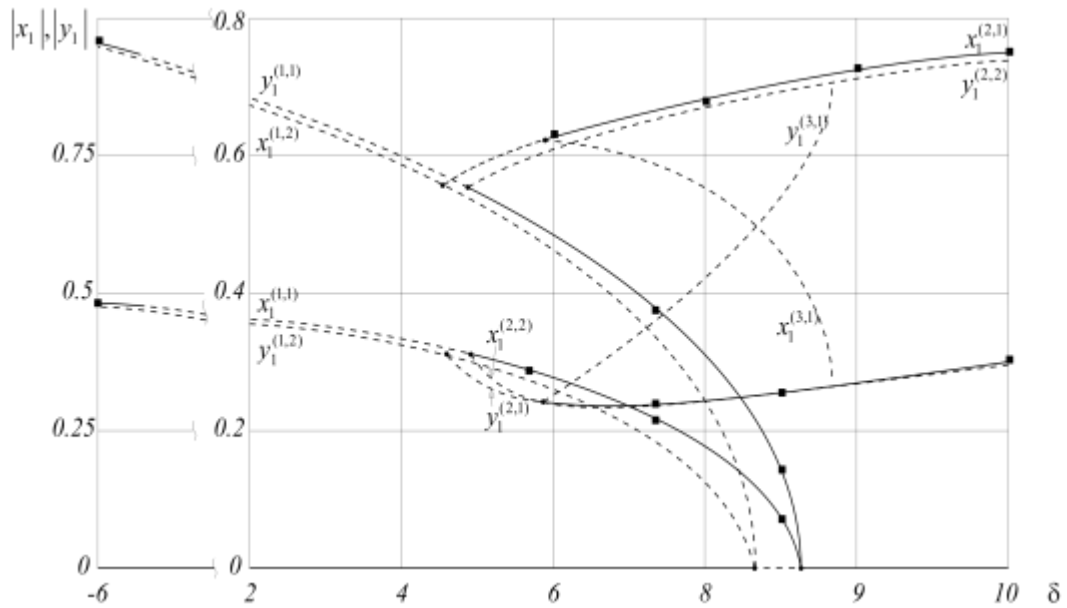


Рисунок 1 – АЧХ системы при движении на нормальных формах

Результаты анализа режимов движения, которые описываются формулами (20), представлены в виде АЧХ на рисунке 2. На этом рисунке показана зависимость амплитуд колебаний  $x_1$ ,  $y_1$  от частоты возмущающей силы  $\nu$ . Здесь ветви АЧХ, соответствующие решениям 2.1) в формуле (20) обозначены буквами  $x_1^{(1,1)}$ ,  $y_1^{(1,1)}$ ,  $x_1^{(1,2)}$ ,  $y_1^{(1,2)}$ . При этом в колебаниях участвует только одна сопряженная форма колебаний из разложения (2). На рисунке 2 показаны ветви  $x_1^{(2,1)}$ ,  $y_1^{(2,1)}$ ,  $x_1^{(2,2)}$ ,  $y_1^{(2,2)}$ , которые отвечают возбуждению двух форм колебаний, и соответствуют группе решений 2.2), представленной в (20). Ветви АЧХ  $x_1^{(3,1)}$ ,  $y_1^{(3,1)}$ ,  $x_1^{(3,2)}$ ,  $y_1^{(3,2)}$  отражают случай возбуждения трех форм колебаний, что отвечает случаю 2.3) в формулах (20).

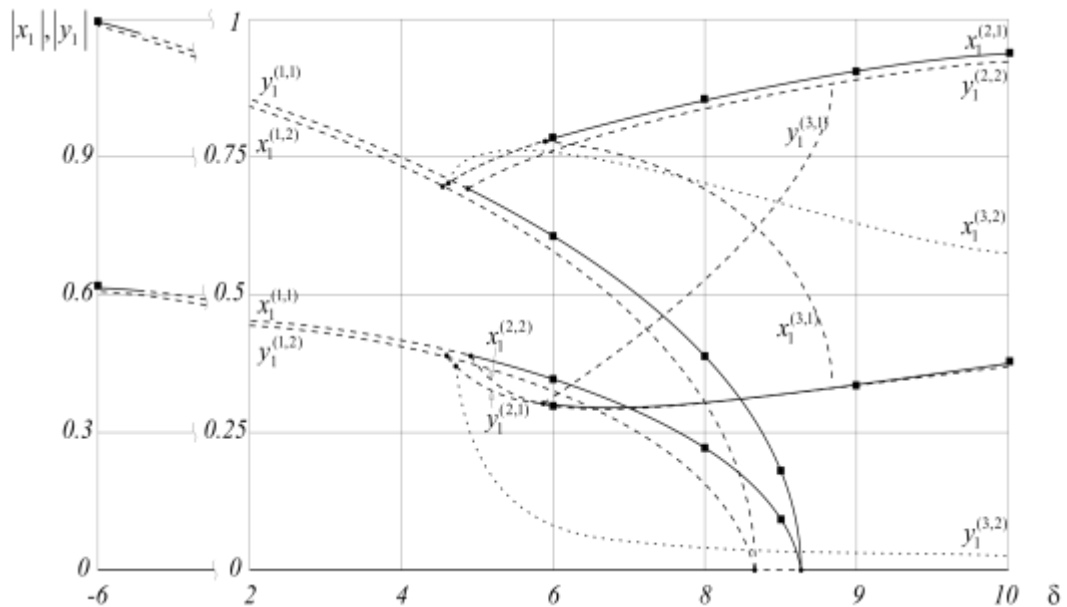


Рисунок 2 – АЧХ системы в случае когда формы  $\sin s_1 y \sin rx$  не активны

Анализ устойчивости периодических движений (19), (20) можно свести к анализу устойчивости неподвижных точек модуляционных уравнений (18). С помощью уравнений в вариациях, полученных из (18), определяются характеристические показатели. Результаты анализа устойчивости представлены на рисунках 1, 2. Сплошной линией показаны устойчивые колебания, а пунктирной линией – неустойчивые.

Для подтверждения результатов аналитического анализа проводилось прямое численное интегрирование системы (10) при различных значениях частот гармонического воздействия  $\nu$ . Результаты расчетов представлены на рисунках 1, 2 квадратными точками. Эти результаты свидетельствуют о хорошем совпадении данных прямого численного интегрирования и результатов метода многих масштабов.

**Заключение.** Существует большой класс цилиндрических оболочек, для которых двух и трехмодовые аппроксимации колебаний не достаточны для адекватного описания динамики. Это объясняется близостью собственных частот различных мод колебаний. В этом случае только многомодовые модели адекватно описывают колебания.

В статье многомодовая модель, учитывающая три пары сопряженных форм колебаний, используется для асимптотического анализа параметрических нелинейных колебаний цилиндрических оболочек при комбинационном резонансе. В результате применения метода Бубнова-Галеркина получена дискретная динамическая система с большим числом степеней свободы. В этой системе исследовано два вида движений: нелинейные нормальные формы и случай когда формы  $\sin s, y \sin rx$  не активны.

Литература: 1. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наукова думка, 1984. – 218 с. 2. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Выща школа, 1989. – 207 с. 3. Kubenko V. D., Koval'chuk P. S., Kruk L. A. Non-linear interaction of bending deformations of free-oscillating cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration – 2003. – V. 265. – P. 245–268. 4. Kubenko V. D., Kovalchuk P. S. Nonlinear problems of oscillations of thin shells // International Applied Mechanics – 1998. – V.34, №8. – P. 703–728. 5. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. – New York: Wiley, 1988. – 655 p. 6. Аврамов К.В. Нелинейные нормальные формы параметрических колебаний // Доповиди НАНУ. – 2008. – №11. – С. 41 – 47. 7. Avramov K. Nonlinear modes of parametric vibrations and their applications to beams dynamics // Journal of Sound and Vibrations – 2009. – 322. – P. 476-489. 8. Gonçalves P.B., Del Prado Z.J.G.N. Nonlinear Oscillations and Stability of Parametrically Excited Cylindrical Shells // Meccanica – 2002. – V.36. – P. 105-116. 9. Yamaki N. Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells. – North-Holland, Amsterdam – 1984. 10. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 423 с. 11. Pellicano F., Amabili M. Stability and vibration of empty and fluid-fillet circular cylindrical shells under static and periodic axial loads // International Journal of Solid and Structures – 2003. – V.40. – P. 3229-3251.

Кочуров Р.С., Аврамов К.В.

#### АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПАРАМЕТРИЧНИХ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ КОМБІНАЦІЙНОМУ РЕЗОНАНСІ

Нелінійні параметричні коливання циліндричних оболонок описуються рівняннями Доннелла-Муштарі-Власова. Рухи представляються у вигляді багатомодового розкладання по формах коливань. Дискретизація проводиться методом Бубнова-Гальоркіна. За допомогою метода багатьох масштабів досліджується динамічна система



з дисипацією при комбінаційному резонансі.

Kochurov R.E., Avramov K.V.

ASYMPTOTICAL ANALYSIS OF PARAMETRIC NONLINEAR VIBRATIONS OF  
CYLINDRICAL SHELLS AT COMBINATIONAL RESONANCE

Donnell's equations are used to analyze cylindrical shell nonlinear parametrical vibrations. Motions are presented as multi-mode expansion. To obtain a finite-degree-of-freedom model of shell motions the Bubnov-Galerkin method is applied. The dynamical system investigated using multiply scales method; the effect of structural damping is taken into account.

---